УДК 631.313.02:531/534

Ю.О. ГУМЕНЮК, Ю.В. ЧОВНЮК
Національний університет біоресурсів і природокористування України

ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ СУТТЄВО-НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ У АНАЛІЗІ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ РОБОЧИХ ОРГАНІВ НА ПРУЖНІЙ ПІДВІСЦІ ПРИ ЇХ ВЗАЄМОДІЇ З ОБРОБЛЮВАНИМ ҐРУНТОМ

Для аналізу вільних коливань у системі "робочий орган на пружній підвісці – оброблюваний ґрунт" використана модель суттєво нелінійної механічної системи. Розглянуті типові системи зі складними кусково-лінійними та поліноміальними пружними характеристиками симетричного/несиметричного кутів. Визначені періоди та власні частоти вказаних механічних систем, побудовані їх амплітудно-частотні характеристики.

Ключові слова: модель, суттєво-нелінійна система, механіка, аналіз, взаємодія, робочий орган, пружна підвіска, оброблюваний ґрунт, вільні коливання.

Ю.О. ГУМЕНЮК, Ю.В. ЧОВНЮК
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ СУЩЕСТВЕННО-НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В АНАЛИЗЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАБОЧИХ ОРГАНОВ С УПРУГОЙ ПОДВЕСКОЙ ПРИ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ОБРАБАТЫВАЕМОЙ ПОЧВОЙ

Для анализа свободных колебаний в системе "рабочий орган на упругой подвеске – обрабатываемая почва" использована модель существенно-нелинейной механической системы. Рассмотрены типовые системы со сложными кусочно-линейными и полиномиальными упругими характеристиками симметричного/несимметричного типов. Определены периоды и собственные частоты указанных механических систем, построены их амплитудно-частотные характеристики.

Ключевые слова: модель, существенно-нелинейная система, механика, анализ, взаимодействие, рабочий орган, упругая подвеска, обрабатываемая почва, свободные колебания.

Yu.O. GUMENYUK, Yu.V. CHOVNYUK
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

USING THE MODEL OF THE ESSENTIALLY NONLINEAR MECHANICAL SYSTEM FOR ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF TILLAGE TOOLS IN THEIR INTERACTION WITH CULTIVATED SOILS

For the analysis of free vibrations in the system "tillage tool – cultivated soil" the model of essentially-nonlinear mechanical system is used. The typical systems with difficult piecewise-linear and polynomial elastic characteristics with symmetrical/ nonsymmetrical types are considered. The period and the free vibrations of these mechanical systems are defined , their frequency response are constructed.

Keywords: model, essentially nonlinear system, mechanics, analysis, interaction, tillage tool, elastic suspension, cultivate the soil, free vibrations.

Постановка проблеми

Одним із шляхів підвищення якості роботи ґрунтообробних знарядь та зниження енергомісткості обробки ґрунту є створення конструкцій пружних механізмів, які встановлюються між робочим органом і рамою машини (пружні механізми-пружні підвіски). Такі механізми сприяють появі самозбуджуваних коливань робочих органів, що покращує очищення робочих органів від нависань рослинних решток й ґрунту, а також знижує тяговий опір. Ефект самозбудження коливань може знайти широке застосування у багатьох технологічних процесах землеробської механіки. Зараз виробники ґрунтообробної техніки широко використовують цю ідею.

Пружні механізми використовуються у наступних варіантах: 1) триланцюговий механізм з одним пружним ланцюгом; 2) п'ятиланцюговий з одним пружним ланцюгом; 3) пружна стійка чи пружні елементи навіски.

Аналіз таких пружних механізмів показує, що незважаючи на широкий спектр конструктивних рішень всі вони мають нелінійну жорсткість. Однак сьогодні немає достатньо глибокого аналізу й методу розрахунку таких механізмів. На жаль, ці механізми, як правило, багатьма конструкторами розглядаються як запобіжні пристрої, а не джерела самозбудження коливань.

