
ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

УДК 624.073.4

Т.А.ЄМЕЛЬЯНОВА

Херсонський державний аграрний університет

**РОЗВ'ЯЗУЮЧЕ РІВНЯННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ
ТРИШАРОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЯКА ПІДКРІПЛЕНА
РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ**

В роботі розглядається отримання розв'язуючого рівняння вільних коливань тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем, яка підкріплена поздовжніми або поперечними ребрами жорсткості, для побудови розрахункової моделі та розробки алгоритму дослідження вільних коливань тришарових оболонок наступних типів: пологої тришарової оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості; кругової тришарової оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості; пологої тришарової оболонки, яка підкріплена поперечними ребрами жорсткості.

Ключові слова: тришарова оболонка, легкий заповнювач, вільні коливання, ребра жорсткості, функція зусиль, функція переміщень.

Т.А.ЕМЕЛЬЯНОВА

Херсонский государственный аграрный университет

**РАЗРЕШАЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ
РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ**

В работе рассматривается получение разрешающего уравнения свободных колебаний трехслойной цилиндрической оболочки с легким наполнителем, подкрепленной продольными или поперечными ребрами жесткости, для построения расчетной модели и разработки алгоритма исследования свободных колебаний трехслойных оболочек следующих типов: пологой трехслойной оболочки, подкрепленной продольными ребрами жесткости; круговой трехслойной оболочки, подкрепленной продольными ребрами жесткости; пологой трехслойной оболочки, подкрепленной поперечными ребрами жесткости.

Ключевые слова: трехслойная оболочка, легкий наполнитель, свободные колебания, ребра жесткости, функция усилий, функция перемещений.

T.A.YEMELYANOVA

Kherson State Agrarian University

**RESOLVING EQUATION OF FREE VIBRATIONS FOR
A THREE-LAYER CYLINDRICAL SHELL REINFORCED BY RIBS
OF RIGIDITY**

The given article looks at obtaining of the resolving equation of free vibrations for a three-layer cylindrical shell with a lightweight aggregate reinforced by longitudinal and transverse ribs of rigidity for the construction of the computational model and algorithm development of the research of free vibrations for three-layer shells of the following types: a flat three-layer shell, reinforced by longitudinal ribs; a circular three-layer shell, reinforced by longitudinal ribs; a flat three-layer shell, reinforced by transverse ribs.

Keywords: three-layer shell, lightweight aggregate, free vibrations, ribs of rigidity, function of effort, function of displacements.

Постановка проблеми

Насьогодні шарові конструкції, а саме тришарові оболонки, знаходять широке застосування в таких наукоємних галузях, як промислове та цивільне будівництво, літакобудування, суднобудування та в інших галузях інженерії. Для подібних конструкцій рішення задач про вільні коливання має

фундаментальне значення для вирішення багатьох проблем динаміки, а саме при дослідженні процесів, які використовують інформацію про першу частоту вільних коливань [1,2].

Розглядаються вільні коливання тришарової циліндричної оболонки з легким трансверсально – ізотропним заповнювачем, яка підкріплена ребрами жорсткості. Відстань між ребрами, а також жорсткості ребер вважаються однаковими. При цьому ребра розташовані симетрично відносно серединної поверхні тришарової оболонки (рис..1).

