УДК 514.18

М.М. МУКВИЧ
Національний університет біоресурсів і природокористування України

АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ, ЯКІ ЛЕЖАТЬ НА ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ЦИКЛОЇДИ

У роботі здійснено аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди навколо її напрямної. Знайдено параметричні рівняння поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній. Параметричні рівняння сімей ізотропних кривих отримано із умови рівності нулю лінійного елемента поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній.

Ключові слова: мінімальна поверхня, циклоїда, ізометрична сітка координатних ліній, лінійний елемент поверхні, ізотропна крива.

Н.Н. МУКВИЧ
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИЗОТРОПНЫХ КРИВЫХ, ЛЕЖАЩИХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЦИКЛОИДЫ

В работе осуществлено аналитическое описание минимальных поверхностей с помощью изотропных кривых, лежащих на поверхности вращения циклоиды вокруг ее направляющей. Получены параметрические уравнения поверхности вращения циклоиды, отнесенной к изометрической сети координатных линий. Параметрические уравнения семейств изотропных кривых определены из условия равенства нулю линейного элемента поверхности вращения циклоиды, отнесенной к изометрической сети координатных линий.

Ключевые слова: минимальная поверхность, циклоида, изометрическая сетка координатных линий, линейный элемент поверхности, изотропная кривая.

M.M. MUKVICH
National University Of Life And Environmental Sciences Of Ukraine

ANALYTICAL DESCRIPTION OF THE MINIMAL SURFACE USING ISOTROPIC CURVED, LYING ON THE ROTATIONAL SURFACE OF THE CYCLOID

The paper carried an analytical description of minimal surfaces with isotropic curves, that lie on the surface of the cycloid rotation around its directrix lines. Found parametric equation of the surface of rotation of the cycloid, referred to the isometric grid of the coordinate lines. Parametric equations families isotropic curves obtained from the condition that the linear element surface rotation cycloid, referred to the isometric grid of the coordinate lines.

Keywords: minimal surface, cycloid, isometric grid of the coordinate lines, line element of the surface, isotropic curve.

Постановка проблеми

Геометричне моделювання мінімальних поверхонь розширює можливості формоутворення поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. Наприклад, маючи найменшу площу для заданого опорного контура (просторової або плоскої кривої), геометрична форма мінімальних поверхонь забезпечує рівномірний розподіл зусиль для напруженого стану архітектурної конструкції [1, с. 152].

Перші дослідження мінімальних поверхонь належать Ж. Лагранжу (J. Lagrange), який сформулював варіаційну задачу [2, с. 683]: «Знайти поверхню найменшої площі, натягнуту на заданий контур» (1786 р.). Задаючи аналітично шукану поверхню у вигляді $z = z(x;\ y)$, Ж. Лагранж зробив висновок – функція $z = z(x;\ y)$ повинна задовольняти рівняння (Ейлера-Лагранжа):

$$\left(1+q^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(1+p^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \qquad (1)$$

де: $p = \frac{\partial z}{\partial x}; q = \frac{\partial z}{\partial y}.$

Пізніше Г. Монж (G. Monge) в 1776 виявив, що умова мінімальності площі приводить до умови рівності нулю середньої кривини поверхні.

Гранична умова $z|_G = \varphi(x;\ y)$ диференціального рівняння (1), яка застосовується для проектування архітектурних конструкцій, визначає проектну висоту поверхні на межі G області [1, 3, 4].

Знайти функцію $z = z(x;\ y)$, яка є розв'язком рівняння (1), у загальному випадку неможливо. Зокрема, при дослідженні геометрії архітектурних конструкцій для утворення точкового каркасу мінімальних поверхонь найчастіше використовують варіаційні [4, 5, 6] та кінцево-різницеві методи [1, 3].

