

УДК 519.6

С.В. ЧОПОРОВ, С.И. ГОМЕНЮК, А.А. ЛИСНЯК, М.А.В. АЛЬ-ОМАРИ  
Х.Х.М. АЛАТАМНЕХ

Запорожский национальный университет

**ТРИАНГУЛЯЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ГИБРИДНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ И НЕЯВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ**

*В численном анализе часто возникает необходимость построения дискретных моделей поверхностей геометрических объектов. Как правило, такие модели строятся в двумерном параметрическом пространстве. При этом поверхности объектов могут обладать сложной конфигурацией границ (например, технологические вырезы). В таком случае для представления границ могут быть использованы неявные функции. Таким образом, в статье предложен подход к построению дискретных моделей поверхностей при их гибридном параметрическом и неявном представлении, который учитывает кривизну поверхности и ее границы.*

*Ключевые слова: триангуляция, поверхность, неявная функция, параметрическая функция, дискретная модель*

С.В. ЧОПОРОВ, С.І. ГОМЕНЮК, А.О. ЛІСНЯК, М.А.В. АЛЬ-ОМАРИ  
Х.Х.М. АЛАТАМНЕХ

Запорізький національний університет

**ТРИАНГУЛЯЦИЯ ПОВЕРХОНЬ ПРИ ГИБРИДНОМУ ПАРАМЕТРИЧНОМУ ТА НЕЯВНОМУ ПОДАННІ**

*У чисельному аналізі часто виникає необхідність побудови дискретних моделей поверхонь геометричних об'єктів. Як правило, такі моделі будуються у двовимірному параметричному просторі. При цьому поверхні об'єктів можуть мати складну конфігурацію границь (наприклад, технологічні отвори). У такому випадку для подання границь можна використовувати неявні функції. Таким чином, у статті запропоновано підхід до побудови дискретних моделей поверхонь при їх гібридному параметричному та неявному поданні, який враховує кривину поверхні та її границь.*

*Ключові слова: триангуляція, поверхня, неявна функція, параметрична функція, дискретна модель.*

S.V. CHOPOROV, S.I. GOMENYUK, A.A. LISNYAK, M.A.V. AL-OMARI,  
H.K.M. AL-ATHAMNEH

Zaporizhzhya National University

**SURFACE TRIANGULATION USING HYBRID PARAMETRIC AND IMPLICIT REPRESENTATION**

*Surface triangular meshing is an actual problem in the areas of computer graphics and numerical analysis. Typically, a surface is specified by a parametric equation. Meshes are being generated in a 2D parameter space and mapped to a surface. Some surfaces have very geometrically and topologically complex borders (e.g. holes, perforations, etc.). In this case, implicit functions can be used to define borders of a surface. Thus, this paper describes a new approach to triangular meshing for hybrid parametrically and implicitly represented surfaces. A curvature is used to control meshing process.*

*Keywords: triangulation, surface, implicit function, parametric function, discrete model.*

**Постановка проблеми**

Триангуляция поверхностей является актуальной задачей, возникающей в компьютерной графике, численном анализе (например, для исследования устойчивости оболочек), геоинформационных системах и т. п. Как правило, под триангуляцией некоторой непрерывной области понимается её разбиение на конечное множество непересекающихся подобластей треугольной формы. Проблема построения триангуляции состоит в отыскании такого множества треугольников, стороны которых будут аппроксимировать границы области, а сами треугольники удовлетворяют некоторым наперед заданным геометрическим требованиям (например, ограничения на минимальный угол или площадь треугольника).

Модели многих объектов могут быть представлены оболочками, поверхности которых заданы параметрическими функциями (например, цилиндрические, конические, поверхности Безье и т. п.). В таком случае триангуляция может быть относительно просто построена в двумерном параметрическом пространстве и затем отображена на поверхность объекта. Однако, некоторые объекты (например, оболочки элементов ракет-носителей) могут обладать весьма сложными границами (например, технологическими вырезами). Для представления моделей таких объектов часто используют систему ограничивающих