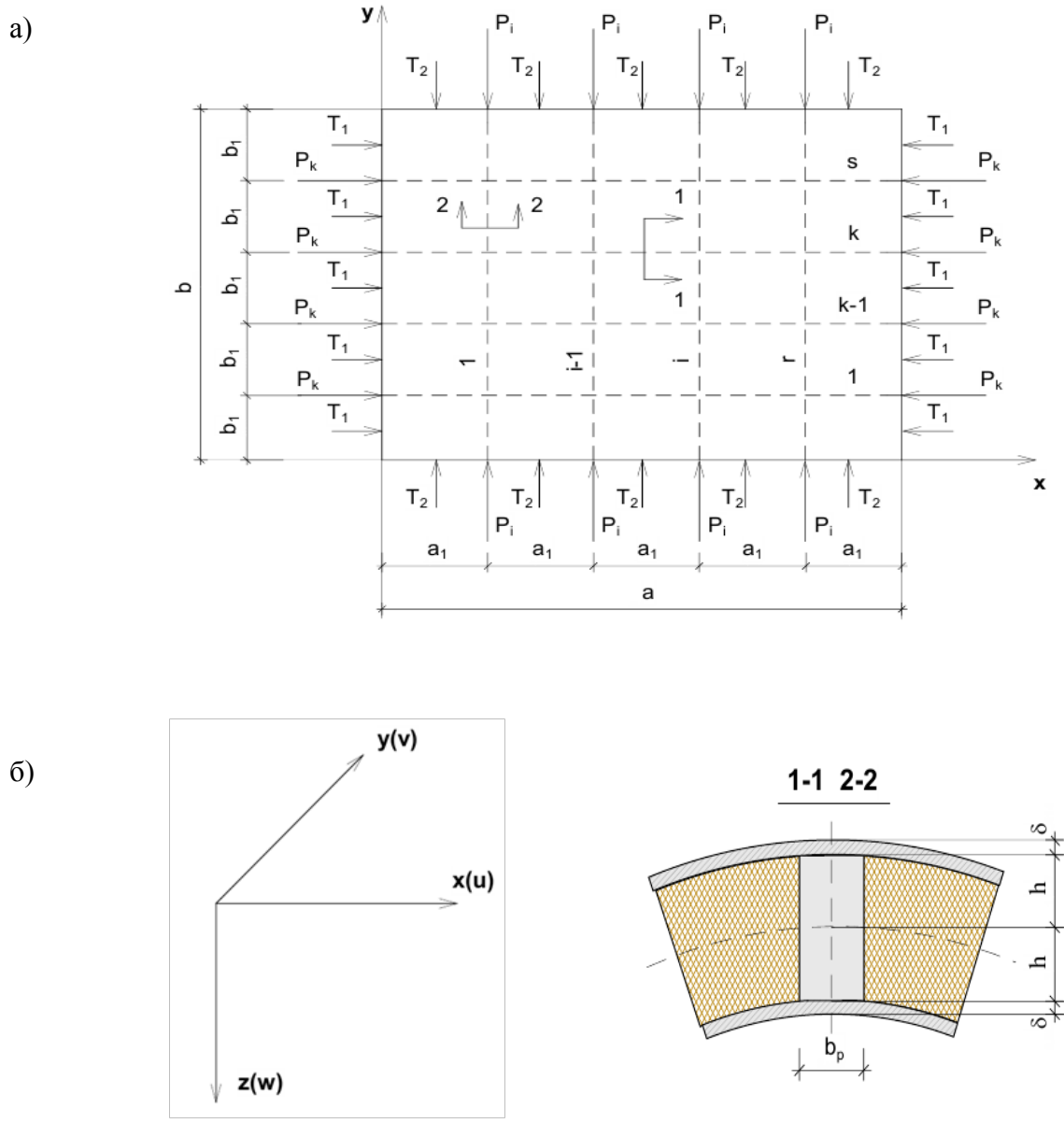


Рис. 1. Схема тришарової пологої оболонки з легким заповнювачем, яка підкріплена ребрами жорсткості: а) схема підкріпленої оболонки в плані, б) розріз оболонки за перерізами 1-1 та 2-2.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Варіаційним шляхом, використовуючи функціонал - дію за Остроградським – Гамільтоном, отримані рівняння руху тришарової оболонки симетричної будови, підкріпленої ребрами в двох взаємно перпендикулярних напрямках з урахуванням дії подовжніх сил в серединних площинах зовнішніх шарів і ребрах, граничні умови і умови по лініях ребер. При виведенні рівнянь передбачалося, що заповнювач легкий, а ребра мають однакову жорсткість в одному напрямі і розташовані на однакових відстанях. Для зовнішніх несучих шарів оболонки приймалися гіпотези Кірхгоффа - Лява, а для заповнювача - лінійний закон зміни тангенціальних переміщень за товщиною. Поперечні деформації заповнювача не враховувалися. Для ребер прийняті гіпотези Бернуллі та враховувався тільки згин ребер в вертикальній площині [3]. За допомогою граничного переходу отримані умови по лініях ребер без урахування деформацій зсуву в ребрах.

За допомогою варіаційного принципу Остроградського – Гамільтона, отримані диференціальні рівняння вільних коливань ділянки оболонки, замкненої між ребрами, а також умови по лініях ребер і по краях тришарової циліндричної оболонки, яка підкріплена як поздовжніми, так і поперечними ребрами жорсткості, при шарнірному опиранні кромки [4].

