ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

УДК 517.958:52/59; 519.711.3

В.Е. БОГАЧЕВ
Белгородский университет кооперации, экономики и права
И.Н БЕЛЯЕВА, Н.А. ЧЕКАНОВ, Б.М. БАШКАТОВ
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Н.Н. ЧЕКАНОВА
Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ "Университет банковского дела"
И.С. КУЗНЕЦОВА
Алексеевский филиал Белгородского государственного национального исследовательского университета

ФУНКЦИЯ ГРИНА И ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В работе описан алгоритм символьно-численного построения функции Грина краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Получены собственные значения для конусообразного стержня и найдена величина внешней нагрузки, при которой стержень теряет устойчивость. Показано, что полученные результаты хорошо согласуются с аналогичными величинами, имеющимися в литературе.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, функция Грина, краевая задача, задача на собственное значение, компьютерное моделирование.

V.E. BOGACHEV
Belgorod University of Cooperation, Economics and Law
I.N. BELYAEVA, N.A. CHEKANOV, B.M. BASHKATOV
Belgorod National Research University
N.N. CHEKANOVA
Kharkov University of Banking
I.S. KUZNETSOVA
Alexeevka branch of Belgorod research university

GREEN'S FUNCTION AND EIGENVALUE PROBLEM

The paper describes the algorithm symbol-numerical construction of the Green's function of the boundary value problem for a second order differential equation . Get eigenvalues for the tapered rod and found the value of the external load , in which the rod loses stability . It is shown that the results are in good agreement with those values available in the literature.

Keywords: ordinary differential equations, Green's function, boundary value problem, eigenvalue problem, computer modeling.

Постановка проблемы

Пусть дано линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ):

$$\hat{L}_n y(x) = 0 \ , \ \hat{L}_n p_0 \frac{d^n}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + p_n \qquad (1)$$

и граничные условия $\sum_k \alpha_{i,k} y^{(k)}(a) + \sum_k \beta_{i,k} y^{(k)}(b) = 0 \ , \ \alpha_{i,k} + \beta_{i,k} \neq 0$.

В общей теории дифференциальных уравнений доказано, что функция Грина существует и единственна при условии, что однородные ОДУ имеют только тривиальное решение $\hat{L}_n y(x) = \lambda y(x)$. Это соответствует тому, что при рассмотрении задачи на собственные значения имеется собственное значение равное нулю $\lambda = 0$. Нетривиальные решения уравнения $\hat{L}_n y(x) = \lambda y(x)$, которые находятся из граничных условий для функции Грина, соответствуют собственным значениям $\lambda \neq 0$. Так как функция Грина строится при помощи всех линейно независимых решений соответствующего дифференциального уравнения, то возникает задача их поиска, что представляет собой достаточно сложную задачу.

Анализ последних исследований и публикаций

Важнейшим понятием в теории дифференциальных уравнений является функция Грина [1-3]. Однако универсальных методов построения функции Грина не существует, в первую очередь, из-за трудности нахождения всех линейно независимых решений соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения. Поэтому возникает проблема построения функции Грина с применением современных компьютерных систем таких как Maple, Mathematica, Reduce и других.

Формулирование цели исследования

Целью статьи является разработка алгоритма и составление компьютерной программы для символьно-численного построения функции Грина в том числе и в виде степенных рядов и применение ее для исследования устойчивости конусообразного стержня при наличии внешней осевой нагрузки.

Изложение основного материала исследования

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \qquad (2а)$$

с граничными условиями

$$\alpha_{1,0}y(a) + \alpha_{1,1}y'(a) + \beta_{1,0}y(b) + \beta_{1,1}y'(b) = 0,$$
$$\alpha_{2,0}y(a) + \alpha_{2,1}y'(a) + \beta_{2,0}y(b) + \beta_{2,1}y'(b) = 0, \qquad (2б)$$

где $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ есть непрерывные функции вместе с их производными на отрезке $[a,b]$, а $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{2,1}$, $\beta_{1,0}$, $\beta_{1,1}$, $\beta_{2,0}$, $\beta_{2,1}$ – заданные числа.

Предположим, что в классе непрерывных решений вместе с производными данная задача на отрезке $[a,b]$ имеет только тривиальное решение. Однако, если ослабить требование непрерывности первой производной, например, в точке $x=\xi$, $a \le \xi \le b$, то для краевой задачи (2) существует ненулевое решение, которое называется функцией Грина. Обозначим ее как $G(x,\xi)$.