оболочек, но ее получение достаточно трудный процесс. Упростить их моделирование может использование неявных функций, которые могут быть «сконструированы» на базе теории R-функций академика Рвачева В. Л., превратив, таким образом, представление оболочки в гибридное. При этом проблема построения дискретных моделей усложняется тем, что в двумерном параметрическом пространстве необходимо учесть ограничения, заданные неявными функциями в трехмерном пространстве. Таким образом, данная статья посвящена исследованию проблемы построения дискретных моделей на базе треугольных элементов для сложных геометрических объектов, представленных гибридно: при помощи параметрического и неявного представлений.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Сегодня достаточно хорошо развиты методы построения триангуляции, удовлетворяющей критерию Делоне, для исходного множества точек на плоскости, детальный анализ которых можно найти в работах [1-2]. Также разработаны способы и методы построения триангуляции Делоне плоских областей, представленных многоугольниками или планарными графами с ограничениями, среди которых можно выделить итерационные [3-5], фронтальные [6-7] и основанные на фоновой сетке [8-10]. Наиболее распространенные подходы к построению триангуляции поверхности основаны на идее построения сетки в двумерном параметрическом пространстве с последующим отображением на поверхность. Тем не менее, качественной триангуляции, построенной в двумерном параметрическом пространстве, не обязательно будет соответствовать качественная сетка, состоящая из треугольников, расположенных на поверхности.

В работах [11-12] рассмотрены особенности использования отображений для построения триангуляций полностью составных параметрических поверхностей, состоящих из линейных и квадратичных форм, B-сплайновых поверхностей. Для улучшения качества сетки предложены техники перестановки узлов (swar) и сглаживания Лапласа.

Также разработаны методы, основанные на использовании подвижного фронта [13-15]. Как и в двумерном случае, исходными данными является дискретная модель границ (ребра) поверхности, внутренняя часть которой заполняется слой за слоем. В работах [14-15] предложены метрики для управления процессом построения фронта и схема использования фоновой сетки на базе метода Quadtree для улучшения качества дискретной модели. Схожая с подвижным фронтом идея заполнения поверхности «бегущими» (marching) треугольниками с предварительным преобразованием представления поверхности из параметрического в неявное рассмотрена в [16]. Методы, основанные на подвижном фронте позволяют строить сетки высокого качества, однако, их основным недостатком является необходимость предварительной дискретизации границ и высокая сложность процедуры предотвращения пересечения фронтов.

Ряд работ основан на идее адаптации метода Рапперта [4] для построения триангуляции Делоне поверхности. Ключевой здесь является разработка способов проверки выполнения условия попадания в описанную окружность для трехмерного треугольника и отображения ее центра в параметрическое пространство. Одна из первых таких работ [17] основана на непосредственной проверке выполнения попадания в описанную окружность в 3D. Такая проверка с вычислительной точки зрения является весьма экстенсивной, поэтому часто используют различные схемы аппроксимации. Например, в [18] предложена схема использования главных кривизн для аппроксимации описанной окружности поверхностного треугольника двумерным эллипсом в параметрическом пространстве; в [19] предложен подход, основанный на использовании сфер.

Альтернативным параметрическому представлению поверхностей, как правило, является неявное. Методы построения триангуляции поверхностей, определенных неявными функциями, можно условно разделить на три группы: ячеечные [20], бегущих треугольников [21] и методы на основе тесселяции [22].

Таким образом, анализ публикаций показал, что разработка методов построения дискретных моделей поверхностей является актуальной проблемой, при этом исследования в основном сосредоточены на построении триангуляций поверхностей, представленных параметрически или неявно. Однако, все еще менее исследованы особенности триангуляции поверхностей при гибридном параметрическом и неявном представлении.

#### Формулирование цели исследования

Пусть поверхность некоторого объекта представлена параметрически в векторной форме

$$R = \left\{ \begin{matrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{matrix} \right\} = R(u, v), \quad (1)$$

где  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  и  $z(u, v)$  – функции, непрерывные в прямоугольнике  $P = \{(u, v) / a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$  (рис. 1).

