УДК 510.8

Є.Є. САМОЙЛЕНКО
Чорноморський національний університет ім. Петра Могили

НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто алгоритм пошуку розв'язків невизначених звичайних, функціональних та операторних систем лінійних рівнянь методами оберненої матриці та редукції систем лінійних рівнянь.

Ключові слова: невизначені системи, лінійні рівняння, редукція, функціональні системи, операторні системи

Е.Е. САМОЙЛЕНКО
Черноморский национальный университет им. Петра Могилы

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрен алгоритм поиска решений неопределённых обычных, функциональных и операторных систем линейных уравнений методами обратной матрицы и редукции систем линейных уравнений.

Ключевые слова: неопределённые системы, линейные уравнения, редукция, функциональные системы, операторные системы

Ye.Ye. SAMOILENKO
Petro Mohyla Black Sea National University

UNDETERMINATE SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

The algorithm of search solutions of undeterminate normal, functional and operational systems of linear equations by the inverse matrix method and the reduction method of system of linear equations was investigated.

Keywords: undefined systems, linear equations, reduction, functional systems, operator systems

Постановка проблеми

Класичний метод оберненої матриці застосовується до визначених систем лінійних рівнянь, тобто якщо визначник основної матриці не дорівнює нулю. Виникає природне запитання: як модифікувати метод оберненої матриці так, щоб він був придатний для розв'язання невизначених систем лінійних рівнянь?

Аналіз останніх досліджень

Метод оберненої матриці є класичним методом, що входить у кожен підручник з вищої математики (див. [1 - 5]). Останнім часом з'явилося багато робіт, у яких виникають матричні оператори, елементами яких є числа, функції та оператори (див. [6 - 9]).

Ціль дослідження

Ціллю дослідження є модифікація методу оберненої матриці з метою його використання для невизначених звичайних, функціональних та операторних систем лінійних рівнянь.

Основні результати

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з n невідомими $x_j \in \boldsymbol{R}$, $j = \overline{1,n}$ (або $x_j \in \boldsymbol{C}$) виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Числа $a_{ij} \in \boldsymbol{R}$, $i, j = \overline{1,n}$ (або $a_{ij} \in \boldsymbol{C}$), також $b_i \in \boldsymbol{R}$, $i = \overline{1,n}$ (або $b_i \in \boldsymbol{C}$). Таку систему лінійних рівнянь можна записати у матричній формі

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

або $AX = B$. Якщо визначник $|A| \neq 0$, тоді існує обернена матриця A^{-1} і розв'язок можна знайти

$$X = A^{-1}B,$$

або

$$X = \frac{1}{|A|}\tilde{A}B,$$

де $\tilde{A}$ – матриця алгебраїчних доповнень.

Невірно стверджувати, що у випадку нульового визначника $|A| = 0$ систему лінійних рівнянь неможливо розв'язати методом оберненої матриці. Покажемо, що можна. Нехай ранг матриці A дорівнює $n-1$. Тоді існує ненульовий мінор порядку $n-1$, тобто $M_{i_0 j_0} \neq 0$. Тоді переходимо до редукованої системи лінійних рівнянь, тобто з системи (1) вилучаємо i_0-ве рівняння, а у рівняннях, що залишилися, з правої у ліву частину рівностей переносимо члени $a_{ij_0} x_{j_0}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1(j_0-1)}x_{j_0-1} + a_{1(j_0+1)}x_{j_0+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 - a_{1j_0}x_{j_0}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2(j_0-1)}x_{j_0-1} + a_{2(j_0+1)}x_{j_0+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 - a_{2j_0}x_{j_0}, \\ \vdots \\ a_{(i_0-1)1}x_1 + a_{(i_0-1)2}x_2 + \ldots + a_{(i_0-1)(j_0-1)}x_{j_0-1} + a_{(i_0-1)(j_0+1)}x_{j_0+1} + \ldots + a_{(i_0-1)n}x_n = b_{i_0-1} - a_{(i_0-1)j_0}x_{j_0}, \\ a_{(i_0+1)1}x_1 + a_{(i_0+1)2}x_2 + \ldots + a_{(i_0+1)(j_0-1)}x_{j_0-1} + a_{(i_0+1)(j_0+1)}x_{j_0+1} + \ldots + a_{(i_0+1)n}x_n = b_{i_0+1} - a_{(i_0+1)j_0}x_{j_0}, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n(j_0-1)}x_{j_0-1} + a_{n(j_0+1)}x_{j_0+1} + \ldots + a_{nn}x_n = b_n - a_{nj_0}x_{j_0}. \end{cases}$$

