

УДК 513.88: 517.948.3

Г.С. ПОЛЕТАЕВ

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

## НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ - II

*Рассмотрено существование и связь между решениями абстрактных парных интегральных уравнений типа свёртки с произвольной и равной дельта-функции Дирака правыми частями. При сделанных предположениях доказана теорема – критерий с необходимым и достаточным условием такой связи. Процедура свободна от аппарата теории интеграла типа Коши, гёльдеровости функций.*

*Ключевые слова:* интеграл, уравнение, парное, свёртка, банахова, алгебра, факторизация, проектор.

Г.С. ПОЛІТАЄВ

Одеська державна академія будівництва та архітектури

## НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВА ЗВ'ЯЗКУ РІШЕНЬ ПАРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ЗГОРТКИ - II

*Розглянуто існування та зв'язок між рішеннями абстрактних парних інтегральних рівнянь типу згортки з довільною та тією, що дорівнює дельта-функції Дірака, правими частинами. При деяких припущеннях доведено теорема – критерій з необхідною та достатньою умовою такого зв'язку. Процедура вільна від апарату теорії інтеграла типу Коші, умови Гельдера.*

*Ключові слова:* інтеграл, рівняння, парне, згортка, банахова, алгебра, факторизація, проектор.

G.S. POLETAEV

Odessa State Academy of Buildings and Architecture

## A NECESSARY AND SAFFICIENT CONDITION FOR CONNECTION SOLUTIONS PAIRED INTEGRAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE - II

*The connection between the solutions of the abstract convolution type paired integral equations is considered. Right-hand side of the equations can be arbitrary and equal Dirac's delta-function. The theorem - criterion of this connection is proved. Procedure is a free from the theory of Cauchy integral, Holder requirements.*

*Keywords:* integral, equation, paired, convolution, Banach, algebra, factorization, projection.

### Актуальность, постановка проблемы

Известна важная роль теории интегральных уравнений типа свёртки, в частности, парных, с ядрами от разности аргументов, а также круга проблем, связанных с их исследованием, в фундаментальных теоретических и прикладных вопросах математики, механики, теории некоторых видов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, теории упругости, расчётов строительных элементов, математической и теоретической физики [1-14]. Общие элементы этой тематики связываются положениями строящейся автором теории уравнений в кольцах с факторизационными парами. Решение такого рода уравнений и смежных задач, в существенном, сопряжено с необходимостью преодоления серьёзных аналитических барьеров. Выяснением самого факта существования решений, разработкой неизвестных, при соответствующих предположениях, подходов к решению и исследованию. Поэтому получение новых общих результатов о разрешимости таких уравнений, возможных путях построения решений, формул их представления через известные величины, изучение свойств решений, возможных связей между решениями является актуальной задачей. Актуальна и разработка элементов точных методов, минимально опирающихся на теорию функций комплексного переменного и на теорию интеграла Фурье. Причём, свободных от аппарата теории интеграла типа Коши, требования гёльдеровости функций.

### Анализ исследований и публикаций

В рассматриваемом виде, изучаемые ниже обобщённые парные уравнения типа свёртки, при сделанных ниже предположениях, впервые, появились в работах автора. Они охватывают известные парные интегральные уравнения типа свёртки [1-4, 6, 10, 12-18]. Наиболее полная теория последних, в случае порождающих ядра функций  $k_{1,2}(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ , в целом классе  $E$  банаховых пространств построена в [4]. В близкой к рассматриваемой в [12] и ниже постановке, но в других пространствах, эти парные интегральные уравнения изучались Черским Ю.И.; Черским Ю.И. и Гаховым Ф.Д. (1954, 1956; см. также [6]) при дополнительных ограничениях типа гёльдеровости функций. В этих исследованиях использован аппарат задачи Римана - Гильберта, на связь с которой впервые указал И.М. Рапопорт [1]. Наряду с этим, при изучении условия разрешимости некоторых видов уравнений разных классов, можно обнаружить существование свойства связи между решениями. При весьма общих предположениях, для них оказывается возмож-