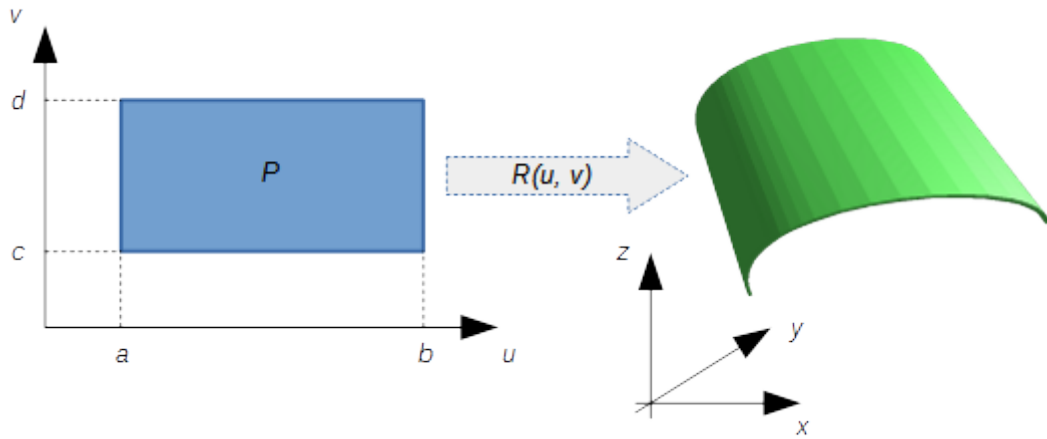


Рис. 1. Параметрическое представление поверхности

Предположим, что также определена функция  $F(x, y, z)$ , которая больше нуля во внутренних точках поверхности, равна нулю на границе и, соответственно, меньше нуля во внешних точках. Такая функция может быть построена «конструктивно», используя аппарат теории R-функций академика В. Л. Рвачева. Например, функция

$$circle_z(x, y, r) = r^2 - x^2 - y^2 \tag{2}$$

соответствует области, ограниченной окружностью радиуса  $r$  с центром в начале координат, при двумерной постановке или части пространства, ограниченной бесконечным цилиндром с образующей, совпадающей с осью  $Oz$ , в трехмерной постановке. Более сложные неявные функции могут быть определены при помощи систем R-функций [23-25], из которых одна из наиболее распространенных имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \neg x \equiv -x; \\ x \wedge y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}; \\ x \vee y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда, например, функция

$$f_1(x, y, z, r_x, r_y) = -\left[ (r_x^2 - y^2 - z^2) \vee (r_y - x^2 - z^2) \right]$$

будет положительной в точках пространства, находящихся вне объединения двух бесконечных цилиндров: первого с радиусом  $r_x$  и образующей, совпадающей с осью  $Ox$ , второго с радиусом  $r_y$  и образующей, совпадающей с  $Oy$ . Подобные функции могут быть использованы для моделирования различных отверстий или сложных границ параметрических поверхностей. В результате используемое представление становится гибридным.

Таким образом, целью исследования является разработка метода построения триангуляции поверхностей, представленных гибридно параметрически и неявно.

**Изложение основного материала исследования**

Пусть даны  $R(u, v)$  – параметрическое представление поверхности в векторной форме вида (1) с областью определения  $P = \{(u, v) / a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$  и функция  $F(x, y, z)$ , которая больше во внутренних точках поверхности моделируемого объекта. Структурно метод построения триангуляции такой поверхности можно представить тремя последовательными этапами: I – построение дискретной модели границ поверхности, II – построение начальной триангуляции, III – оптимизация триангуляции.

Определим операцию расстояния между двумя точками как

$$d(p, q) = \|R(p) - R(q)\|, \tag{4}$$

где  $p$  и  $q$  – координаты точек в параметрическом пространстве ( $p, q \in P$ ).

Также определим функцию

$$W(u, v) = F(R(u, v)) \wedge \left[ \frac{(b-a)^2}{4} - \left(u - \frac{a+b}{2}\right)^2 \right] \wedge \left[ \frac{(d-c)^2}{4} - \left(v - \frac{d+c}{2}\right)^2 \right], \tag{5}$$

которая больше или равна нулю только во внутренних точках для функции  $F(x, y, z)$  прямоугольника  $P$ . Для дальнейшего построения сетки будем использовать эту функцию.

I. Построение дискретной модели границ поверхности

Дискретной моделью границы будем считать пару множеств  $V_b = \{(u, v), u \in [a; b], v \in [c; d]\}$  и

$E_b = \{(w_1, w_2), w_1 \in V_b, w_2 \in V_b\}$  – соответственно, вершины и ребра (упорядоченные пары – связи между вершинами). Целью данного этапа является построение этих двух множеств. Для этого разобьем прямоугольник на фоновые ячейки (в общем случае неравномерно). В результате анализа возможных вариантов взаимного расположения фоновых ячеек и границ каждую ячейку можно отнести к одной из четырех групп (рис. 2, черным обозначены узлы, в которых функция  $W(u, v)$  больше нуля): А – отсутствует пересечение с границами, В – граница отделяет один узел, С – граница отделяет два соседние узла, D – граница отделяет два противоположные узла. Всего таких конфигураций с учетом поворота будет 16. Конфигурации группы D приводят к неоднозначности (пример представлен на рис. 2), устранить которые можно, например, дополнительным сгущением фоновой сетки в их окрестности. Таким образом, получим следующую последовательность действий

