УДК 539.3

Т.С. КАГАДИЙ
Национальный горный университет
О.В. БЕЛОВА, И.В. ЩЕРБИНА
Национальная металлургическая академия Украины

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Разработанный авторами метод возмущений позволил свести решение сложных задач теории упругости анизотропных сред к последовательному решению краевых задач теории потенциала. Исследован ряд сложных новых задач, в частности, о передаче нагрузки от жесткого штампа к круговому сектору с цилиндрической анизотропией.

Ключевые слова: штамп, взаимодействие, анизотропия, асимптотический.

Т.С. КАГАДІЙ
Національний горний університет
О.В. БІЛОВА, І.В. ЩЕРБИНА
Національна металургійна академія України

АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ´ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ

Розроблений авторами метод збурення дозволив звести розв'язання складних задач теорії пружності анізотропних середовищ до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу. Досліджено ряд складних нових задач, зокрема, про передачу навантаження від жорсткого штампу до криволінійного сектору з циліндрічною анізотропією.

Ключові слова: штамп, взаємодія, анізотропія, асимптотичний.

T.S. KAGADIY
National Mining University
O.V. BELOVA, I.V. SHERBINA
National Metallurgical University of Ukraine

THE ANALYTICAL APPROACH TO A SOLUTION OF SOME CONTACT TASKS

The elaborated by authors perturbation method is allowed to reduced the solution of complicated problems of linear elasticity to subsequently solved boundary problems of potential theory. New linear problems are investigated, in particular, problem on load transference from stamp to circular plate with curve.

Keywords: stamp, interaction, anisotropy, asymptotic.

Постановка проблемы

Высокие требования, предъявляемые к надежности конструкции, в настоящее время могут быть удовлетворены лишь при наличии оперативной и достоверной информации о ее напряженно-деформированном состоянии (НДС). Расчетные схемы исследуемых конструкций при этом должны быть максимально приближены к реальным объектам, необходимо учитывать сложность их конструктивных форм, структуры, характера нагружения и взаимодействия с окружающей средой, поведение материалов конструкции в экстремальных условиях и т. д. В большинстве реальных конструкций закон распределения истинных контактных давлений оказывает существенное влияние на НДС взаимодействующей пары, а иногда, определяет работоспособность конструкции в целом. В таких случаях построение математической модели оказывается весьма сложной задачей. Аналитические подходы к решению такого рода задач и сегодня являются актуальными [1-6].

В данной работе рассматривается задача о вдавливании жесткого штампа в свободную грань упругого ортотропного бесконечного кругового сектора с цилиндрической анизотропией, кромки которого закреплены. Между штампом и пластиной учитывается трение. Для решения задачи используется асимптотический метод [3].

Цель исследования

Продемонстрировать эффективность применения аналитических подходов к решению сложных контактных задач, когда получение точного решения проблематично. В частности, на решении задачи о контактном взаимодействии штампа и ортотропной пластины с цилиндрической анизотропией асимптотическим методом показать, что приближенное решение вблизи «особых точек» в точности совпадает с точным решением Галина [2], разложенным в ряд по малому параметру.

Постановка задачи и метод решения.

Пусть упругая пластина ($R_0 \le r \le \infty; -\gamma \le \theta \le \gamma$) закреплена по кромкам $\theta = \pm\gamma$. На границу $r = R_0$ действует жесткий штамп на участке $-\lambda \le \theta \le \lambda$ с основанием, совпадающим с границей $r = R_0$. Штамп нагружен нормальным усилием P_0 и касательным Q_0. При этом между штампом и пластиной учитывается трение, подчиняющееся закону Кулона (рассматривается состояние предельного равновесия штампа). На бесконечности $(r \to \infty)$ перемещения и деформации равны нулю. Пластина толщины δ работает в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Материал пластины является ортотропным, главные направления анизотропии совпадают с полярными координатами r, θ. Требуется найти распределение напряжений под штампом и в пластине.

Для решения задачи о контакте жесткого штампа с упругим кольцевым сектором, обладающим цилиндрической анизотропией, был применен асимптотический метод [3], позволяющий расщепить напряженно-деформированное состояние сектора на две составляющие, обладающие различными свойствами. Краевая задача теории упругости сводится к последовательному решению задач теории потенциала, и решение исходной задачи определяется как суперпозиция указанных составляющих.