ным, зная специальные решения, построить решения, соответствующие произвольной правой части. Это имеет место для ряда известных и новых классов уравнений. В том числе, важных при моделировании теоретических и прикладных задач [12 – 18, 21]. Например, обнаруживается связь между решениями, соответствующими произвольной и равной единице кольца (функций, матриц или абстрактных элементов, в котором отыскивается решение) правым частям. Для парных уравнений, в том числе типа свёртки, до работ автора, вопросы связи решений оставались не поставленными в общей форме и, в достаточно полном объёме, не были разрешены. База результатов установлена в [12]. Она связана с работами [1, 2, 4] - предшествующими составляющими замечательной истории исследования парных интегральных уравнений типа свёртки. В этих, а также иных работах, имеются и фрагменты историко-мотивационного характера [6].

#### Цель статьи

Целью статьи – второй части сообщения является доказательство сформулированной в представленной одновременно первой части: «Необходимое и достаточное условие связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки – I », теоремы - критерия связи решений абстрактных обобщённых парных интегральных уравнений типа свёртки относительно неизвестной функции  $\varphi(t)$  вида:

$$\begin{cases} \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)ds = \alpha\delta + f(t), & t < 0; \\ \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)ds = \beta\delta + g(t), & t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения (1) при  $\alpha=\beta=0$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  являются известными парными интегральными уравнениями типа свёртки [1, 2, 4, 6, 10, 12, 13]. Предполагается, что:

$$k_1(t), k_2(t) \exp\{ct\} \in L_1(-\infty, \infty); c \in \mathbb{R}, c \geq 0; \quad (2)$$

$$[1 - K_1(\lambda)][1 - K_2(\lambda - ic)] \neq 0, -\infty < \lambda < \infty; K_j(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} k_j(\zeta)e^{i\zeta t} dt; j = 1, 2. \quad (3)$$

#### Основной материал и результаты

Доказательство необходимого и достаточного условия - критерия связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки. Будем использовать обозначения, определения и общие положения из первой части сообщения. Для удобства, повторим формулировку доказываемой теоремы, а затем приведём, при рассматриваемых предположениях, доказательство теоремы-критерия непосредственно.

Теорема 3. Пусть  $k_1(t), k_2(t) \exp(ct) \in L_1(-\infty, +\infty); c \geq 0$ , т.е.  $k_1 \in L, k_2 \in L_{<c>}; c \geq 0$ , и выполнено условие (3), а парное интегральное уравнение с (1) с правой частью равной  $\delta$  (т.е. при  $\alpha\delta=\beta\delta=\delta; f(t)=g(t)=0$ ) имеет решение  $\varphi_\delta \in \tilde{L}_{0 \cap c}$ , причём,  $\varphi_\delta \equiv \varphi_\delta(t) = \delta + x_1; x_1(t) \in L_{0 \cap c}$  и

$$[1 + X_1(\lambda)] \bullet [1 + X_1(\lambda - ic)] \neq 0, -\infty < \lambda < +\infty. \quad (4)$$

Тогда для существования решений  $\varphi(t) \in \tilde{L}_{0 \cap c}$  парного интегрального уравнения (1) с произвольной из всевозможных правых частей  $\alpha\delta + f(t), -\infty < t < 0; \beta\delta + g(t), 0 < t < \infty$ ; где  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}; f, g \in L_{0 \cap c}, c \geq 0$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\alpha = \beta. \quad (5)$$