Функция Грина имеет следующие свойства [1, 3-5]:

1) является непрерывной вместе со своими производными в точке $x=\xi$;

2) ее производная в точке $x=\xi$ терпит разрыв равный

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)};$$

3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2а);

4) удовлетворяет граничным условиям (2б).

При условии, что краевая задача (2) имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, то существует, как указано выше, одна и только одна функция Грина [4].

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ есть два линейно независимых решения исходного дифференциального уравнения II порядка (2), в этом случае функцию Грина ищем в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_L(x,\xi), & a \le x \le \xi \le b \\ G_R(x,\xi), & a \le \xi \le x \le b \end{cases}, \qquad (3)$$

где

$$G_L(x,\xi) = \sum_{k=1}^{2} \left(A(\xi) + B(\xi)\right) \cdot y_k(x), \qquad (4а)$$

$$G_R(x,\xi) = \sum_{k=1}^{2} \left(A(\xi) - B(\xi)\right) \cdot y_k(x). \qquad (4б)$$

Здесь функция Грина на отрезке $a \le x \le \xi \le b$ обозначается $G_L(x,\xi)$, а на отрезке $a \le \xi \le x \le b$ – $G_R(x,\xi)$.

Из выражений (4) видно, что для построения функции Грина необходимо определить функции $A_k(\xi)$, $B_k(\xi)$. Для их определения используем свойства функции Грина, в частности, ее непрерывность и скачок первой производной по x в точке $x=\xi$. В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} B_1(\xi)y_1(\xi) + B_2(\xi)y_2(\xi) = 0 \\ B_1(\xi)y_1'(\xi) + B_2(\xi)y_2'(\xi) = -\dfrac{1}{2p(\xi)} \end{cases}. \qquad (5)$$

Определитель

$$W(\xi) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \qquad (6)$$

неоднородной системы (6) не равен нулю, так как он есть вронскиан двух линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$. Поэтому система (6) определена и имеет единственное решение $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$, из которой находим эти решения.

Для определения коэффициентов-функций $A_1(\xi)$ и $A_2(\xi)$ используем краевые условия (2б). В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1(\xi)\left[\alpha_{1,0}y_1(a)+\alpha_{1,1}y_1'(a)+\beta_{1,0}y_1(b)+\beta_{1,1}y_1'(b)\right]+ \\ A_2(\xi)\left[\alpha_{1,0}y_2(a)+\alpha_{1,1}y_2'(a)+\beta_{1,0}y_2(b)+\beta_{1,1}y_2'(b)\right]= \\ B_1(\xi)\left[\alpha_{1,0}y_1(a)+\alpha_{1,1}y_1'(a)-\beta_{1,0}y_1(b)-\beta_{1,1}y_1'(b)\right]+ \\ B_2(\xi)\left[\alpha_{1,0}y_2(a)+\alpha_{1,1}y_2'(a)-\beta_{1,0}y_2(b)-\beta_{1,1}y_2'(b)\right] \\ \\ A_1(\xi)\left[\alpha_{2,0}y_1(a)+\alpha_{2,1}y_1'(a)+\beta_{2,0}y_1(b)+\beta_{2,1}y_1'(b)\right]+ \\ A_2(\xi)\left[\alpha_{2,0}y_2(a)+\alpha_{2,1}y_2'(a)+\beta_{2,0}y_2(b)+\beta_{2,1}y_2'(b)\right]= \\ B_1(\xi)\left[\alpha_{2,0}y_1(a)+\alpha_{2,1}y_1'(a)-\beta_{2,0}y_1(b)-\beta_{2,1}y_1'(b)\right]+ \\ B_2(\xi)\left[\alpha_{2,0}y_2(a)+\alpha_{2,1}y_2'(a)-\beta_{2,0}y_2(b)-\beta_{2,1}y_2'(b)\right] \end{cases}. \quad (7)$$

Отметим, что если краевая задача (2) является самосопряженной, то есть выполняются условия [6]:

$$p_0(b)\begin{vmatrix}\alpha_{1,0} & \alpha_{1,1}\\ \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1}\end{vmatrix}=p_0(a)\begin{vmatrix}\alpha_{2,0} & \alpha_{2,1}\\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1}\end{vmatrix}, \quad (8)$$

тогда функция Грина является симметричной $G(x,\xi)=G(\xi,x)$.

Подставляя найденные коэффициенты функции $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$, $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$ в выражение (5) находим функцию Грина в аналитическом виде. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ представляют собой степенные ряды, то и функция Грина будет представлена в виде степенных рядов. В соответствии с приведенными выше формулами (3 – 8) был разработан алгоритм и составлена программа GRESA для символьно-численного построения функции Грина в среде Maple.