Диференціальні рівняння згинальних коливань ділянки оболонки, розташованої між ребрами, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 u_{\beta} - H \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{Bh}{G_3} \left(\frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_{\beta}}{\partial x \partial y} \right); \\
 v_{\beta} - H \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{Bh}{G_3} \left(\frac{\partial^2 v_{\beta}}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_{\beta}}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial x \partial y} \right); \\
 -2D\nabla^4 w - 2BH\nabla^2 \left(\frac{\partial u_{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial y} \right) + \frac{N_y}{R} - 2(\rho_H \delta + \rho_3 h) \omega^2 w &= 0; \\
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0; \\
 \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Формулювання мети дослідження

Метою роботи є отримання розв'язуючого рівняння вільних коливань тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем, яка підкріплена поздовжніми або поперечними ребрами жорсткості, для побудови розрахункової моделі та розробки алгоритму дослідження вільних коливань зазначеної оболонки при шарнірному опиранні кромки.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглядаються наступні типи тришарової оболонки з легким трансверсально – ізотропним заповнювачем: а) полого тришарова оболонка, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості (рис.2); б) кругова тришарова оболонка, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості (рис.3); в) полого тришарова оболонка, яка підкріплена поперечними ребрами жорсткості (рис.4).

Всі ребра мають однакову жорсткість та розташовані на однакових відстанях одне від одного [6,7,8].

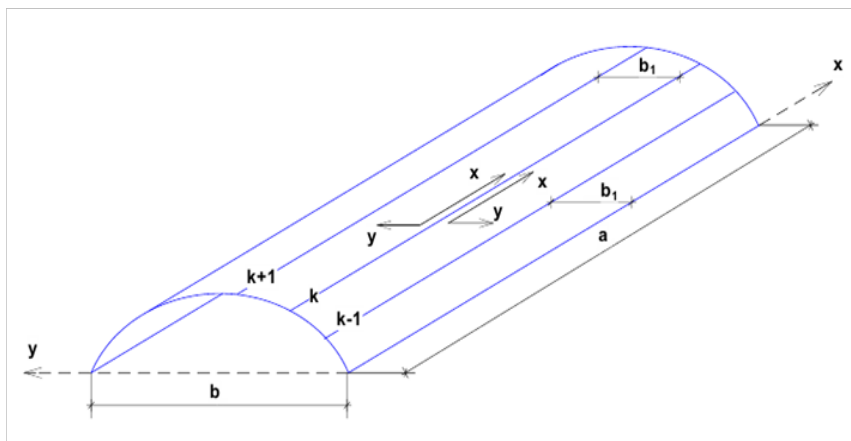


Рис. 2. Схема тришарової пологої оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості

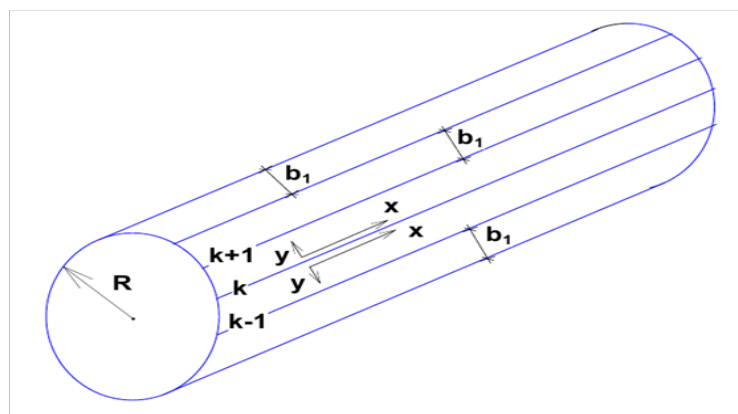


Рис. 3. Схема тришарової кругової циліндричної оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості

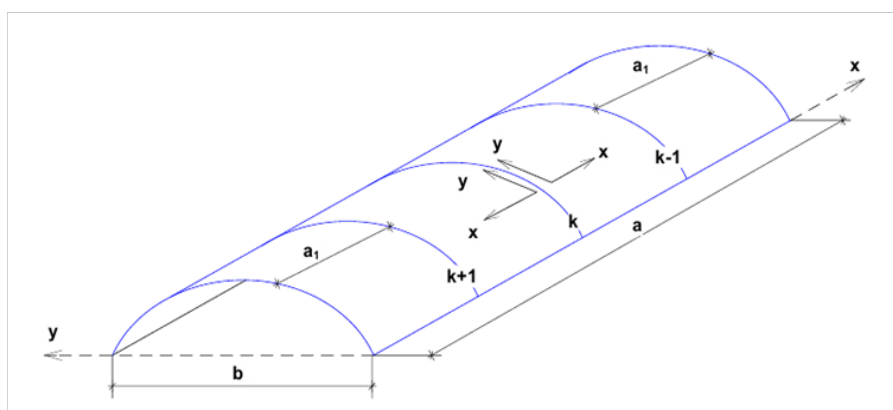


Рис. 4. Схема тришарової пологої оболонки, яка підкріплена поперечними ребрами жорсткості