При его выполнении, решение  $\varphi(t) \in \tilde{L}_{0 \cap c}$  обобщённого парного интегрального уравнения типа свёртки (1) с произвольной правой частью  $\alpha\delta + f(t), -\infty < t < 0; \alpha\delta + g(t), 0 < t < \infty; \alpha \in \mathbb{C}; f, g \in L_{0 \cap c}; c \geq 0$  в  $\tilde{L}_{0 \cap c}$  можно определить по формуле:

$$\varphi(t) = \varphi_\delta * \{p_-([\varphi_\delta]_0' * [\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_-]) + p_+([\varphi_\delta]_c' * [\delta + k_2^1] * [\alpha\delta + g_+])\}(t), \quad (6)$$

где  $[\varphi_\delta]_0', \delta + k_1^1 (:= [\delta - k_1]_0') \in \tilde{L}; [\varphi_\delta]_c', \delta + k_2^1 (:= [\delta - k_2]_c') \in \tilde{L}_{<c>}$  - обратные в  $\tilde{L}, \tilde{L}_{<c>}$ ,

соответственно, для решения  $\varphi_\delta \in \tilde{L} \cap \tilde{L}_{<c>}$  и для коэффициентов  $[\delta - k_1(t)] \in \tilde{L}, [\delta - k_2(t)] \in \tilde{L}_{<c>}, c \geq 0$  парного уравнения (1).

Доказательство. Необходимость. Пусть при сделанных предположениях элемент  $\varphi \in \tilde{L}_{0 \cap c}$  является решением уравнения (1). Тогда, используя введенные обозначения и проекторы, заключаем:

$$[(\delta - k_1) * \varphi(t)]^- = \alpha\delta + f_-(t), [(\delta - k_2) * \varphi(t)]^+ = \beta\delta + g_+(t). \quad (7)$$

Отсюда, применяя к обеим частям каждого из записанных равенств проектор  $p^0$ , получаем:

$$p^0[(\delta - k_1) * \varphi] = p^0[\alpha\delta + f_-] = \alpha\delta; p^0[(\delta - k_2) * \varphi] = p^0[\beta\delta + g_+] = \beta\delta.$$

Используя теперь гомоморфические свойства проектора  $p^0$ , заключаем, что  $\varphi^0 = \alpha\delta = \beta\delta$  и условие (5) действительно имеет место.

Достаточность. Пусть предположения теоремы 3 выполнены, имеют место условия (3) - (5) и в формуле (6):  $\varphi_\delta \equiv \varphi_\delta(t) = \delta + x_1$ ;  $x_1(t) \in L_{0 \cap c}$  ( $c \geq 0$ ), - удовлетворяющее условию (4) решение парного интегрального уравнения (1) с правой частью равной присоединенной единице  $\delta (= \delta(t))$ ; а  $[\varphi_\delta]_0', [\varphi_\delta]_c'; \delta + k_j^1, j = 1, 2$  - обратные в банаховых алгебрах  $\tilde{L}, \tilde{L}_{(c)}$ , соответственно, элементы. Их существование гарантирует вариант теоремы Н. Винера, так как выполнены условия (3), (4)). Знаками «+», «-» при функциях отмечено применение используемых проекторов [12]. Тогда:

$$[(\delta - k_1) * \varphi_\delta]^- = [(\delta - k_2) * \varphi_\delta]^+ = \delta. \text{ Поэтому, } [\delta - k_1] * \varphi_\delta = \delta + a_+, [\delta - k_2] * \varphi_\delta = \delta + a_-;$$

где  $a_+ \in L^+, a_- \in L_{<c}^-$  - некоторые элементы и справедливы представления:

$$[\varphi_\delta]_0' = [\delta + a_+]_0' * [\delta - k_1], [\varphi_\delta]_c' = [\delta + a_-]_c' * [\delta - k_2]. \quad (8)$$