Алгоритм построения функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений II порядка

Ввод:

$p_0(x)\neq 0$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ – коэффициенты-функции в заданном дифференциальном уравнении второго порядка (2);

a, b – граничные точки отрезка $[a,b]$, на котором ищется функция Грина.

$\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{2,1}$, $\beta_{1,0}$, $\beta_{1,1}$, $\beta_{2,0}$, $\beta_{2,1}$ – коэффициенты в граничных условиях (2б) для конкретной краевой задачи.

Вывод:

$y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальная система решений заданного дифференциального уравнения (2а);

$G\_left(x,\xi)$ – $G_L(x,\xi)$, функция Грина на отрезке $a\le x\le\xi\le b$;

$G\_right(x,\xi)$ – $G_R(x,\xi)$, функция Грина на отрезке $a\le\xi\le x\le b$.

Описание шагов алгоритма:

1. Нахождения двух линейно независимых решений заданного дифференциального уравнения второго порядка (2а).
2. Ввод матрицы начальных условий и вычисление ее ранга (2б).
3. Проверка краевой задачи на самосопряженность (8).
4. Вычисление и проверка коэффициентов-функций $B_1(\xi)$, $B_2(\xi)$, исходя из системы уравнений (6).
5. Вычисление и проверка коэффициентов-функций $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$, исходя из заданных граничных условий (8).
6. Проверка существования функции Грина, то есть неравенство нулю детерминанта системы (7).
7. Построение функции Грина $G\_left(x,\xi)$ ($G_L(x,\xi)$, $a\le x\le\xi\le b$) и $G\_right(x,\xi)$ ($G_R(x,\xi)$, $a\le\xi\le x\le b$).

8. Проверка всех свойств функции Грина $G(x,\xi)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения

$$\frac{d}{dx}\left[(1+\alpha x)^4 \frac{dy}{dx}\right]+\lambda^2 y=0 \tag{9}$$

с однородными краевыми условиями

$$y(0)=0\,,\; y(L)=0\,.$$

Эта задача описывает продольный изгиб стержня, имеющего форму усеченного конуса [7]. В этой задаче необходимо определить наименьшую критическую силу, при которой стержень теряет устойчивость. Критическая сила равна произведению модуля Юнга на наименьшее собственное число. Параметр α определяет различие диаметров усеченного конуса.

С помощью разработанной программы по описанному выше алгоритму была построена функция Грина и решена задача на собственные значения (9).

В этой задаче два линейно независимых $y_1(x)$, $y_2(x)$ решения имеют вид:

$$y_1(x)=\alpha\cos\left[\frac{\lambda}{\alpha(1+\alpha x)}\right]+\frac{\lambda}{1+\alpha x}\sin\left[\frac{\lambda}{\alpha(1+\alpha x)}\right], \tag{10а}$$

$$y_2(x)=-\alpha\sin\left[\frac{\lambda}{\alpha(1+\alpha x)}\right]+\frac{\lambda}{1+\alpha x}\cos\left[\frac{\lambda}{\alpha(1+\alpha x)}\right]. \tag{10б}$$

Если значения параметра λ не равны собственным значениям, определяемых равенством нулю следующего определителя

$$U=\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(L) & y_2(L)\end{vmatrix}\neq 0\,, \tag{11}$$

то получена функция Грина в следующем виде:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} G_L(x,\xi), & 0\le x\le\xi\le L \\ G_R(x,\xi), & 0\le\xi\le x\le L\end{cases}, \tag{12а}$$

где

$$G_L(x,\xi)=-\frac{\sin\left[z_1(x,\lambda)\right]\cdot\sin\left[z_2(\xi,\lambda)\right]\left(\alpha^2+\alpha^3 x-\alpha^2 x\,\mathrm{ctg}\left[z_1(x,\lambda)\right]\lambda+\lambda^2\right)}{\sin\left[z(L,\lambda)\right](1+\alpha\,\xi)(1+\alpha\,x)\lambda^3\left(\alpha^2+\alpha^3 L-\alpha^2 L\,\mathrm{ctg}\left[z(L,\lambda)\right]\lambda+\lambda^2\right)}\cdot$$
$$\left(\alpha^2+\alpha^3 L+\xi\,\alpha^3+\xi\,\alpha^4 L-\alpha^2 L\,\mathrm{ctg}\left[z_2(\xi,\lambda)\right]\lambda+\alpha^2\xi\,\mathrm{ctg}\left[z_2(\xi,\lambda)\right]\lambda+\lambda^2\right), \tag{12б}$$