Слід зазначити, що є інший напрям дослідження аналітичного опису мінімальних поверхонь – за допомогою властивостей функцій комплексної змінної, який дозволяє знайти параметричні рівняння мінімальних поверхонь. У цьому напрямі відомі праці видатних математиків К. Вейєрштрасса, С.Лі, Б. Рімана, Г. Шварца, які використовували для аналітичного опису мінімальних поверхонь методи і результати теорії функцій комплексної змінної [2, 7]. У даній роботі також використано властивості функцій комплексної змінної та реалізовано метод аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній [11, 12].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для аналітичного опису неперервного каркасу мінімальних поверхонь використовуються параметричні рівняння ізотропних кривих нульової довжини [7]. Побудову мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є реалізовано у дисертаційному дослідженні [8]. У дисертаційних дослідженнях [9, 10] учнів професора Пилипаки С.Ф. знайдено способи конструювання просторових ізотропних кривих за допомогою функцій комплексної змінної тільки для окремих випадків використання аналітичних функцій. Тому розширення способів утворення ізотропних кривих за допомогою функцій комплексної змінної є важливою умовою для дослідження проблеми аналітичного опису мінімальних поверхонь.

Формулювання цілей статті

Знайти аналітичний опис поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній та ізотропних кривих, що лежать на її поверхні. На основі вказаних ізотропних кривих побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них мінімальні поверхні.

Виклад основного матеріалу дослідження

Розглянемо поверхню обертання, параметричні рівняння якої мають вигляд:

$$X(\tau;v) = \varphi(\tau)\cdot\cos v; \qquad Y(\tau;v) = \varphi(\tau)\cdot\sin v; \qquad Z(\tau;v) = \psi(\tau), \tag{2}$$

де $\varphi = \varphi(\tau);\ \psi = \psi(\tau)$ – параметричні рівняння меридіана поверхні обертання.

У роботі [13] наведено алгоритм відшукання параметричних рівнянь меридіана поверхні обертання, при якому поверхня буде віднесена до ізометричних координат. Перехід від ортогональної до ізометричної сітки координат здійснюється за допомогою введення нової змінної t, яка пов'язана із змінною τ наступним чином [13]:

$$t = \int \frac{\sqrt{(\varphi'_\tau)^2 + (\psi'_\tau)^2}}{\varphi} d\tau. \tag{3}$$

Розглянемо поверхню обертання циклоїди навколо її напрямної, тоді її параметричні рівняння мають вигляд:

$$X(\tau;v) = a(1-\cos\tau)\cdot\cos v; \quad Y(\tau;v) = a(1-\cos\tau)\cdot\sin v; \quad Z(\tau;v) = a(\tau - \sin\tau), \tag{4}$$

де a – параметр циклоїди; $\tau \in [0;\ 2\pi];\ v \in [0;\ 2\pi]$.

Знайдемо умову переходу до ізометричної сітки координат, підставивши параметричні рівняння циклоїди $\varphi(\tau) = a(1-\cos\tau);\ \psi(\tau) = a(\tau - \sin\tau)$ у (3). Після перетворень отримаємо залежність:

$$t = 2\ln\left|\mathrm{tg}\frac{\tau}{4}\right|. \tag{5}$$

Виразимо із (5) $\tau(t) = 4\,\mathrm{arctg}\, e^{\frac{t}{2}}$ і підставимо у рівняння (4). Після перетворень отримаємо параметричні рівняння поверхні обертання циклоїди, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній:

$$X(t;v) = \frac{8ae^t}{\left(1+e^t\right)^2}\cdot\cos v; \qquad Y(t;v) = \frac{8ae^t}{\left(1+e^t\right)^2}\cdot\sin v; \qquad Z(t;v) = a\left(4arctg\left(e^{\frac{t}{2}}\right) + \frac{4e^{\frac{t}{2}}\left(e^t - 1\right)}{\left(1+e^t\right)^2}\right). \tag{6}$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми [7] поверхні обертання циклоїди, заданої параметричними рівняннями (6), мають вигляд: $E = G = \dfrac{64a^2e^{2t}}{\left(1+e^t\right)^4}$; $F = 0$. Тоді лінійний елемент поверхні обертання циклоїди (6), віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, можна записати у вигляді:

$$ds^2 = \frac{64a^2e^{2t}}{\left(1+e^t\right)^4}\cdot\left(dv^2+dt^2\right). \tag{7}$$

Розклавши на множники вираз (7) отримаємо:

$$ds^2 = \frac{64a^2e^{2t}}{\left(1+e^t\right)^4}\cdot\left(dv - i\cdot dt\right)\left(dv + i\cdot dt\right),$$

де $i-$ уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$v = i\cdot t + C \quad \text{або} \quad v = -i\cdot t + C, \tag{8}$$

де $C-$довільна стала інтегрування. Вирази (8) називають координатами Дарбу (Darboux) [7].