Используя свойства представления Гельфанда элементов банаховых алгебр функциями на максимальных идеалах, получаем ещё такие представления:

$$[\varphi_\delta]_0' = \delta + x_0^1 (x_0^1 \in L); [\varphi_\delta]_c' = \delta + x_c^1 (x_c^1 \in L_{<c}^-), \text{ а с помощью (8) заключаем, что}$$

$$p^0[[\delta + a_+]_0'] = p^0[[\delta + a_-]_c'] = \delta. \quad (9)$$

Легко видеть, что при любой правой части уравнения (1) с  $\alpha = \beta; \alpha, \beta \in C; f, g \in L_{0 \cap c}, c \geq 0$  правая часть формулы (6) определяет некоторую функцию (элемент)  $y(t) \in \tilde{L}_{0 \cap c}$ . Переписывая уравнение (1) с помощью введенных обозначений в краткой форме (7) и подставляя этот элемент  $y(t) \in \tilde{L}_{0 \cap c}$  в левую часть (1) вместо  $\varphi(t)$ , в результате преобразований с учетом сделанных замечаний, включая (9), получим:

$$\begin{aligned} p^- [\{(\delta - k_1) * \varphi\}(t)] &= \\ &= p^- [\{(\delta - k_1) * \{\varphi_\delta * \{p_-([\varphi_\delta]_0' * [\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_-]) + p^+([\varphi_\delta]_c' * [\delta + k_2^1] * [\alpha\delta + g_+])\}\}\}(t)] = \\ &= p^- [\{(\delta - k_1) * \varphi_\delta * \{[\varphi_\delta]_0' * [\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_-] - p^+([\varphi_\delta]_0' * [\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_-])\}\}(t)] + \\ &+ p^- [\{(\delta + \dot{a}_+) * \{p^+([\varphi_\delta]_c' * [\delta + k_2^1] * [\alpha\delta + g_+])\}\}(t)] = \\ &= \alpha\delta + f_-(t) - p^0[\{[\delta + \dot{a}_+]_0' * [\alpha\delta + f_-]\}(t)] + p^0[\{(\delta + \dot{a}_+) * \{p^+([\delta + \dot{a}_-]_c' * [\alpha\delta + g_+])\}\}(t)] = \\ &= \alpha\delta + f_-(t) - \alpha p^0[[\delta + \dot{a}_+]_0'(t)] + \alpha p^0[[\delta + \dot{a}_-]_c'(t)] = \alpha\delta + f_-(t) - \alpha\delta + \alpha\delta = \alpha\delta + f_-(t). \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что  $p^+[\{(\delta - k_2) * \varphi\}(t)] = \alpha\delta + g_+$ . Стало быть, действительно, формула (6) определяет решение уравнения (1) в рассматриваемой ситуации. Достаточность, а с нею и теорема доказана.

Общая формула представления решения  $\varphi_\delta$ , в предположении существования соответствующего типа факторизаций некоторых элементов, строящихся по ядрам парного интегрального уравнения вида (1) при  $c > 0$ , имеется в [12].

Иногда нахождение решения  $\varphi_\delta$  упрощается [17]. В частности, так может оказаться в случаях, когда порождающие ядра уравнения вида (1) функции  $k_j(t), j = 1, 2$  принадлежат соответствующим подалгебрам  $L^{\mp}, L_{(c)}^{\mp}$ . Например, если при условиях теоремы 3 будет  $k_1(t) = k_{1+}(t) \in L^+, k_2(t) = k_{2-}(t) \in L_{(c)}^-$ , решением уравнения (1) с правой частью равной  $\delta (= \delta(t))$  оказывается сама функция  $\delta (= \delta(t))$ . Для такого решения  $\varphi_\delta = \delta(t)$ , условие (4), очевидно, выполняется; формула связи решений (6) упрощается и принимает вид:

$$\varphi(t) = \{p_-([\delta + k_1^1] * [\alpha\delta + f_-]) + p^+([\delta + k_2^1] * [\alpha\delta + g_+])\}(t). \quad (10)$$