Если вместо полярных координат r, θ ввести безразмерные координаты ξ, η соотношениями $r = R_0 e^{\xi}; \theta = \eta$, то поставленная задача может быть сведена к интегрированию уравнений равновесия пластины в перемещениях

$$\begin{aligned} &B_1 u_{\xi\xi} + G u_{\eta\eta} - B_2 (v_\eta + u) + G m v_{\xi\eta} - G v_\eta = 0, \\ &G v_{\xi\xi} + B_2 v_{\eta\eta} + B_2 u_\eta + G m u_{\xi\eta} + G (u_\eta - v) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = B_1 \left(R_0 e^{\xi}\right)^{-1} \left(u_\xi + \vartheta_2 (v_\eta + u)\right) = 0, \\ &\tau = G \left(R_0 e^{\xi}\right)^{-1} \left(u_\eta + v_\xi - v\right) = 0 \quad (\xi = 0,\ \lambda \le |\eta| \le \gamma), \\ &u = v = 0 \quad (\eta = \pm\gamma), \\ &u = C_0,\ \tau = \rho\,\sigma_1 \ (\xi = 0, |\eta| < \lambda), \end{aligned} \tag{2}$$

на бесконечности перемещения и напряжения равны нулю. Кроме того, должны быть выполнены условия равновесия штампа

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma_1(0,\eta) d\eta + P_0 = 0, \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \tau(0,\eta) d\eta + Q_0 = 0. \tag{3}$$

Так как рассматривается состояние предельного равновесия ($\tau = \rho\,\sigma_1$), то второе условие сводится к первому. Здесь $u = u_r; v = u_\theta$ – компоненты вектора перемещений пластины; $B_1 = \dfrac{E_1\,\delta}{1 - \vartheta_1\vartheta_2}$; $B_2 = \dfrac{E_2\delta}{1 - \vartheta_1\vartheta_2}$ – жесткости пластины на растяжение-сжатие; E_1, E_2 – модули упругости вдоль главных направлений; $G = G_*\delta$ – жесткость пластины на сдвиг; G_* – модуль сдвига; σ_1, τ – нормальное (в направлении координаты ξ) и касательное усилия в пластине; $m = 1 + \vartheta_2 B_1 / G = 1 + \vartheta_1 B_2 / G$; ϑ_1, ϑ_2 – коэффициенты Пуассона материала пластины $(\vartheta_1 B_2 = \vartheta_2 B_1)$; ρ – коэффициент трения $(\rho < 1)$; индексы ξ, η обозначают дифференцирование по соответствующим координатам.

В результате решения задачи [3, 4], в нулевом приближении получены формула для расчета давления под штампом

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0 \pi}{4\gamma\, K(l_1)} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}} \tag{4}$$

и выражение для определения осадки штампа

$$u^{1,0}=\frac{2\gamma}{\pi}A\frac{\ln\left(\sin(\pi\eta_1/2\gamma)+\sqrt{(\sin(\pi\eta_1/2\gamma))^2-l_1^2}\right)}{\cos(\pi\eta_1/2\gamma)}, \tag{5}$$

где $A=-\frac{P_0R_0\pi}{4\gamma\sqrt{GB_1}\,K(l_1)}$, $l_1=\sin\frac{\pi\lambda}{2\gamma}$, $K(l_1)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Касательное напряжение τ под штампом имеет вид $\tau^0=\rho\sigma_1^0$ (при $\rho=0$ получается решение для гладкого штампа).

Поскольку в окрестности угловой точки штампа характер напряженного состояния такой же, как и для полуплоскости, то в этом случае имеется возможность сравнить известное решение для полуплоскости с решением Л.А. Галина [2].

Согласно [3, 4, 6] для нахождения функции напряжений следует решать дифференциальное уравнение четвертого порядка. Соответствующее ему характеристическое уравнение является биквадратным и имеет вид:

$$s^4+\left(1-\frac{2\nu_1G}{B_1}\right)\frac{B_1}{G}s^2+\frac{B_1}{B_2}=0\,.$$

Пусть $a_1=2\nu_1$. Тогда получим уравнение

$$s^4+(1-a_1\varepsilon)\varepsilon^{-1}s^2+\varepsilon^{-1}\frac{G}{B_2}=0\,,$$

корни которого запишутся:

$$s_{1,2}^2=-\frac{1}{2}(1-a_1\varepsilon)\varepsilon^{-1}\pm\sqrt{\frac{1}{4}(1-a_1\varepsilon)^2\varepsilon^{-2}-\varepsilon^{-1}\frac{G}{B_2}}=$$
$$=-\frac{1}{2}(1-a_1\varepsilon)\varepsilon^{-1}\pm\frac{1}{2}(1-a_1\varepsilon)\varepsilon^{-1}\sqrt{1-\frac{4G}{B_2(1-a_1\varepsilon)^2\varepsilon^{-1}}}=-\frac{1}{2}(1-a_1\varepsilon)\varepsilon^{-1}\left[1\mp\sqrt{1-\frac{4\varepsilon G}{B_2(1-a_1\varepsilon)^2}}\right].$$