Шляхом введення функцій зусиль

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

і функцій переміщень

$$u_\beta = H \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_\beta = H \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad w = \left(1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \varphi \right), \quad (3)$$

систему диференціальних рівнянь (1) можна привести до вигляду, припускаючи $D = 0$:

$$\nabla^4 \Phi + \frac{\bar{B}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\varphi - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \varphi \right) = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^4 \varphi - \frac{1}{BD^*} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - m_{об} \omega^2 \left(\varphi - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \varphi \right) = 0, \quad (5)$$

$$\Psi - \frac{1-\mu}{2G_3} Bh \nabla^2 \Psi = 0, \quad (6)$$

$$B = \frac{E\delta}{1-\mu^2};$$

$$D = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)};$$

$$H = h + 0,5\delta;$$

$$u_\beta = 0,5(u_1 - u_2);$$

$$v_\beta = 0,5(v_1 - v_2);$$

де δ – товщина зовнішніх шарів;

$2h$ – товщина зовнішніх шарів та заповнювача;

G_3 – модуль зсуву заповнювача;

E, μ – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона зовнішніх шарів;

u_1, v_1, u_2, v_2 – тангенціальні переміщення серединних площин верхнього та нижнього шарів;

w – прогин оболонки.

Систему рівнянь (4) і (5) можна розв'язати, якщо ввести в розгляд функцію $F(x,y)$ та прийняти:

$$\varphi = \nabla^4 F, \quad \Phi = -\frac{\bar{B}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) F \quad (7)$$

Остаточно систему рівнянь (4) і (5) можна привести до одного розв'язуючого рівняння (8):

$$\nabla^4 \nabla^4 F + \frac{\bar{B}}{R^2 D^*} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(1 - \frac{Bh}{G^3} \nabla^2 \right) F - \frac{\omega^2 m_{об}}{D^*} \left(1 - \frac{Bh}{G^3} \nabla^2 \right) \nabla^4 F = 0 \quad (8)$$

Висновки

Таким чином, отримане розв'язуюче рівняння (8) може бути застосоване для побудови розрахункової моделі та розробки алгоритму дослідження вільних коливань тришарових циліндричних оболонок наступних типів: пологої тришарової оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості; кругової тришарової оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості; пологої тришарової оболонки, яка підкріплена поперечними ребрами жорсткості.

З урахуванням граничних умов для випадку вільного обпирання, можна отримати частотне рівняння для визначення першої частоти вільних коливань тришарових циліндричних оболонок з легким трансверсально-ізотропним заповнювачем, підкріплених як поздовжніми так і поперечними ребрами жорсткості.

Список використаної літератури

1. Григолоук Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек.– М.: Машиностроение – 1973. – С.172.
2. Григолоук Э.И., Кассихин В.Н. Осесимметричные свободные колебания круговых трехслойных пластин // Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек: сборник научных трудов под ред. Э.И. Григолоука. – 1981. – С. 185– 195.
3. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы: Учебное пособие. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.
4. Кириченко В.Л., Емельянова Т.А. Дифференциальные уравнения устойчивости пологой трехслойной оболочки с легким заполнителем, подкрепленной ребрами жесткости // «Вестник» Херсонского государственного технического университета, 1999. – №3(6). – С. 248 – 251.
5. Емельянова Т.А. Дифференциальные уравнения свободных колебаний трехслойной оболочки, подкрепленной ребрами жесткости // Теоретическая и прикладная механика: сборник научных трудов. – Минск: УП «Технопринт», 2002. – С. 169 – 181.
6. Емельянова Т.А. Устойчивость трехслойной пологой оболочки с легким заполнителем, подкрепленной продольными ребрами жесткости // Сборник «Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике» (по материалам Международной научно – технической конференции), Минск: УП «Технопринт». - 2001. – С. 193 – 197.
7. Кириченко В.Л., Емельянова Т.А. Стійкість тришарової циліндричної оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості за умовами поздовжнього стиску // Таврійський науковий вісник. – Херсон: Айлант, 2000. – №14. – С.185-197.