Дослідження характеристики жорсткості показують, що графіки силових характеристик усіх зазначених вище систем мають нелінійний характер [1-3].

При постановці задач механіки взаємодії робочих органів на пружній підвісці з оброблюваним середовищем треба враховувати всі джерела нелінійності: 1) особливості конструкції навіски; 2) нелінійне тертя (в'язкість) середовища; 3) приєднана до робочого органу маса ґрунту (змінна у часі); 4) нелінійна жорсткість підвіски.

Всі ці причини іноді вносять нездоланні труднощі у постановці задач механіки взаємодії робочих органів на пружній підвісці з ґрунтом. Нелінійні коливання мають широкий спектр специфічних механічних явищ і ефектів, використання яких у технологічних процесах дозволяє суттєво підвищити технологічну й енергетичну ефективності. Тому вивчення і дослідження подібних систем є актуальним й необхідним для оптимізації режимів їх функціонування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз великої кількості точних розв'язків у нелінійних неавтономних коливних системах спонукав автора [4] до ствердження, про те, що основні нелінійні ефекти у цих системах є проявом внутрішніх коливних властивостей системи, тобто вільних коливань. Цієї точки зору у різних степенях притримуються автори ряду робіт по нелінійним коливанням [5-7], однак багато дослідників не враховують взаємні зв'язки вільних та вимушених резонансних коливань, що для низки випадків призводить до неточних якісних висновків, які здійснюються на основі результатів наближеного аналізу (наприклад, даних про залежність порядку можливих субгармонічних режимів у симетричних системах [8] чи про малість амплітуди супергармонічних коливань).

Зазначений у роботі [4] підхід передбачає, що у системах визначальну роль при коливаннях грають пружні відновлюючи сили. Тому з'являється можливість на основі аналізу вільних коливань системи і параметрів вимушеної сили передбачати можливість тих чи інших нелінійних ефектів без звичайних математичних викладок.

У даній роботі розглянуті вільні коливання у нелінійних недисипативних системах з одним ступенем вільності руху з типовими пружними характеристиками, для котрих справедливе рівняння:

$$\ddot{x} + f(x) = 0\,. \tag{1}$$

Основна увага приділена побудові амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) – кривих вільних коливань (скелетних кривих) та їх аналізу у системах з різними видами пружних характеристик *f(x),* які моделюють взаємодію робочих органів на пружній підвісці з оброблюваним ґрунтом. Вільні коливання, як зазначено вище, характеризують внутрішні коливні властивості нелінійної системи, які проявляють себе при зовнішньому впливі на неї. За видом скелетної кривої й параметрами зовнішнього збудження можна прогнозувати появу різноманітних нелінійних ефектів, таких, як суб- та супергармонічні коливання, багаторежимність тощо.

У даній роботі розглянуті вільні коливання у системах з гладкими пружними характеристиками, котрі задані одним аналітичним виразом, а також у системах з кусково-неперервними характеристиками, котрі описуються кількома аналітичними виразами, у т.ч. у системах з різними кусково-лінійними характеристиками (з натягом, з триланцюговою, з поліноміальною) симетричного/несиметричного типів.

Формулювання мети дослідження

Мета роботи полягає у встановленні основних характеристик вільних коливань суттєво-нелінійних механічних систем, які мають типові пружні характеристики. Отримання точних розв'язків рівняння вільних коливань (1) дозволяє досліджувати нелінійні механізми взаємодії робочих органів на пружній підвісці з оброблюваним ґрунтом.

Викладення основного матеріалу дослідження

Використовуючи підхід роботи [4], визначимо період *T*, частоту власних коливань *p* та АЧХ для типових пружних характеристик системи *f*(*x*).

Розглянемо спочатку симетричні пружні характеристики $\left(f(x) = -f(-x)\right)$.