Відповідне матричне рівняння матиме вигляд

$$A(i_0, j_0)X(j_0) = B(i_0, j_0),$$

де

$$A(i_0, j_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j_0-1)} & a_{1(j_0+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j_0-1)} & a_{2(j_0+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i_0-1)1} & a_{(i_0-1)2} & \vdots & a_{(i_0-1)(j_0-1)} & a_{(i_0-1)(j_0+1)} & \vdots & a_{(i_0-1)n} \\ a_{(i_0+1)1} & a_{(i_0+1)2} & \vdots & a_{(i_0+1)(j_0-1)} & a_{(i_0+1)(j_0+1)} & \vdots & a_{(i_0+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j_0-1)} & a_{n(j_0+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X(j_0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{j_0-1} \\ x_{j_0+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B(i_0, j_0) = \begin{pmatrix} b_1 - a_{1j_0}x_{j_0} \\ b_2 - a_{2j_0}x_{j_0} \\ \vdots \\ b_{i_0-1} - a_{(i_0-1)j_0}x_{j_0} \\ b_{i_0+1} - a_{(i_0+1)j_0}x_{j_0} \\ \vdots \\ b_n - a_{nj_0}x_{j_0} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок такого рівняння існує за теоремою Кронекера-Капеллі і знаходиться

$$X(j_0) = A^{-1}(i_0, j_0)B(i_0, j_0)$$

Аналогічно знаходимо розв'язок системи для довільного рангу матриці A.

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з n невідомими виду

$$\begin{cases} \varphi_{11}(t)x_1+\varphi_{12}(t)x_2+\ldots+\varphi_{1n}(t)x_n=b_1(t), \\ \varphi_{21}(t)x_1+\varphi_{22}(t)x_2+\ldots+\varphi_{2n}(t)x_n=b_2(t), \\ \vdots \\ \varphi_{n1}(t)x_1+\varphi_{n2}(t)x_2+\ldots+\varphi_{nn}(t)x_n=b_n(t). \end{cases} \quad (2)$$

І нехай функції $\varphi_{ij}(t)$, $x_j(t)$ та $b_i(t)$, $i,j=\overline{1,n}$ неперервні на відрізку $[0;1]$. Аналогічно до системи (1) таку систему лінійних рівнянь можна записати у матричній формі $\Phi(t)X(t)=B(t)$. Якщо визначник $|\Phi(t)|\neq 0$ для довільного $t\in[0;1]$, тоді існує обернена матриця $\Phi^{-1}(t)$ і розв'язок можна знайти

$$X(t)=\Phi^{-1}(t)B(t),$$

або

$$X(t)=\frac{1}{|\Phi(t)|}\tilde{\Phi}(t)B(t).$$

Якщо ж існує лише одна точка $t_0\in[0;1]$ така, що $|\Phi(t_0)|=0$, розв'язок може існувати, якщо $X(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{1}{|\Phi(t)|}\tilde{\Phi}(t)B(t)$ – неперервна функція на $[0;1]$. Зауважимо, що таких точок може бути і більше ніж одна – скінчена кількість, або навіть і злічена.