1. Для прямоугольника  $P$  построить фоновую сетку.
2. Для каждой ячейки фоновой сетки:
  - 2.1. Определить конфигурацию взаимного расположения с границей.
  - 2.2. Если ячейка принадлежит к группе А, то перейти к следующей ячейки.
  - 2.3. Если ячейка принадлежит группе D, то разбить ее на четыре части и перейти к шагу 2.
  - 2.4. Если ячейка принадлежит группам В или С:
    - 2.4.1. Найти ребро  $e = (w_1, w_2)$ , аппроксимирующее участок границы.
    - 2.4.2. Добавить вершины  $w_1$  и  $w_2$  в множество  $V_b$ , добавить ребро  $e$  в множество  $E_b$ .
3. Для каждого ребра  $e = (w_1, w_2) \in E_b$ :
  - 3.1. Если  $d(e) = d(w_1, w_2) < \delta(u, v)$ :
    - 3.1.1. Удалить ребро  $e$  из множества  $E_b$ .
    - 3.1.2. Установить  $w_1 = w_2$  и удалить вершину  $w_2$  из множества  $V_b$ .

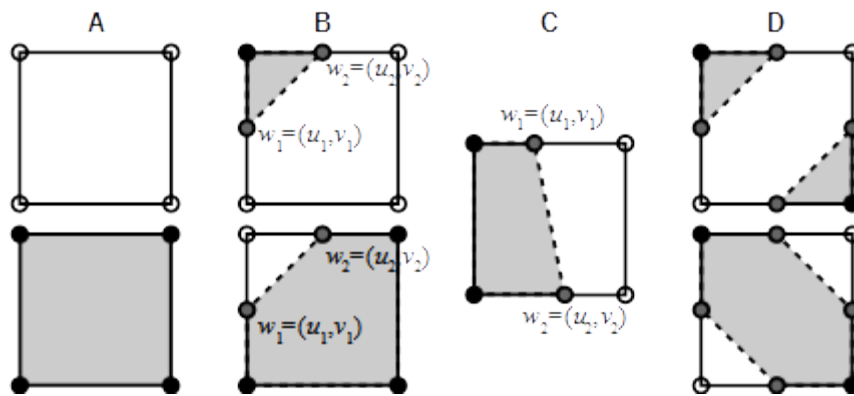


Рис. 2. Взаимное расположение ячеек фоновой сетки и границы области в параметрическом пространстве

Последний шаг данного этапа, по сути, является сглаживающим. Он позволяет удалить слишком маленькие ребра, полученные в результате сканирования фоновыми ячейками. Функция-параметр  $\delta(u, v)$  в общем случае произвольная зависящая от координат. На практике в качестве простейшей такой функции может быть использован один из линейных размеров фоновой ячейки (например, можно определить функцию для удаления ребер, трехмерная длина которых меньше 40% аналогичной длины диагонали фоновой ячейки).

### II. Построение начальной триангуляции

В качестве начальной триангуляции можно принять триангуляцию Делоне, построенную в параметрическом пространстве. Для ее построения можно воспользоваться любым двумерным методом (например, методом суперобласти) с приблизительной проверкой критерия описанной окружности. Естественно, что двумерная триангуляция Делоне, построенная в параметрическом пространстве, не обязательно будет сохранять соответствие критерию Делоне, после отображения сетки на поверхность.

### III. Оптимизация триангуляции

Ключевой особенностью данного этапа является способы проверки условия Делоне и нахождения точки в параметрическом пространстве, соответствующей центру описанной вокруг трехмерного треугольника окружности (рис. 3).

#### 1. Процедура проверки условия Делоне

Пусть для треугольника, определенного вершинами  $A_3 = R(A)$ ,  $B_3 = R(B)$  и  $C_3 = R(C)$ , необходимо проверить условие попадания в описанную окружность точки  $P_3 = R(P)$ . Для решения этой задачи будем использовать цилиндр, построенный на базе описанной окружности, с длиной образующей  $L = 2l$  (рис. 3).

Построим местную систему координат  $x' y' z'$ , ось начало которой (точка  $O'$ ) совпадает с точкой  $A_3$ , ось  $O' x'$  со стороной  $A_3 B_3$  и ось  $O' z'$  является нормалью к плоскости треугольника. Связь между местной системой координат и глобальной системой координат будет определяться соотношением

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \Lambda \begin{Bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где  $\Lambda$  – матрица поворота (направляющих косинусов) системы координат.

В местной системе координат аппликата точек  $A_3'$ ,  $B_3'$  и  $C_3'$ , очевидно, будет равна нулю. Будем считать, что точка  $P_3$  попадает в описанную окружность, если  $P_3' = \begin{Bmatrix} x'_P \\ y'_P \\ z'_P \end{Bmatrix}$  (ее координаты в местной системе координат) попадают в окружность, описанную для треугольника  $A_3' B_3' C_3'$ , и при этом выполняется условие  $-l \leq z'_P \leq l$ , где  $l$  – отклонение поверхности от плоскости треугольника (максимальное расстояние от треугольника до поверхности в направлении его нормали).