1. $f(x) = a \cdot x^3, a > 0$ (рис. 1, а). На рис. 1, б зображена АЧХ для цього випадку. Використовуючи результати робіт [4, 9], та за допомогою таблиць еліптичних інтегралів знаходимо:

$$T = \frac{7{,}4164}{a \cdot \sqrt{a}}\,;\; p = \frac{\pi \cdot a \cdot \sqrt{a}}{3{,}7082}\,.$$

Отже, частота вільних коливань у першому випадку лінійно зростає при зростанні їх амплітуди *a*.

2. Симетричні системи з натягом.

Система з достатньою жорсткістю, $p_1^2 > 0$ зображена на рис. 2, а.

Для періоду *T* та частоти *p* вільних коливань знаходимо:

$$T = \frac{4}{p_1} \cdot \arccos\left\{ \frac{1}{\left(1 + \frac{ap_1^2}{f}\right)} \right\}; \; p = \frac{p_1 \cdot \pi}{2\arccos\left\{\left(1 + \frac{ap_1^2}{f}\right)^{-1}\right\}} \; . \qquad (2)$$

Рис.1. Поліноміальна пружна характеристика *f*(*X*) та АЧХ системи

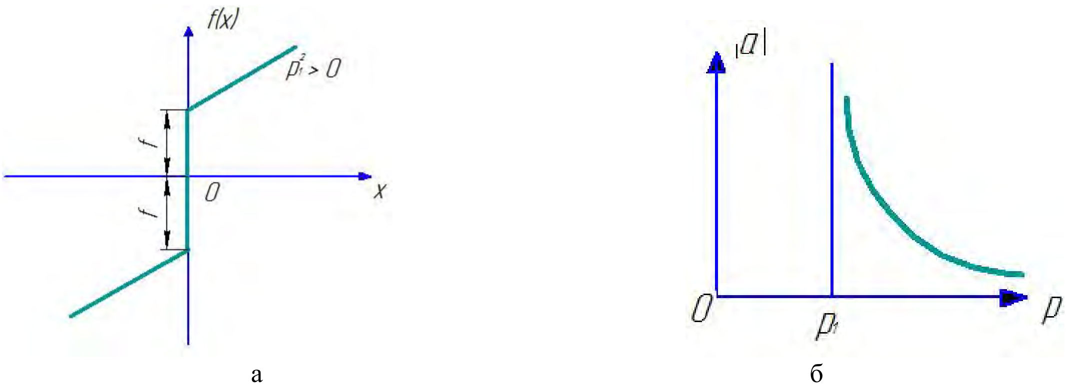


Рис. 2. Система (симетрична) з додатною жорсткістю $p_1^2 > 0$ й натягом (*f*):
а - нелінійна характеристика; б - АЧХ системи

3. Несиметричні системи з натягом.

Система з несиметричною пружною характеристикою зображення рис. 3, а.

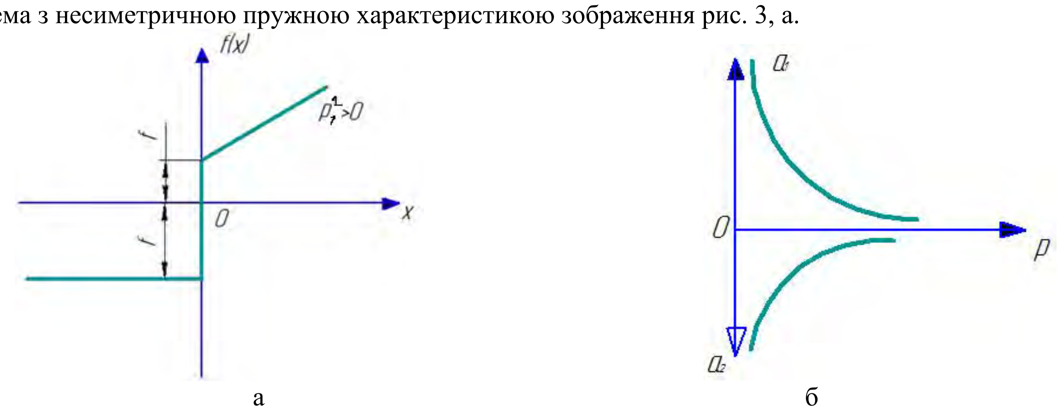


Рис. 3. Несиметрична система з натягом і додатною жорсткістю $p_1^2 > 0$:
а - нелінійна пружна характеристика; б – АЧХ