Нехай задано операторну систему n лінійних рівнянь з n невідомими виду

$$\begin{cases} A_{11}x_1+A_{12}x_2+\ldots+A_{1n}x_n=y_1, \\ A_{21}x_1+A_{22}x_2+\ldots+A_{2n}x_n=y_2, \\ \vdots \\ A_{n1}x_1+A_{n2}x_2+\ldots+A_{nn}x_n=y_n. \end{cases} \quad (3)$$

Тут $\hat{A}=\left\{ A_{ij}=A_{ij}^{*} \,\middle|\, i,j=\overline{1,n}\right\}$, – сім'я обмежених самоспряжених комутуючих операторів з $L(L_2[0;1])$ та $y_i, x_j\in L_2[0;1]$, $i,j=\overline{1,n}$. Тоді сім'ї $\hat{A}$ відповідає сім'я спектральних мір E_{ij} та сумісна міра

$$E\left(\mathop{\times}_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)=\mathop{\times}_{i,j=1}^{n}E(\lambda_{ij}).$$

Спектральна теорема має вигляд

$$A_{ij}=\int\limits_S \lambda_{ij}\,dE(\Lambda),$$

де $\Lambda=(\lambda_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}\in S$, причому $SuppE=\left\{\cap\varphi \mid \varphi=\overline{\varphi}:E(\varphi)=I\right\}$ – сумісна міра, S – сумісний спектр, $\sigma(A_{ij})$ – спектр оператора A_{ij} і має місце

$$S=SuppE\subseteq\mathop{\times}_{i,j=1}^{n}SuppE_{ij}=\mathop{\times}_{i,j=1}^{n}\sigma(A_{ij}).$$

Систему лінійних рівнянь (3) можна записати у матричній формі $AX=B$. Якщо $\Delta(\Lambda)=\det\{\lambda_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}\neq 0$ для довільного $\Lambda\in S$, тоді розв'язок можна знайти

$$X=\begin{pmatrix} \int\limits_S \frac{\tilde{\lambda}_{11}}{\Delta(\Lambda)}dE(\Lambda) & \int\limits_S \frac{\tilde{\lambda}_{12}}{\Delta(\Lambda)}dE(\Lambda) & \int\limits_S \frac{\tilde{\lambda}_{1n}}{\Delta(\Lambda)}dE(\Lambda) \\ \int\limits_S \frac{\tilde{\lambda}_{21}}{\Delta(\Lambda)}dE(\Lambda) & \int\limits_S \frac{\tilde{\lambda}_{22}}{\Delta(\Lambda)}dE(\Lambda) & \int\limits_S \frac{\tilde{\lambda}_{2n}}{\Delta(\Lambda)}dE(\Lambda) \\ \\ \int\limits_S \frac{\tilde{\lambda}_{n1}}{\Delta(\Lambda)}dE(\Lambda) & \int\limits_S \frac{\tilde{\lambda}_{n2}}{\Delta(\Lambda)}dE(\Lambda) & \int\limits_S \frac{\tilde{\lambda}_{nn}}{\Delta(\Lambda)}dE(\Lambda) \end{pmatrix}\cdot B,$$

де матриця $\{\tilde{\lambda}_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ – матриця алгебраїчних доповнень матриці $\{\lambda_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$. Зауважимо, що при $\Delta(\Lambda)=0$, аналогічно до системи (1) виконується редукція системи операторних рівнянь.

Висновки

Метод оберненої матриці при незначній модифікації може використовуватися для розв'язування звичайних, функціональних та операторних систем лінійних рівнянь

Список літератури

1. Шкіль М. І. Вища математика / М. Л. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. –К.: Либідь, 1994. – 276 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища школа, 1993. – 647 с.
4. Барковський В. В. Основи елементарної математики / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : НАУ, 1999. – 236 с.
5. Самойленко Є. Є. Дослідження операцій / Є. Є. Самойленко. – К. : КСУ, 2008. – 76 с.
6. Samoilenko Ye.Ye., On Spectrum of Matrix-Valued Continuous Functions of a Family of Commuting Operators.// Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, – 2004. – 50, №3. – P. 1192–1194.
7. Самойленко Є.Є. Про спектр матричного оператора, елементами якого є тьопліцеві оператори з неперервними та кусково-неперервними символами на одиничному колі // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 1-2(13-14). – С. 129–137.
8. Мёрфи Д. С*-алгебры и теория операторов / Д. Мёрфи. – М.: Факториал, 1997. – 336 с.
9. Крупник Н.Я. Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. – Кишинёв: Штиница, 1984. – 140 с.