Раскладывая корни s_1^2, s_2^2 в ряд по ε, получим:

$$s_1^2=-\frac{1}{2}(1-a_1\varepsilon)\varepsilon^{-1}\left[1-\left(1-2\frac{G}{B_2}\varepsilon+\frac{G}{B_2}(1-4a_1)\varepsilon^2+...\right)\right],$$
$$s_2^2=-\frac{1}{2}(1-a_1\varepsilon)\varepsilon^{-1}\left[1+\left(1-2\frac{G}{B_2}\varepsilon+\frac{G}{B_2}(1-4a_1)\varepsilon^2+...\right)\right]$$

или

$$s_1^2=-\frac{1}{2}(1-a_1\varepsilon)\varepsilon^{-1}\frac{G}{B_2}\left(2\varepsilon-(1-4a_1)\varepsilon^2+...\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}(1-a_1\varepsilon)\frac{G}{B_2}\left(2-(1-4a_1)\varepsilon+...\right)=-\frac{G}{B_2}(1-a_1\varepsilon)\left(1-\frac{1-4a_1}{2}\varepsilon+...\right)=$$
$$=-\frac{G}{B_2}\left(1-\frac{1-4a_1-2a_1}{2}\varepsilon+...\right)=-\frac{G}{B_2}\left[1+\frac{6a_1-1}{2}\varepsilon+...\right],$$
$$s_2^2=-\frac{1}{2}(1-a_1\varepsilon)\varepsilon^{-1}\left[1-\frac{G}{B_2}\varepsilon+\frac{G}{B_2}(1-4a_1)\varepsilon^2+...\right]=-\varepsilon^{-1}\left[1-\left(a_1+\frac{G}{B_2}\right)\varepsilon+...\right].$$

Для ортотропного тела с осями упругой анизотропии, параллельными осям координат, корни биквадратного уравнения являются чисто мнимыми. Отсюда (в обозначениях Галина)

$$\mu_1 = s_1 = i\sqrt{\frac{G}{B_2}}\left[1+\frac{1}{4}(6a_1-1)\varepsilon+...\right] = i\nu_1; \quad \mu_2 = s_2 = i\varepsilon^{-1/2}\left[1-\frac{a_1+G/B_2}{2}\varepsilon+...\right] = i\nu_2,$$

$$\nu_1+\nu_2 = \sqrt{\frac{G}{B_2}}\left[\varepsilon^{-1/2}\sqrt{\frac{B_2}{G}}+1-\sqrt{\frac{B_2}{G}}\frac{\left(a_1+\frac{G}{B_2}\right)}{2}\varepsilon^{1/2}+\frac{6a_1-1}{4}\varepsilon+...\right],$$

$$\nu_1\nu_2 = \sqrt{\frac{G}{B_2}}\left[\varepsilon^{-1/2}+\frac{4a_1-2G/B_2-1}{4}\varepsilon^{1/2}-\frac{(6a_1-1)(a_1+G/B_2)}{8}\varepsilon^{3/2}+...\right].$$

Давление, действующее под штампом, имеет вид

$$p(x) = -\frac{P}{\pi}\frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}}f(\theta), \tag{6}$$

где $f(\theta) = \sin\pi\theta\left(\frac{l+x}{l-x}\right)^{1/2-\theta}$, $\theta = \frac{1}{\pi}arctg\frac{A_3+\rho A_4}{B_3+\rho B_4} = (B_3 = A_4 = 0) = \frac{1}{\pi}arctg\frac{A_3}{\rho B_4} =$

$$= \frac{1}{\pi}arctg\frac{-\beta_{22}\frac{\nu_1+\nu_2}{\nu_1\nu_2}}{\rho\left(\beta_{22}\frac{1}{\nu_1\nu_2}+\beta_{12}\right)} = (\beta_{12}=0) = \frac{1}{\pi}arctg\frac{-(\nu_1+\nu_2)}{\rho}.$$

Разложим θ в ряд по $\varepsilon^{1/2}$.

$$\theta(0) = \frac{1}{2},$$

$$\theta' = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(\nu_1+\nu_2)^2/\rho^2}\left(-\frac{1}{\rho}\right)\sqrt{\frac{G}{B_2}}\left[-\sqrt{\frac{B_2}{G}}\varepsilon^{-1}-\sqrt{\frac{B_2}{G}}\frac{(a_1+G/B_2)}{2}+\frac{6a_1-1}{2}\varepsilon^{1/2}+O(\varepsilon)\right],$$

$$\theta'(0) = \frac{1}{\pi}\rho.$$

Тогда разложение θ в ряд по $\varepsilon^{1/2}$ будет представлено в виде:

$$\theta = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\rho\varepsilon^{1/2}+O(\varepsilon),$$