Лінійний елемент (8) поверхні обертання циклоїди визначає довжину будь-якої кривої, яка лежить на поверхні. Тому при підстановці одного із виразів (8) у параметричні рівняння (6) отримаємо параметричні рівняння сім'ї уявних ізотропних кривих нульової довжини. Зокрема, при підстановці виразу $v = i\cdot t + C$ у рівняння (6) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної кривої, яка лежить на поверхні обертання циклоїди:

$$x(t) = \frac{8ae^t}{\left(1+e^t\right)^2}\cdot\cos\left(i\cdot t + C\right); \quad y(t) = \frac{8ae^t}{\left(1+e^t\right)^2}\cdot\sin\left(i\cdot t + C\right); \quad z(t) = a\left(4\,\mathrm{arctg}\left(e^{\frac{t}{2}}\right) + \frac{4e^{\frac{t}{2}}\left(e^t-1\right)}{\left(1+e^t\right)^2}\right). \tag{9}$$

При знаходженні рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні для функцій комплексної змінної (9) уведемо заміну [7]: $t = u + i\cdot v$. Тоді отримаємо параметричні рівняння мінімальної поверхні $X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)$:

$$X(u,v) = \mathrm{Re}\{x(u+i\cdot v)\};\ Y(u,v) = \mathrm{Re}\{y(u+i\cdot v)\};\ Z(u,v) = \mathrm{Re}\{z(u+i\cdot v)\}; \tag{10}$$

та приєднаної мінімальної поверхні $X^*(u,v), Y^*(u,v), Z^*(u,v)$:

$$X^*(u,v) = \mathrm{Im}\{x(u+i\cdot v)\};\ Y^*(u,v) = \mathrm{Im}\{y(u+i\cdot v)\};\ Z^*(u,v) = \mathrm{Im}\{z(u+i\cdot v)\}. \tag{11}$$

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (9), маємо рівняння мінімальної поверхні ($C-$довільна стала):

$$\begin{gathered}
X(u,v) = \frac{2a\left[\cos(C-2v) + 2\cos(C-v)\cdot\mathrm{ch}(u) + \cos(C)\cdot\mathrm{ch}(2u)\right]}{\left(\cos v + \mathrm{ch}\,u\right)^2};\\
Y(u,v) = \frac{2a\left[\sin(C-2v) + 2\sin(C-v)\cdot\mathrm{ch}(u) + \sin(C)\cdot\mathrm{ch}(2u)\right]}{\left(\cos v + \mathrm{ch}\,u\right)^2};\\
Z(u,v) = 2a\cdot\mathrm{arctg}\frac{e^{\frac{u}{2}}\cdot\cos\frac{v}{2}}{1+e^{\frac{u}{2}}\cdot\sin\frac{v}{2}} + 2a\cdot\mathrm{arctg}\frac{e^{\frac{u}{2}}\cdot\cos\frac{v}{2}}{1-e^{\frac{u}{2}}\cdot\sin\frac{v}{2}} + \frac{4a\cdot\cos\frac{v}{2}\cdot\mathrm{sh}\frac{u}{2}\cdot\left(2-\cos v+\mathrm{ch}\,u\right)}{\left(\cos v+\mathrm{ch}\,u\right)^2};
\end{gathered} \tag{12}$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$\begin{gathered}
X^*(u,v) = -\frac{4a\cdot\mathrm{sh}(u)\cdot\left[\sin(C-v) + \sin(C)\cdot\mathrm{ch}(u)\right]}{\left(\cos v+\mathrm{ch}\,u\right)^2};\quad Y^*(u,v) = \frac{4a\cdot\mathrm{sh}(u)\cdot\left[\cos(C-v) + \cos(C)\cdot\mathrm{ch}(u)\right]}{\left(\cos v+\mathrm{ch}\,u\right)^2};\\
Z^*(u,v) = a\ln\left|\frac{1+e^u+2e^{\frac{u}{2}}\cdot\sin\frac{v}{2}}{1+e^u-2e^{\frac{u}{2}}\cdot\sin\frac{v}{2}}\right| + \frac{4a\cdot\cos\frac{u}{2}\cdot\mathrm{sh}\frac{v}{2}\cdot\left(2+\cos v-\mathrm{ch}\,u\right)}{\left(\cos v+\mathrm{ch}\,u\right)^2}.
\end{gathered} \tag{13}$$