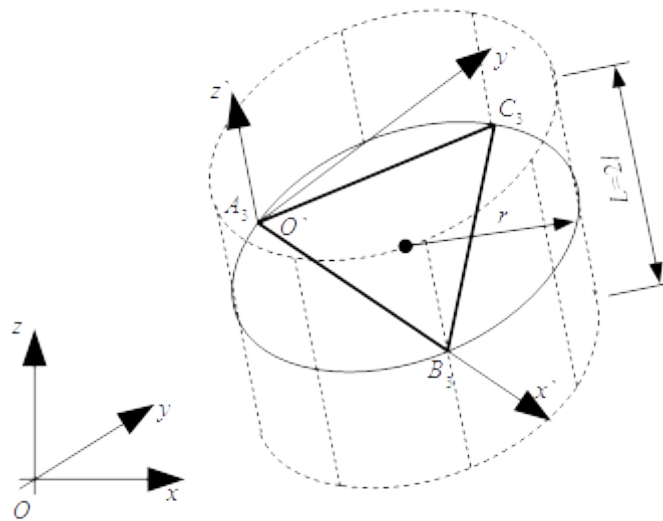


Рис. 3. Схема проверки критерия Делоне на поверхности

2. Процедура поиска центра описанной окружности

Пусть  $E'_3$  – координаты центра описанной окружности в местной системе координат, тогда координаты соответствующей точки в параметрическом пространстве могут быть найдены в результате решения оптимизационной задачи:

$$E = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \min_{p=\{u,v\}^T} d(p, E_3), \quad (7)$$

где  $E_3 = A_3 + \Lambda E'_3$  – координаты центра описанной окружности в глобальной системе координат.

Таким образом, метод оптимизации триангуляции будет близок к методу Рапперта [4] с адаптированными для работы с поверхностным треугольником процедурами: для каждого треугольника, который не удовлетворяет требованиям, будем находить точку для вставки в соответствии с процедурой (7) и добавлять ее в триангуляцию по описанной схеме проверки условия Делоне. Будем считать, что треугольник не удовлетворяет требованиям, если один из его углов меньше заданного значения или, если кривизна поверхности слишком высока. Для приблизительной проверки последнего условия можно заменить кривизну отношением трехмерной длины ребра треугольника к длине трехмерной дуги, которую это ребро аппроксимирует.

Например, поверхность Безье может быть представлена известной формулой

$$p(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) P_{i,j}, \quad (8)$$

где  $P_{i,j}$  – контрольные точки;  $B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}$  – многочлены Бернштейна. Круглое отверстие

в этой поверхности, может быть определено неявной функцией  $f_2(x, y, z) = r_x^2 - y^2 - z^2$  (рис. 4).