Вирази для частоти *p* і періоду *T* власних коливань системи можна знайти зі співвідношення:

$$p = \frac{\pi}{\left\{\frac{1}{p_1}\right\} \cdot \arccos\left(\left[1 + \frac{a_1 p_1^2}{f_1}\right]^{-1}\right) + \sqrt{\frac{2a_2}{f_2}}}, \; T = \frac{2\pi}{p} \; . \qquad (3)$$

Максимальне значення змінної *x* при відхиленні вліво складає:

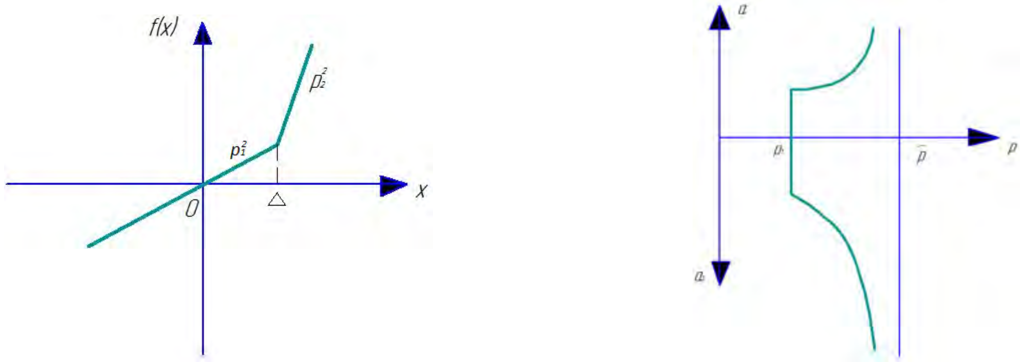
$$p = \frac{1}{f_2} \cdot \left(f_1 + \frac{p_1^2 \cdot a_1}{2} \right) \cdot a_1 \; . \tag{4}$$

4. Система з білінійною пружною характеристикою зображена на рис.4, а.
Залежність між максимальними зміщеннями (a_1 та a_2) приймає наступний вид:

$$a_2 = \left(\Delta^2 - 2\Delta \cdot (a_1 - \Delta) + (a_1 - \Delta)^2 \cdot \frac{p_1^2}{p_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{5}$$

Частоту вільних коливань (p) та період знаходимо наступним чином:

$$\tilde{p} = \frac{\pi}{\left\{ \frac{1}{p_2} \cdot \arccos \left[\frac{1}{1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \cdot \left(\frac{a_1}{\Delta} - 1 \right)} \right] + \frac{1}{p_1} \cdot \arccos \left(\frac{\Delta}{a_2} \right) \right\}} , \; T = \frac{2\pi}{\tilde{p}} \; . \tag{6}$$



