УДК 514.12

Е.В. СТЕГАНЦЕВ
Запорожский национальный университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ОБЛАСТЯМИ ПАРАМЕТРИЗОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ИХ ПРООБРАЗАМИ НА ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ

Рассматривается способ изучения зависимости между областями на поверхности и их прообразами в двумерном пространстве. Задача решается с использованием триангуляции Делоне.

Ключевые слова: параметризованная поверхность, образ, прообраз, плоскость параметров, триангуляция Делоне, описанная окружность, описанный эллипс, кривизна.

Є.В. СТЄГАНЦЕВ
Запорізький національний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ ОБЛАСТЯМИ ПАРАМЕТРИЗОВАНОЇ ПОВЕРХНІ ТА ЇХ ПРООБРАЗАМИ НА ПЛОЩИНІ ПАРАМЕТРІВ

Розглядається спосіб дослідження залежності між областями на поверхні та їх прообразами в двовимірному просторі. Задача розв'язується з використанням тріангуляції Делоне.

Ключові слова: параметризована поверхня, образ, прообраз, площина параметрів, тріангуляція Делоне, описане коло, описаний еліпс, кривина.

E.V. STEGANTSEV
Zaporozhye national university

THE STUDY OF THE CORRESPONDENCE BETWEEN THE DOMAINS ON THE PARAMETRIZED SURFACE AND THEIR INVERSE IMAGES ON THE PARAMETER PLANE

The technique of the study of the correspondence between the domains on the surface and their inverse images on the parameter plane has been considered. The problem has been solved with the help of the Delaunay triangulation.

Keywords: parametrized surface, image, inverse image, parameter plane, Delaunay triangulation, circumscribed circle, circumscribed ellipse, curvature.

Постановка проблемы

Известно, что в дифференциальной геометрии поверхность определяется как отображение некоторой двумерной области в трехмерное пространство [2]. Как правило, эта двумерная область (прообраз поверхности) снабжается декартовой координатной сетью, которая никак не характеризует саму поверхность. Возникает вопрос замены разбиения плоскости параметров координатной сетью другим разбиением, которое позволило бы сделать выводы о свойствах поверхности. Статья посвящена одному из способов исследования зависимости между заранее выбранными областями на поверхности и их прообразами на плоскости параметров. Этот способ основан на использовании триангуляции, предложенной известным советским математиком Делоне [1]. Такое разбиение поверхности на треугольники широко применяется в компьютерной графике, однако при проверке условия Делоне в трехмерном случае возникают определенные затруднения. Их удается избежать, если перейти от триангуляции поверхности трехмерного пространства к соответствующей триангуляции ее двумерного прообраза.

Анализ последних исследований и публикаций

В работах [3, 5] описана триангуляция Делоне и приведены три способа проверки условия Делоне. При переходе из трехмерного пространства в двумерное, приходится использовать некоторые аппроксимации, допустимость которых обоснована, например, в работе [4]. В этой же статье описан алгоритм корректировки заданной на поверхности триангуляции до триангуляции, удовлетворяющей условиям Делоне, и приведены примеры триангуляций некоторых поверхностей.

Формулирование цели исследования

Описать математические основы предложенного в статье [4] способа триангуляции поверхности, при котором учитываются дифференциально-геометрические свойства поверхности. Привести пример.

Изложение основного материала исследования

Будем считать, что в трехмерном пространстве задана поверхность и известны криволинейные координаты точек, осуществляющих некоторую триангуляцию этой поверхности. Отметим, что для каждого треугольника триангуляции однозначно определена описанная вокруг него окружность. Нашей задачей является проверка условий Делоне этой триангуляции. Для упрощения проверки перейдем в плоскость параметров. Для этого найдем прообразы окружностей, описанных вокруг всех треугольников триангуляции, ими будут эллипсы, для построения которых нужно пять параметров [4].

Пусть в плоскости параметров задана (u,v) - сеть. Будем пользоваться следующими параметрическими уравнениями эллипса

$$u = u_C + A\cos t \cdot \cos\alpha - B\sin t \cdot \sin\alpha\ ,\ v = v_C + A\cos t \cdot \sin\alpha - B\sin t \cdot \cos\alpha\ ,$$

где u_C, v_C - координаты центра C, A и B - длины большой и малой полуосей соответственно. Большая ось эллипса наклонена под углом α к горизонтальному направлению u, а t - параметр. Таким образом, если будут найдены u_C, v_C, A, B и α, мы сможем построить эллипс.

Исключив t из приведенных параметрических уравнений, получим неявное уравнение эллипса

$$k^2\left((u-u_C)^2\sin^2\alpha - (u-u_C)(v-v_C)\sin 2\alpha + (v-v_C)^2\cos^2\alpha + (v-v_C)^2\cos^2\alpha\right) +$$
$$+ (u-u_C)^2\cos^2\alpha + (v-v_C)^2\sin^2\alpha + (u-u_C)(v-v_C)\sin 2\alpha - D = 0\ ,$$

где $k = A/B$, а $D = A^2B^2$.