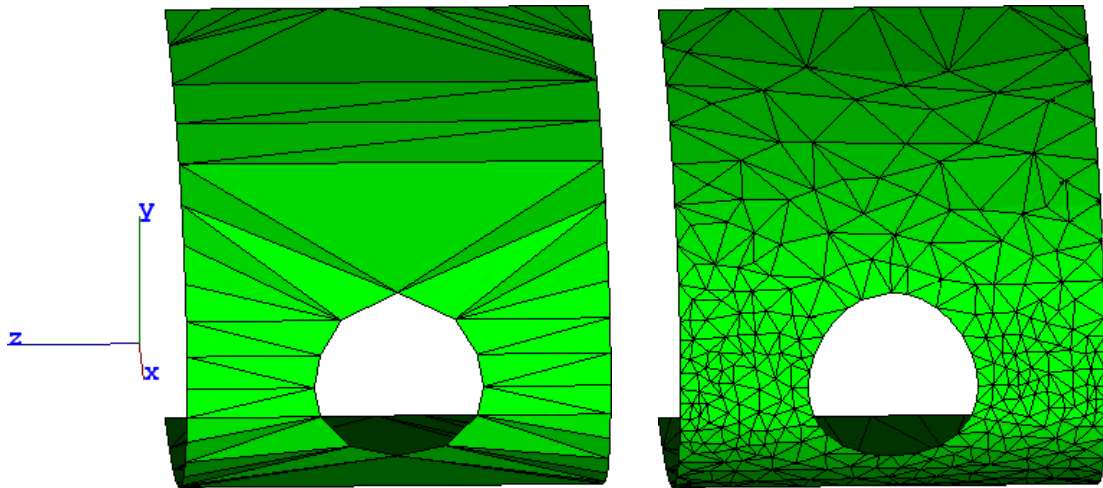


Рис. 4. Поверхность Бэзе: контрольные точки: (0, -1, -1), (0, -1, -0.5), (0, -1, 0.5), (0, -1, 1), (4, -1, -1), (4, -1, -0.5), (4, -1, 0.5), (4, -1, 1), (4, 1, -1), (4, 1, -0.5), (4, 1, 0.5), (4, 1, 1), (0, 1, -1), (0, 1, -0.5), (0, 1, 0.5), (0, 1, 1);  $r_1 = 0.4$

Межступенной отсек ракеты-носителя (рис. 5) является конической поверхностью и может быть представлен параметрически в виде

$$\begin{cases} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{cases} = \begin{cases} r(u)\cos(v) \\ u \\ r(u)\sin(v) \end{cases}, \tag{9}$$

где  $r(u) = r_1 + (r_2 - r_1)\frac{u}{l}$ ;  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы оснований;  $l$  – длина образующей;  $u \in [0; l]$ ;  $v \in [0; 2\pi]$ .

Отверстия межступенного отсека могут быть представлены объединением (дизьюнкцией) прямоугольников со скругленными углами и цилиндров с ограничением (за счет использования конъюнкции) по оси  $Oz$ .

$$f_{mso}(x, y, z) = \neg\{srect(x_1, y - h_1, a_1, a_1, r_1) \vee srect(x_2, y - h_1, a_1, a_1, r_1) \vee srect(x_3, y - h_2, a_1, a_2, r_2) \vee [srect(x_4, y - h_4, a_3, a_4, r_3) \wedge z_4] \vee [srect(x_5, y - h_4, a_5, a_6, r_4) \wedge z_5] \vee [srect(x_6, y - h_5, a_7, a_8, r_5) \wedge z_6] \vee [circle_z(x_7, y - h_3, r_6), z_7]\},$$

где

$$\begin{aligned} srect(x, y, w, h, r) &= rect(x, y, w - 2r, h) \vee rect(x, y, w, h - 2r) \vee \\ &\vee circle_z\left(x - \frac{w}{2} + r, y - \frac{h}{2} + r, r\right) \vee circle_z\left(x + \frac{w}{2} - r, y - \frac{h}{2} + r, r\right) \vee \\ &\vee circle_z\left(x + \frac{w}{2} - r, y + \frac{h}{2} - r, r\right) \vee circle_z\left(x - \frac{w}{2} + r, y + \frac{h}{2} - r, r\right); \\ rect(x, y, w, h) &= \left(\frac{w^2}{4} - x^2\right) \wedge \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right); \\ x_i(x) &= x\cos(\alpha_i) + z\sin(\alpha_i); \\ z_i(x) &= -x\sin(\alpha_i) + z\cos(\alpha_i), \end{aligned}$$

параметры  $a_i$ ,  $r_i$  и  $h_i$  – соответственно, линейные размеры, радиусы скруглений и отступы отверстий от нижнего основания;  $\alpha_i$  – углы поворота отверстия в чертеже развертки отсека.

### Выводы

Таким образом, основным научным результатом работы является новый метод для построения дискретных моделей сложных оболочек. В отличие от существующих работ для проверки условий Делоне и поиска точек вставки нового узла использован цилиндр, построенный в местной системе координат. Такой подход более экстенсивный, чем, например, предложенный в [18] способ аппроксимации, но позволяет более точно находить точки для вставки на поверхностях с быстро изменяющейся кривизной и при этом не требует решения системы нелинейных уравнений для нахождения аппроксимации.

Одновременное использование параметрического представления с неявными функциями является весьма гибким и универсальным инструментом, который позволяет определять сложные конфигурации отверстий и границ оболочек.

Данная работа выполнена при поддержке и в творческом сотрудничестве с государственным предприятием «КБ «Южное» им. М. К. Янгеля».