а б

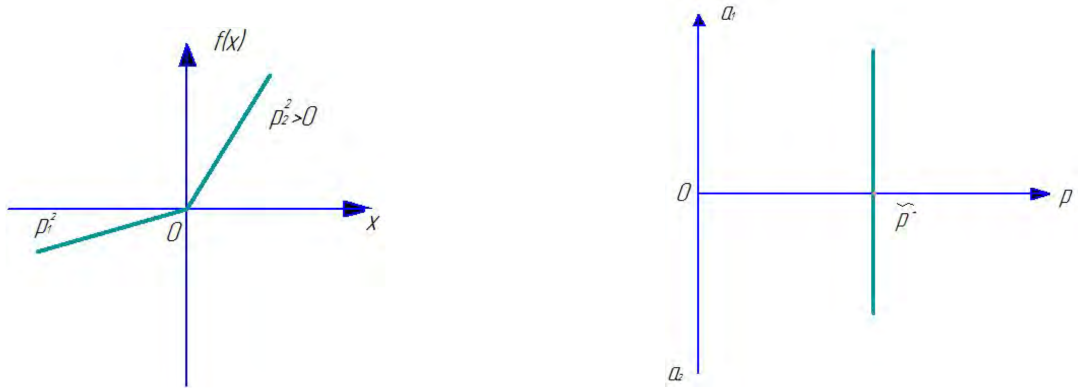
Рис. 4. Система з білінійною пружною характеристикою: а - нелінійна пружна характеристика; б - АЧХ.

Слід зазначити, що збільшення жорсткості пружного упору призводить лише до обмеженого зростання частоти вільних коливань; при $p_2^2 = \infty$ (т.з. віброударна система з одностороннім обмежувачем ходу/руху) максимальне значення частоти вільних коливань $p = 2p_1$.

У випадку $\Delta = 0$ (рис.5, а) з (6) маємо:

$$\tilde{p}^* = \frac{2p_1 \cdot p_2}{p_1 + p_2} , \; T = \frac{2\pi}{\tilde{p}^*} , \tag{7}$$

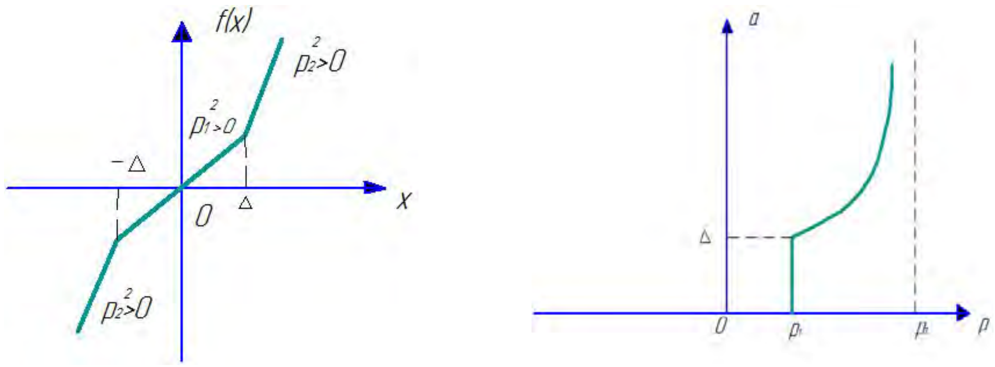
тобто частота вільних коливань у системі з білінійною характеристикою зі зламом у точці $x=a$ є постійною і не залежить від початкових умов (рис. 5, б). Хоча, слід зазначити, що незважаючи на це деякі нелінійні ефекти у цій системі, наприклад, самозбудження субгармонійних коливань, проявляє себе найбільш потужно.



а б

Рис. 5. Система з білінійною пружною характеристикою $(\Delta = 0)$: а - нелінійна пружна характеристика; б - АЧХ.

5. Система (симетрична, жорстка) з триланцюговою пружною характеристикою зображена на рис. 6, а.



а б

Рис.6. Система з симетричною жорсткою триланцюговою пружною характеристикою:

а - нелінійна пружна характеристика; б – АЧХ $(p_2^2 > p_1^2)$.