Укажем, что ряд положений к теореме 3 и аналогичным, для рассматриваемого случая  $c \geq 0$ , можно получить, используя факторизационные теоремы 1, 2 из результатов [15], установленных для абстрактных парных уравнений в кольцах с факторизационными парами:

$$(a_1x)^- = c^-, (a_2x)^+ = b^+. \quad (11)$$

Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение:

$$\begin{cases} x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)x(s)ds = c^-(t), t < 0, \\ x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)x(s)ds = b^+(t), t > 0; \end{cases} \quad (12)$$

где,  $k_1(t) = [e^{-2t}]_+; k_2(t) = [e^{5t}]_-; c^- = c^-(t) = c_-(t) \in L^-, b^+ = b^+(t) = b_+(t) \in L^+$ .

Полагаем,

$$a_1 = \delta(t) - k_1(t); a_2 = \delta(t) - k_2(t); \quad (13)$$

то есть:  $a_1 = \delta - [e^{-2t}]_+; a_2 = \delta - [e^{5t}]_-$ . Решением  $\varphi_\delta$  при  $c^- = c^-(t) = \delta, b^+ = b^+(t) = \delta$ ,  $\delta \equiv \delta(t)$  очевидно, будет  $\varphi_\delta = \delta(t)$  - функция Дирака. Можно установить, что для функций (13), обратными в  $\tilde{L}$  будут:  $a_1'(t) = \delta + [e^{-t}]_+; a_2'(t) = \delta + [e^{4t}]_-$ . При любых  $c^- = c^-(t) = c_-(t) \in L^-, b^+ = b^+(t) = b_+(t) \in L^+$  условие (5), очевидно, выполнено:  $\alpha = \beta = 0$ . Следовательно, в силу теоремы 3 решение  $\varphi(t) \in L$  уравнения (12) существует и допускает представление в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [a_1' * c^-]_- + [a_2' * b^+]^+ = \left[ (\delta + [e^{-t}]_+) * c^-(t) \right]_- + \left[ (\delta + [e^{4t}]_-) * b^+(t) \right]^+ = \\ &= c_-(t) + \left\{ [e^{-t}]_+ * c^-(t) \right\}_- + b^+(t) + \left\{ [e^{4t}]_- * b^+(t) \right\}^+. \quad \text{Отсюда, в } L : \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = c_-(t) + b_+(t) + \left\{ (e^{-t})_+ * c_-(t) \right\}_- + \left\{ [e^{4t}]_- * b_+(t) \right\}_+. \quad (14)$$

Результаты о парных уравнениях освещались автором, в частности, в рамках Международной конференции имени академика М. Кравчука в Киеве, КПИ-2010, 2012; - Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», в Москве, МГТУ-2013, а также в ОГАСА [21] и других.

### Выводы и перспективы

Имеются важные, в том числе ранее неизвестные положения исследований по теории интегральных уравнений типа свёртки, которые можно получать единым подходом. При нём, среди прочих, используются элементы строящейся теории уравнений в кольцах с факторизационными парами. Удаётся, не опираясь на теорию задачи Римана, сократить использование аппарата преобразований Фурье, снять условие гёльдеровости функций, охарактеризовать разрешимость уравнений и связь решений соответствующих произвольным и специальным правым частям. При весьма общих условиях, без требований гёльдеровости функций, доказана теорема с необходимым и достаточным условием (- критерием) связи их решений, соответствующих произвольной и равной присоединенной единице, исходных банаховых алгебр, правым частям. Использовались применяемые непосредственно к соответствующему случаю банаховых алгебр подходы, развиваемые для уравнений в абстрактных кольцах с факторизационными парами [15 - 17, 20]. При установлении вида формулы связи, существенно использованы варианты теоремы Н. Винера и факторизационных теорем [2, 4, 12 -14, 19, 20]. Результаты имеют теоретическое и практическое значение. Могут использоваться в соответствующих ситуациях при изучении конкретных примеров уравнений рассматриваемого вида (1). В перспективе возможно насыщение круга применимости новыми конкретными фактами для подклассов уравнений, исследование свойств связи для других специальных решений рассмотренного и иных классов уравнений.