а функция $f(\theta) = sin\pi\theta\left(\frac{l+x}{l-x}\right)^{1/2-\theta}$ примет следующий вид:

$$f(\theta) = sin\left(\frac{\pi}{2}+\rho\varepsilon^{1/2}\right)\left(\frac{l+x}{l-x}\right)^{1/2-\left(1/2+\frac{\rho}{\pi}\varepsilon^{1/2}\right)} = sin\left(\frac{\pi}{2}+\rho\varepsilon^{1/2}\right)\left(\frac{l-x}{l+x}\right)^{\frac{\rho}{\pi}\varepsilon^{1/2}}.$$

$$f(0) = 1,$$

$$f'\left(\varepsilon^{1/2}\right) = \rho\, cos\left(\frac{\pi}{2}+\rho\varepsilon^{1/2}\right)\left(\frac{l-x}{l+x}\right)^{\frac{\rho}{\pi}\varepsilon^{1/2}} + sin\left(\frac{\pi}{2}+\rho\varepsilon^{1/2}\right)\left(\frac{l-x}{l+x}\right)^{\frac{\rho}{\pi}\varepsilon^{1/2}}\frac{\rho}{\pi}ln\frac{l-x}{l+x},$$

$$f'(0) = \frac{\rho}{\pi}\ln\left(\frac{l-x}{l+x}\right).$$

Тогда разложение $f(\theta)$ в ряд по $\varepsilon^{1/2}$ запишется в виде:

$$f(\theta) = 1+\frac{\rho}{\pi}\ln\left(\frac{l-x}{l+x}\right)\varepsilon^{1/2}+O(\varepsilon),$$

а давление под штампом примет следующий вид:

$$p(x) = -\frac{P}{\pi}\frac{1}{\sqrt{l^2 - x^2}}\left(1 + \frac{\rho}{\pi}\ln\left(\frac{l-x}{l+x}\right)\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon)\right). \quad (7)$$

Коэффициент трения ρ имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$ ($\rho = \rho_0\varepsilon^{1/2}$). Тогда контактное давление (в исходных обозначениях) запишется:

$$\sigma_1^0 = -\frac{P_0}{\pi}\frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}\left(1 + \frac{\rho_0}{\pi}\ln\left(\frac{l-\eta_1}{l+\eta_1}\right)\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right)\right). \quad (8)$$

Давление под штампом определяется формулой (7), а касательное напряжение τ под ним имеет вид $\tau^0 = \rho\sigma_1^0$.

Полученные результаты и выводы

Таким образом, пригодное вблизи угловых точек штампа асимптотическое решение совпадает с разложенным в ряд точным решением Л.А. Галина. Учет первых двух приближений дает хорошую аппроксимацию точного решения и указывает на характер особенности вблизи угловой точки штампа ($\eta_1 = l_1$). Как и в [2], эта особенность имеет вид:

$$\sigma = -B\left(1 - \frac{\eta_1}{l_1}\right)^{-\frac{1}{2}+\theta}.$$

Для гладкого штампа особенность совпадает с точной. Полученное в исходной задаче решение (1), (2) может быть «подправлено» вблизи особых точек при помощи «сращивания» с указанным особым решением. Ранее установлено [4], что с уменьшением значения угла γ точка «сращивания» приближается к границе области контакта.

Список использованной литературы

1. Взаимодействие жесткого штампа с ортотропным прямоугольником / А. В. Павленко, И. В. Щербина, А. В. Сясев // Вестник Херсонского национального технического университета.. – 2011. – №3(42) – С. 338-342.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин – М.: Наука, 1980. –303 с.
3. Маневич Л. И. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов / Л. И. Маневич, А. В. Павленко – К.: Вища шк., 1991. – 131 с.
4. Павленко А. В. Вдавливание жесткого штампа в ортотропную пластину с криволинейной анизотропией / А. В. Павленко, Т. С. Кагадий, О. В. Белова // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла, Дніпропетровський національний університет. – 2012. – Вип. 13. – С. 320-327
5. Сясев А. В. Приближенный аналитический метод расчета растущих тел с учетом фазового перехода / А. В. Сясев // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2001. – С.125-137.
6. Kagadiy T. The analysis of the solution of the task about the monoaxial stretching of the anisotropic plate with the curvilinear anisotropy loosened by the circular orifice / T. Kagadiy, O. Belova // Theoretical Foundations of Civil Engineering Polish-Ukrainian Transactions. – 2015. – Vol. 23 –P. 9-14.