$$G_R(x,\xi)=-\frac{\sin\left[z_1(\xi,\lambda)\right]\cdot\sin\left[z_2(x,\lambda)\right]\left(\alpha^2+\xi\,\alpha^3-\alpha^2\xi\,\mathrm{ctg}\left[z_1(\xi,\lambda)\right]\lambda+\lambda^2\right)}{\sin\left[z(L,\lambda)\right](1+\alpha\,\xi)(1+\alpha\,x)\lambda^3\left(\alpha^2+\alpha^3 L-\alpha^2 L\,\mathrm{ctg}\left[z(L,\lambda)\right]\lambda+\lambda^2\right)}$$
$$\left(\alpha^2+\alpha^3 L+x\alpha^3+x\alpha^4 L-\alpha^2 L\,\mathrm{ctg}\left[z_2(x,\lambda)\right]\lambda+\alpha^2 x\,\mathrm{ctg}\left[z_2(x,\lambda)\right]\lambda+\lambda^2\right), \tag{12в}$$

где $z(L,\lambda)=\dfrac{\lambda L}{1+\alpha L}$, $z_1(x,\lambda)=\dfrac{\lambda x}{1+\alpha x}$, $z_2(\xi,\lambda)=\dfrac{\lambda(-\xi+L)}{(1+\alpha L)(1+\alpha\xi)}$.

Если детерминант (11) не равен нулю, то существуют собственные значения λ, которые определяются из решения следующего трансцендентного уравнения:

$$\lambda^2-\alpha^2 L\,ctg\left(\frac{\lambda L}{1+\alpha L}\right)\lambda+\alpha^2+\alpha^3 L=0\,. \tag{13}$$

В книге [7] приведена приближенная формула (в случае $a \ll 1$) для вычисления наименьшего собственного значения краевой задачи (10) в виде:

$$\frac{1}{\lambda^4}=L^4\left(\frac{1}{90}-\frac{2}{45}\alpha\right), \tag{14}$$

которая дает отклонение от точного значения меньше, чем на 5%.

Для конкретных значений параметров $L=1$ и $\alpha=0.01$ нами было проведено сравнение значения наименьшего собственного значения, полученного по точной формуле (13) с результатами, следующими из формулы Михлина (14). По формуле (13) была получена величина собственного значения равная $\lambda = 3.17$, а по формуле (14) – $\lambda = 3.11$, которые отличаются менее, чем на 2%.

Для наглядности на рис. 1 приведены графики двух функций

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 + \alpha^2 + \alpha^3 L\,, \qquad f_2(\lambda) = -\alpha^2 L\,ctg\left(\frac{\lambda L}{1+\alpha L}\right)\lambda\,, \tag{15}$$

из точек пересечения которых можно также найти величины первых собственных значений, которые согласуются с полученными выше результатами.

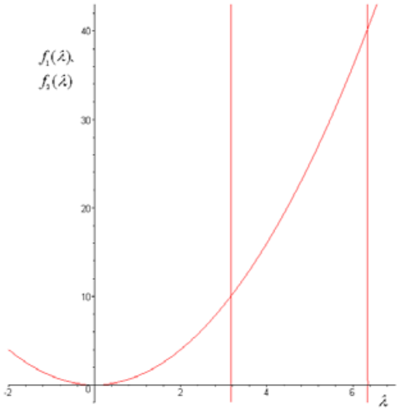

Рис 1. Графики функций (15)

Выводы

В работе разработан алгоритм для символьно-численного построения функции Грина дифференциальных уравнений второго порядка, согласно которому составлена программа, с помощью которой исследована задача на устойчивость конусообразного стержня при наличии внешней нагрузки. В этой задаче найдены собственные значения и величина критической нагрузки, при которой стержень теряет устойчивость – происходит выпучивание стержня. Полученные результат хорошо согласуются с известными из литературы.

В дальнейшем планируется решение других задач на собственные значения.

Список использованной литературы

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Дж. Сансоне – М.: Изд-во иностранной литературы. – 1953. – Т.1. – 346 с.
2. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Дж. Сансоне. М.:ИЛ,1954. –Т.2. –416с.
3. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения / Ф. Трикоми. – М.: ИЛ, 1962. – 352 с.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1976. – 216 с.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – М. Ижевск: НИЦ РХД, 2005. – 176 с.
6. Привалов И.И. Интегральные уравнения / И.И. Привалов. – М.-Л.: ОНТИ, 1937. – 248 с.
7. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники / С.Г. Михлин. – М., Л.: ОГИЗ изд. тех.-теор. лит., 1947. – 304 с.