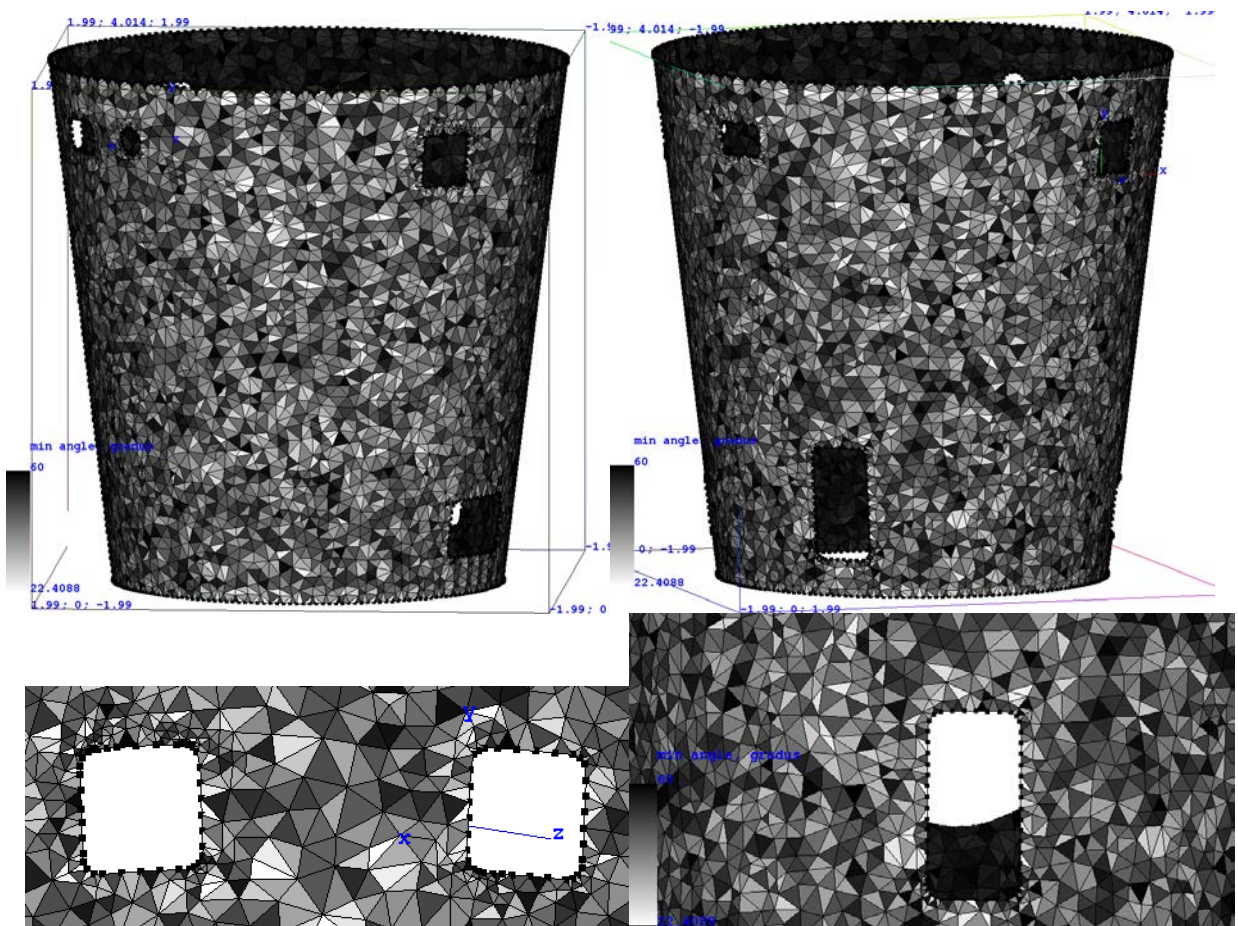


Рис. 5. Поверхність МСО: розподілення значень мінімальних кутів в трикутниках

#### Список использованной литературы

1. Скворцов А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – № 3. – С. 14-39.
2. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и её применение / А. В. Скворцов. – Томск: Издательство Томского университета, 2002. – 128 с.
3. Bern M. Triangulating polygons without large angles / M. Bern, D. Dobkin, and D. Eppstein // International Journal of Computational Geometry & Applications. – 1995. – Volume 5. – P. 171-192.
4. Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation / J. Ruppert // Journal of Algorithms. – 1995. – Volume 18, Issue 3. – P. 548-585.
5. Tournois J. Interleaving Delaunay Refinement and Optimization for 2D Triangle Mesh Generation / J. Tournois, P. Alliez, O. Devillers // The 16<sup>th</sup> International Meshing Roundtable : International Conference, Washington, 14-17 October 2007 : proceedings. – Washington: Springer, 2008. – P. 83-101.
6. Mavriplis D. An advancing front Delaunay triangulation algorithm designed for robustness / D. J. Mavriplis // Journal of Computational Physics. – 1995. – Volume 117, Issue 1. – P. 90-101.
7. Silva C. T. Greedy Cuts: An Advancing Front Terrain Triangulation Algorithm / C. T. Silva, J. S. B. Mitchell // The 6<sup>th</sup> ACM International Symposium on Advances in Geographic Information Systems : International Conference, Washington, 2-7 November 1998 : proceedings. – Washington: ACM, 1998. – P. 137-144.
8. Naumann U. Combinatorial Scientific Computing / [edited by] U. Naumann, O. Schenk. – Boca Raton, Florida: CRC Press, 2012. – 600 p.
9. Cheng S.-W. Delaunay Mesh Generation / S.-W. Cheng, T. K. Dey, J. R. Shewchuk. – Boca Raton, Florida: CRC Press, 2012. – 387 p.
10. Samet H. The Quadtree and Related Hierarchical Data Structures / H. Samet // ACM Computing Surveys. – 1984. – Volume 16, Issue 2. – P. 187-260.
11. Zheng Y. Three-dimensional unstructured mesh generation: Part 1. Fundamental aspects of triangulation and point creation / Y. Zheng, R. W. Lewis, D. T. Gethin // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1996. – vol. 134. – P. 249-268.
12. Zheng Y. Three-dimensional unstructured mesh generation: Part 2. Surface Meshes / Y. Zheng, R. W. Lewis, D. T. Gethin // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1996. – vol. 134. – P. 269-284.

13. Lau T. S. Finite Element Mesh Generation over Analytical Curved Surfaces / T. S. Lau, S. H. Lo // *Computers & Structures*. – 1996. – vol. 59, No. 2. – P. 301-309.