Аналітичний вираз для триланцюгової симетричної жорсткої пружної характеристики має вид:

$$f(x) = \begin{cases} p_1^2 x, \quad |x| \le \Delta; \\ p_2^2 \cdot x - \left(p_2^2 - p_1^2\right) \cdot \Delta \cdot sign\, x, \quad |x| \ge \Delta. \end{cases} \tag{8}$$

Час руху на ділянці $\Delta \le x \le a$ визначаємо, використовуючи співвідношення:

$$t_2 = \frac{1}{p_2} \cdot \arccos\left\{ \frac{p_1^2 \cdot \Delta}{p_1^2 \cdot \Delta + p_2^2 (a - \Delta)} \right\}. \tag{9}$$

Час руху на ділянці $0 \le x \le \Delta$ знаходимо зі співвідношення:

$$t_1 = \frac{1}{p_1} \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} - arctg\left[\frac{(a-\Delta) \cdot p_2 \cdot \sqrt{1 + \dfrac{2 p_1^2 \Delta}{(a-\Delta) \cdot p_1^2}}}{p_1 \cdot \Delta} \right] \right\}. \tag{10}$$

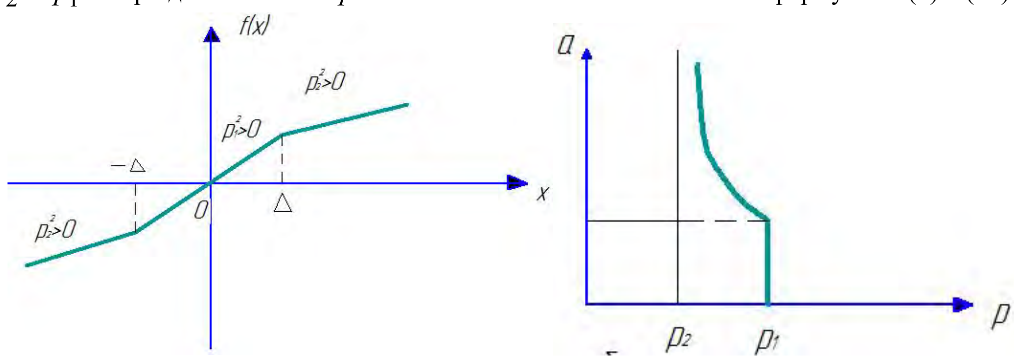
(Тут для визначення швидкості у точці $x = \Delta$ використані залежності з [4].

Для періоду власних коливань T та частоти власних коливань $\widetilde{p}^*$ маємо:

$$T = 4 \cdot (t_1 + t_2);\ \widetilde{p} = \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{p_2} \cdot \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{p_1} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - arctg\sqrt{\left(\frac{a}{\Delta} - 1\right) \cdot (1 + \beta)} \right) \right\}^{-1},$$
$$\beta = 1 + \frac{p_2^2}{p_1^2} \cdot \left(\frac{a}{\Delta} - 1 \right). \tag{11}$$

6. Система (симетрична, м'яка) з триланцюговою пружною характеристикою зображена на рис.7, а.

Аналітичний вираз для триланцюгової симетричної м'якої пружної характеристики має вид (8), проте тепер $p_2^2 < p_1^2$. Період T та частота $\widetilde{p}$ власних коливань визначаються за формулами (9) – (11):



а б

Рис.7. Система з симетричною м'якою триланцюговою пружною характеристикою:

а - нелінійна пружна характеристика; б - АЧХ $(p_2^2 < p_1^2)$

7. Система з несиметричною кривою трилянцюговою пружною характеристикою зображена на рис.8, а.

Аналітичний вираз для пружної характеристики вказаної системи має наступний вид:

$$f(x)=\begin{cases} p_2^2\cdot x-\left(p_2^2-p_1^2\right)\cdot\Delta_1, & X\ge\Delta_1;\\ p_1^2\cdot x, & -\Delta_2\le x\le\Delta_1;\\ p_3^2\cdot x+\left(p_3^2-p_1^2\right)\cdot\Delta_2, & x\le-\Delta_2. \end{cases} \tag{12}$$

Якщо $p_2^2>p_1^2, p_3^2>p_1^2$ тоді ця характеристика визначається як "жорстка", якщо $p_2^2<p_1^2, p_3^2<p_1^2$, тоді ця характеристика відповідає визначенню "м'яка". У випадку коли $p_2^2>p_1^2, p_3^2<p_1^2$ – правостороння-жорстка й лівостороння м'яка; коли $p_2^2<p_1^2, p_3^2>p_1^2$ – правостороння-м'яка й лівостороння жорстка. На рис. 8, а зображена право- й лівостороння-жорстка.