Подставляя в это уравнение криволинейные координаты трех точек заданной на поверхности триангуляции, получим три условия на искомые параметры. Для вычисления величины k можно поступить следующим образом. Обозначим через k_i, $i = 1,2,3$ величину, равную отношению длины стороны треугольника к высоте соответствующего ей сегмента окружности. Максимальная и минимальная из этих величин приближенно характеризуют те свойства поверхности, которые в дифференциальной геометрии называют главными кривизнами, а их отношение определяет k. Соответствующая максимальному значению k_i сторона треугольника определит направление главной кривизны, которое даст значение параметра α. Таким образом, из указанных трех уравнений можем найти u_C, v_C, D, а затем из уравнений $k = A/B$ и $D = A^2B^2$ найти полуоси A и B.

Пусть полусфера задана в векторно-параметрическом виде следующим образом

$$\bar{r}(u,v) = (\cos u \cdot \cos v, \cos u \cdot \sin v, \sin u),$$

где u - угол поворота в плоскости XOY, v - угол между лучом OM и плоскостью XOY, $u \in (0, 2\pi)$, $v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. В качестве узлов триангуляции возьмем следующие точки: $M_1(1,0)$, $M_2\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $M_3\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Они определяют три треугольника $M_1M_2M_3$, $M_1M_3M_4$, $M_1M_4M_5$ как показано на рисунке 1.

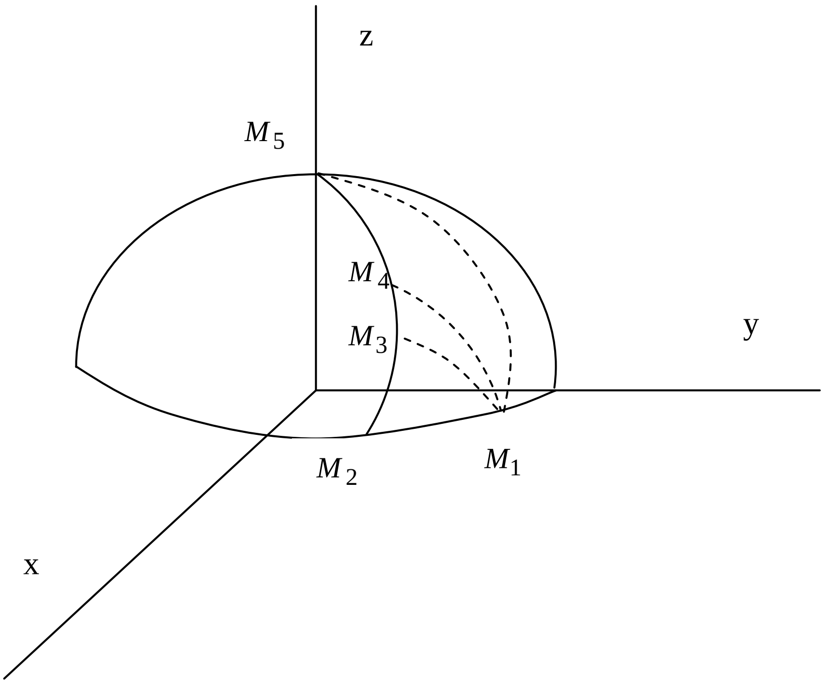

Рисунок 1. Фрагмент триангуляции полусферы

Опишем вокруг каждого треугольника окружность и найдем их прообразы на плоскости параметров. Согласно [4], каждый прообраз может быть аппроксимирован функцией эллипса.

Рассмотрим, например, треугольник $M_1M_2M_3$. Предварительно вычислив $k = 0.3535533905$ и $\alpha = 1$, подставим эти значения и координаты точек M_1, M_2 и M_3 в неявное уравнение эллипса. Получим систему уравнений для нахождения параметров эллипса. Решив эту систему, получим следующие результаты: координаты центра эллипса $u_C = -1.454756733$, $v_C = 1.651287634$; $D = 0.9240715578$.

Поскольку $k = \dfrac{A}{B}$ и $D = A^2B^2$, подставляя найденные выше значения k и D, получим значения длин большей и меньшей полуосей искомого эллипса: $A = 1.12362586$ и $B = 2.809064654$.

Выводы

В статье описаны математические основы способа триангуляции поверхности с учетом дифференциально-геометрических свойств поверхности. Приведен пример вычисления требуемых параметров.

Список использованной литературы

1. Местецький .М Триангуляция Делоне: рекурсия без пространственного разбиения точек / Л.М. Местецький, Е.В Царик., Тверской национальный университет, Тверь, Россия, 2004 год, 4 ст.
2. Позняк Э.Г. Дифференциальная геометрия: первое знакомство [Текст]/ Э.Г. Позняк, Е.В. Шишкин, М.: изд-во МГУ, 1990, 384с.
3. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение [Текст]/ А.В. Скворцов - Томск: Изд-во Том.ун-та, 2002 ,-128с.
4. Hao Chen, Delaunay Triangulation for Curved Surfaces, [Текст]/Hao Chen, Jonathan Bishop, MARC Analysis Research Corporation.
5. Скворцов А.В. Эффективные алгоритмы построения триангуляции Делоне [Текст] / А.В. Скворцов, Ю.Л. Костюк Геоинформатика. Теория и практика. Вып. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. С. 22–47.