На рис.1 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (12) і (13) відповідно при $C=0;\ u\in[1,3;\ldots2,8];\ \ v\in[1,4;\ldots5]$.

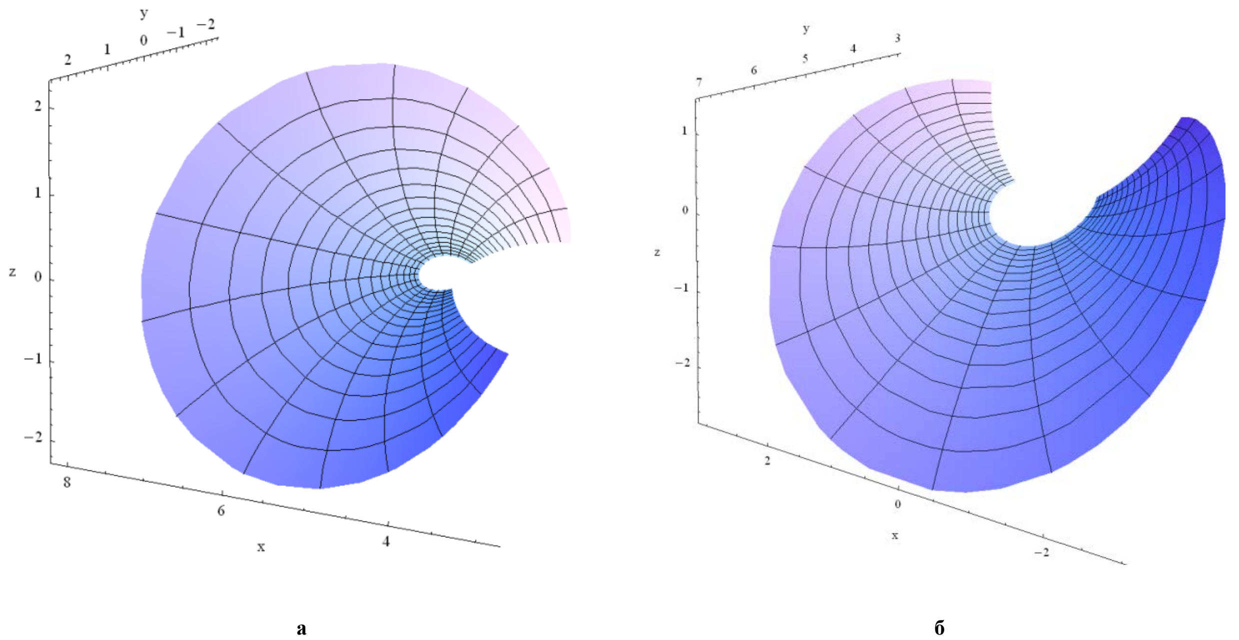

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди:
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (12);
б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (13).

Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (12) та приєднаної поверхні (13) дорівнюють:

$$E=G=\frac{64a^2e^{2u}\left(1+e^u\right)^2}{\left(1+e^{2u}+2e^u\cos v\right)^3};\ F=0. \tag{14}$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні (12), дорівнюють:

$$L=-N=-\frac{4a\cos\frac{v}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{u}{2}\left(\cos v+\operatorname{ch}u-2\cos v\cdot\operatorname{ch}u-2\right)}{\left(\cos v+\operatorname{ch}u\right)^3}. \tag{15}$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми приєднаної мінімальної поверхні (13), дорівнюють:

$$L^*=-N^*=-\frac{4a\sin\frac{v}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{u}{2}\left(\cos v+\operatorname{ch}u+2\cos v\cdot\operatorname{ch}u+2\right)}{\left(\cos v+\operatorname{ch}u\right)^3}. \tag{16}$$

Коефіцієнти першої та другої квадратичних форм мінімальних поверхонь (12) та (13), перетворюють вираз середньої кривини $H=\dfrac{E\cdot N-2\cdot F\cdot M+G\cdot L}{2(E\cdot G-F^2)}$, для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

Вираз (7) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2=\frac{64a^2e^{2t}}{\left(1+e^t\right)^4}\cdot\left(dt-i\cdot dv\right)\left(dt+i\cdot dv\right). \tag{17}$$

Прирівнюючи до нуля праву частину рівності (17), після інтегрування отримаємо:

$$t=i\cdot v+C\quad\text{або}\quad t=-i\cdot v+C\,. \tag{18}$$

Підставивши вирази (18) або вираз $v=-i\cdot t+C$, отриманий із рівностей (8), у параметричні рівняння поверхні обертання циклоїди (6), отримаємо рівняння ще трьох сімей уявних ізотропних кривих нульової довжини. Для кожного значення C за допомогою знайдених ізотропних кривих можна побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них. Але утворені мінімальні поверхні мають рівні коефіцієнти першої та другої квадратичних форм із мінімальними поверхнями (12) і (13) відповідно, тобто вони характеризуються спільними метричними властивостями та спільними властивостями кривини поверхні.

Висновки

На поверхні обертання циклоїди навколо її напрямної, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, для кожного значення C можна побудувати чотири сім'ї ізотропних кривих, і кожній кривій поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні.

Список використаної літератури

1. Расчёт оболочек сложной формы / [Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В.]. – К.: Будівельник, 1990. – 192 с.
2. Математическая энциклопедия / [гл.ред. И.М. Виноградов]. – Т.3.– М.: Изд–во «Советская энциклопедия», 1982.– С.683–690.
3. Михайленко В.Е. Конструирование форм современных архитектурных конструкций / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалёв. – Киев: Будівельник, 1978. – 112 с.
4. Абдюшев А.А. Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности / А.А. Абдюшев, И.Х. Мифтахутдинов, П.П. Осипов // Известия КазГАСУ. – 2009. – №2(12). – С. 86-92.
5. Пульпинский Я.С. Математическое моделирование оболочек вращения сложных форм: автореф. дисс. на соиск. уч. степени канд. техн. наук: спец. 05.13.18 "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" / Я.С. Пульпинский. – Пенза: Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, 2006. – 20 с.
6. Гацунаев М.А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / М.А. Гацунаев, Клячин А.А. //Уфимский математич. журнал. Т. 6. –2014.– №3.– С.3–16.
7. Фиников С.П. Теория поверхностей / Фиников С.П. – М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
8. Аушева Н.М. Геометричне моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 / Н. М. Аушева. – К.: КНУБА, 2014. – 38 с.
9. Чернишова Е.О. Використання функцій комплексного змінного для побудови поверхонь технічних форм: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Е.О. Чернишова. – К.: КНУБА, 2007. – 20 с.
10. Коровіна І.О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / І.О. Коровіна. – К.: КНУБА, 2012. – 20 с.
11. Муквич М.М. Конструювання мінімальних поверхонь за допомогою ізотропної кривої, яка лежить на конусі / М.М. Муквич // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". – Луцьк, видавництво Луцького національного технічного університету, 2015. – № 48. – С. 155–158.
12. Пилипака С.Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання астроїди / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016.– №6. – С. 91–95.
13. Несвидомин В.Н. Способ аналитического отображения плоских изображений на криволинейные поверхности / В.Н. Несвидомин, Т.С. Пилипака, Т.С. Кремец // «MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture».– Vol. 16, No 3. – Lublin – Rzeszov, 2014. – С. 58 – 65.