## Список использованной литературы

1. Рапопорт И.М. О некоторых «парных» интегральных и интегро-диффер. уравнениях // Сборник трудов института математики АН УССР. - Киев: Институт математики АН УССР. -1949. -12. - С. 102-118.
2. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / М.Г. Крейн // Успехи мат. наук. — 1958. — № 13, Вып. 5(83). — С. 3—120.
3. Попов Г.Я. О спаренных интегро-диффер. уравнениях изгиба лежащей на упругом основании неограниченной плиты кусочно-постоянной жесткости// Изв. высш. учебн. завед., Матем. - №1, 1957. — С. 195-209.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. О парном интегральном уравнении и его транспонированном I // Теорет. и прикл. математика. — Изд.-во Львовского ун.-та, 1958. - Вып. 1. - С. 58-81.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Наука, 1968. — 512 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1963. — 640 с.
7. Попов Г.Я. Метод факторизации и его численная реализация. Учебное пособие / Г.Я. Попов, П.В. Керекеша, В.Е. Круглов; под ред. проф. Г.Я. Попова. — Одесса: Одесский гос. университет, 1976. — 82 с.
8. Учебное пособие. Редактор: проф. Попов Г.Я. - Одесса: Одесский гос. университет, 1976. - 82 с.
9. Попов Г.Я. Контакт. задачи для лин.деформ. основан. Киев-Одесса: ВШ, 1982.-168 с.
10. Мхитарян С.М. О нектор. плоских контакт. задачах теор. упруг. с учётом сил сцепл. и связ. с ними интегр. и диффер. уравн. // Изв. АН Армянской ССР. Механика. - 1968. - XXI, №5-6. - С. 3-20.
11. Черский Ю.И. Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. — Одесса: Астропринт, 2010. — 552 с.
12. Акоюн В.Н. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом / В.Н. Акоюн, Л.Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тезисы докладов международной научной конференции (Одесса, 2013 г.). — Одесса, 2013. — С. 12.
13. Полетаев Г.С. Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр // Укр. матем. журн. — 1991. — 43, № 6. — С. 803—813.
14. Полетаев Г.С. Парні рівняння типу згортки з ядрами з різних банахових алгебр абсолютно інтегрованих з вагою функцій// НАУКОВІ ВІСТІ Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». — №4(24) , 2002. - С. 143-148.
15. Полетаев Г.С. Парные уравнения типа свёртки с ядрами из разных банаховых алгебр абсолютно интегрируемых по весу функций// Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 16 – 19 травня 2002 р., Київ. Матеріали конференції. — Київ, 2002. - С. 349.
16. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой // Укр. матем. журн. — 1991. — 43, № 9. — С. 1201—1213.
17. Poletaev G.S. Connection of solutions of the abstract paired equations in the rings with factorization pairs// Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 191. - 2009.- P. 479 - 484.
18. Полетаев Г.С. Критерий связи решений абстракт. парного уравн. в кольце с факторизационной парой// XIII МНК ім. акад. М. Кравчука.- НТУУ (КПІ) травень 2010 р., Київ. Матеріали конф. — Київ, 2010. - С.-220.
19. Полетаев Г.С. Связь решений парных интегральных уравнений типа свёртки// XIV МНК ім. академіка М. Кравчука. - НТУУ (КПІ) квітень 2012 р., Київ. Матеріали конференції II. — Київ, 2012. - С.-193.
20. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилев Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. - М.: Физматгиз, 1960. — 316 с.
21. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators - I: Algebraic Theory and Examples// J. Funct. Anal. - 1972. - 9, №3. - P. 262-295.
22. Полетаев Г.С. Критерий связи решений парных матричных уравнений с проекторами// ВІСНИК ОДАБА. — Одеса, 2013. — вип. 50, ч. 1. — С. 229 - 244.