14. Miranda A. C. O. Mesh Generation on High-curvature Surfaces Based on a Background Quadtree Structure / A. C. O. Miranda, L. F. Martha // *11<sup>th</sup> International Meshing Roundtable : International Conference, Ithaca, New York, USA, 15-18 September 2002 : proceedings*. – Ithaca: Springer-Verlag, 2002. – P. 333-342.
15. Miranda A. C. O. Finite Element Mesh Generation for Subsurface Simulation Models / A. C. O. Miranda, W. W. M. Lira, R. C. Marques, A. M. B. Pereira, J. B. Cavalcante-Neto, L. F. Martha // *Engineering with Computers*. – 2015. – vol. 31, iss. 2. – P. 305-324. – DOI 10.1007/s00366-014-0352-3
16. Hartmann E. A Marching Method for the Triangulation of Surfaces / E. Hartmann // *The Visual Computer*. – 1998. – vol. 14. – P. 95-108.
17. Chew L. P. Guaranteed-Quality Mesh Generation for Curved Surfaces / L. P. Chew // *The 9<sup>th</sup> Annual Symposium on Computational Geometry : International Conference, New York, NY, USA, 18-21 May 1993 : proceedings*. – New York: ACM, 1993. – P. 274-280.
18. Chen H. Delaunay Triangulation for Curved Surfaces / H. Chen, J. Bishop // *6<sup>th</sup> International Meshing Roundtable : International Conference, Park City, UT, USA, 13-15 October 1997 : proceedings*. – Sandia: Sandia National Laboratories, 1997. – P. 115-127.
19. Ruiz O. E. Gabriel-constrained Parametric Surface Triangulation / O. E. Ruiz, C. Cadavid, J. G. Lalinde, R. Serrano, G. Peris-Fajarnés // *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*. – 2008. – vol. 2, No 8. – P. 568-575.
20. Lorensen W. E. Marching Cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm / W. E. Lorensen, H. E. Cline // *Computer Graphics*. – 1987. – vol. 21, iss. 4. – P. 163-169.
21. Akkouche S. Adaptive Implicit Surface Polygonization using Marching Triangles / S. Akkouche, E. Galin // *Computer Graphics Forum*. – 2001. – vol. 20, iss. 2. – P. 67-80.
22. Crespin B. Efficient and Accurate Tessellation of Implicit Sweep Objects / B. Crespin, P. Guitton, C. Schlick // *Constructive Solid Geometry*. – 1998. – P. 49-63.
23. Рвачев В.Л. Введение в теорию R-функций / В.Л. Рвачев, Т.И. Шейко // *Проблемы машиностроения*. – 2001. – Т. 4, № 1–2. – С. 46-58.
24. Максименко-Шейко К.В. R-функции и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве / К. Максименко-Шейко, А.М. Мацевитый, А.В. Толок, Т.И. Шейко // *Информационные технологии*. – 2007. – № 10. – С. 23-32.
25. Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов в 3D по информации в 2D / К.В. Максименко-Шейко, Т.И. Шейко // *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки*. – 2010. – No 1. – С. 98-104.