Період вільних коливань, котрі охоплюють всі три ділянки руху, має наступний вид:

$$\begin{cases} T=2\cdot\left(t_1+t_2+t_3\right),\ t_1=\dfrac{1}{p_1}\cdot\left\{\pi-arctg\left[\sqrt{\left(\dfrac{a_1}{\Delta_1}-1\right)\left(1-\beta_2\right)}\right]-arctg\left[\sqrt{\left(\dfrac{a_2}{\Delta_2}-1\right)\left(1-\beta_3\right)}\right]\right\},\\ t_2=\dfrac{1}{p_2}\arccos\left(\dfrac{1}{\beta_2}\right);\quad t_3=\dfrac{1}{p_3}\arccos\left(\dfrac{1}{\beta_3}\right). \end{cases} \tag{13}$$

У цих випадках:

$$\beta_i=1+\frac{p_i^2}{p_1^2}\cdot\left(\frac{a_{i-1}}{\Delta_{i-1}}-1\right),\ i=\overline{(2,3)}. \tag{14}$$

Частота вільних коливань, з урахуванням (13), (14) набуває вигляду:

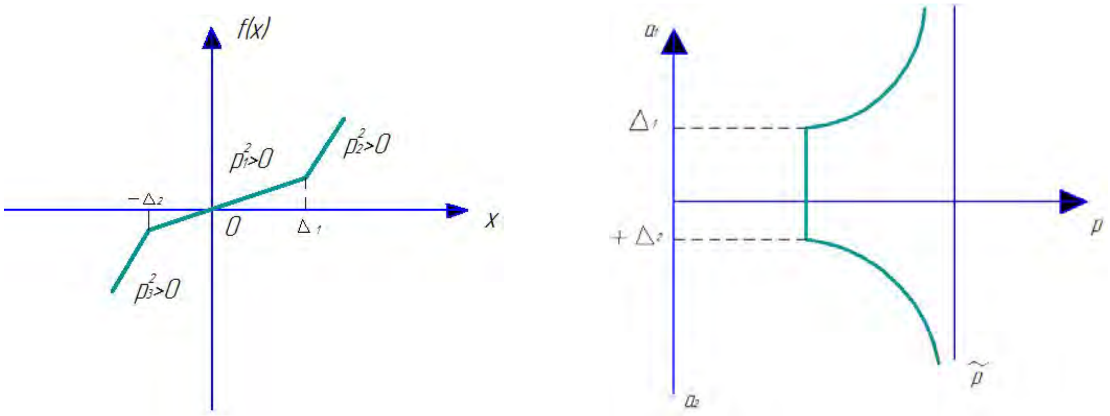
$$\widetilde{p}=\pi\cdot\left\{t_1+t_2+t_3\right\}^{-1}. \tag{15}$$

Залежність між максимальними відхиленнями a_1 та a_2, які відповідають рухам $x>0$ й $x<0$ відповідно, має вид:

$$a_2=\left(1-\frac{p_1^2}{p_3^2}\right)\cdot\Delta_2\,;\, a_1=\left(\frac{p_1^4}{p_3^4}\Delta_2^2-\frac{p_1^2}{p_3^2}\cdot\left(\Delta_2^2-2\Delta_1 a_1+\Delta_1^2\right)+\frac{p_2^2}{p_3^2}\left(a_1-\Delta_1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Амплітудно-частотні залежності (АЧХ) для цієї системи наведені на рис. 8, б.

При збільшенні розкиду коливань частота вільних коливань прямує до $\widetilde{p}^*=\dfrac{2p_1\cdot p_3}{p_1+p_3}$.



а б

Рис. 8. Система з несиметричною жорсткою трилянцюговою пружною характеристикою: а - нелінійна пружна характеристика; б - амплітудно-частотна характеристика (АЧХ), $p_2^2>p_1^2, p_3^2>p_1^2$.

Висновки

1. Вид скелетних кривих грає суттєву роль при прогнозуванні можливих видів коливань у суттєво-нелінійних механічних системах з кусково-ламаною пружною характеристикою. У зв'язку з цим у даній роботі дана оцінка якості поведінки скелетних кривих для систем з типовими симетричними й несиметричними нелінійними пружними характеристиками, які моделюють взаємодію та вільні коливання

робочих органів на пружній підвісці, котрі обробляють ґрунт. При цьому детальний аналіз можливих вільних коливань здійснений на основі дослідження отриманих АЧХ і залежностей вказаних коливань.

2. Для пружних характеристик жорсткого типу скелетна крива має нахил вправо; для пружних характеристик м'якого типу – нахил вліво. Для цих характеристик АЧХ вільних коливань, тобто скелетна крива, є однозначною.

3. Збільшення жорсткості пружної характеристики на деякій ділянці призводить до викривлення скелетної кривої вправо (у бік високих частот). Зменшення жорсткості пружної характеристики викривляє скелетну криву вліво (в бік низької частоти).

4. Якщо жорсткість пружної характеристики $df / dx = p_x^2$ при $a_1 \to \infty$ (чи $a_2 \to -\infty$) прямує до скінченної границі, тоді асимптотою скелетної кривої є вертикальна пряма. Зокрема, збільшення жорсткості одностороннього пружного упору до нескінченності (віброударна механічна система) призводить лише до обмеженого зростання частоти вільних коливань. Тому скелетні криві, які відповідають кусково-лінійним пружним характеристикам, завжди мають вертикальні асимптоти, на відміну від пружних характеристик поліноміального типу, для котрих асимптотами є похилі криві чи прямі.

5. Близькість скелетної кривої до вертикальної прямої не завжди свідчить про малу нелінійність пружної характеристики для несиметричних систем. Наприклад, білінійній пружній характеристиці $f(x)$ зі зламом у точці $x=0$, яка є суттєво-нелінійною характеристикою, відповідає скелетна крива у вигляді вертикальної прямої (рис. 5, б).

6. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення інженерних розрахунків режимів коливань робочих органів на пружній підвісці при їх взаємодії з оброблювальним ґрунтом, як на стадіях проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

Список використаної літератури

1. Шевченко И.А. Экспериментально-теоретические обоснование параметров рабочих органов с упругими стойками культиваторов для предпосевной обработки почв: Дисс…канд. техн. наук / И.А. Шевченко. – М., 1988 – 176 с.
2. Кушнарёв С.А. Обоснование энергосберегающих технологических процессов обработки почвы и параметров упругих рабочих органов для условий южной степной зоны Украины: Дисс… канд. техн. наук / С.А. Кушнарев. – Глеваха, 1988. – 194 с.
3. Кушнарев А. Механика взаимодействия рабочих органов на упругой подвеске с почвой /А. Кушнарёв, И. Шевченко, В. Дюжаев, С. Кушнарёв // Техніка АПК. – 2008. – №8. – С. 22-25.
4. Закрижевский М.В. Колебания существенно-нелинейных механических систем / М.В. Закрижевский. – Рига: Зинатне, 1980. – 190 с.
5. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
6. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1963. – 410 с.
7. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем/ М.З. Коловский. – М.:Наука,1996. – 318 с.
8. Хаяси Т. Нелинейние колебания в физических системах / Т. Хаяси. – М.: Мир, 1968. – 432 с.
9. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.