УДК 534.1

Ю.В. ЧОВНЮК
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины
О.М. ШУТОВСКИЙ
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ: ЭФФЕКТЫ ВОЛНООБРАЗОВАНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖЕНИЕМ ИСТОЧНИКОВ

Предложена и обоснована дискретно-континуальная модель, позволяющая осуществлять анализ динамического поведения упругих элементов машин и конструкций. Рассмотрены эффекты волнообразования, вызванные движением источников.

Ключевые слова: анализ, динамика, упругость, машины, конструкции, волнообразование, движение, источники.

Ю.В. ЧОВНЮК
Національний університет біоресурсів і природокористування України
О.М. ШУТОВСЬКИЙ
Київський національний університет будівництва і архітектури

АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН І КОНСТРУКЦІЙ: ЕФЕКТИ ХВИЛЕУТВОРЕННЯ, ВИКЛИКАНІ РУХОМ ДЖЕРЕЛ

Запропонована й обґрунтована дискретно-континуальна модель, яка дозволяє здійснювати аналіз динамічної поведінки пружних елементів машин і конструкцій. Розглянуті ефекти хвилеутворення, викликані рухом джерел.

Ключові слова: аналіз, динаміка, пружність, машини, конструкції, хвилеутворення, рух, джерела.

Y.V. CHOVNYUK
National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine
O.M. SHUTOVSKY
Kyiv National University of Constructions and Architecture

ANALYSIS OF DYNAMIC BEHAVIOR OF ELASTIC ELEMENTS OF MACHINES AND CONSTRUCTIONS: EFFECTS OF WAVES' FORMATION CAUSED BY MOTION OF GENERATORS

The discrete and continual model is based and proposed which gives one the possibility to analyze the dynamic behavior of machines' and constructions' elastic elements. The effects of waves' formation due to the motion of these elements (so-called generators) are discussed.

Key words: analysis, dynamic, elasticity, machines, constructions, waves' formation, motion, generator.

Постановка проблемы.

Многие широко известные в классической физике волновые эффекты практически не учитываются при анализе динамического поведения упругих систем. Отчасти это, по-видимому, объясняется тем, что особенности проявления волновых эффектов в ситуациях, типичных для динамики машин, остаются неизученными, другими словами, отсутствует элементарная культура знаний о волнах в приложениях к задачам машиноведения. В данной работе полезность именно таких знаний для решения технических проблем продемонстрирована на ряде конкретных примеров анализа динамического поведения упругих элементов машин и конструкций.

Анализ последних исследований и публикаций.

Исследования, предпринятые в указанном направлении [1-19], углубили понимание многих явлений, и позволили увидеть пути решения ряда актуальных технических проблем. Так, например, оказывается, что движение объектов по направляющим (подвесные канатные дороги, грузовые тележки мостовых кранов и пр.), вообще говоря, сопровождается волнообразованием. При этом посредником преобразования энергии поступательного движения объекта в энергию излучения является сила давления упругих волн, которая, как оказалось, во многих случаях даёт важнейший вклад в результирующую силу сопротивления движению. Причём этот вклад может быть как положительным, так и отрицательным.

Например, ярким представителем в этом отношении является хорошо изученный в классической физике эффект Доплера. Частоты колебаний упругой системы, вынуждаемые равномерно движущимся

$x = v \cdot t$ гармоническим источником, смещены по отношению к частоте источника Ω. Смещение частоты находится из кинематического инварианта:

$$\omega - k \cdot v = \Omega, \tag{1}$$

выражающего равенство фаз возбуждаемых волн фазе источника и дисперсионного уравнения:

$$f(\omega, k) = 0, \tag{2}$$

связывающего частоты ω и волновые числа k возможных волн в системе.

В неограниченных системах из всех решений (1), (2) реализуются только те, которые удовлетворяют требованию ограниченности смещений на бесконечности ($x \to \pm\infty$):

$$\operatorname{Im} k > 0 \text{ при } x < v \cdot t, \ \operatorname{Im} k < 0 \text{ при } x > v \cdot t \tag{3}$$

и условиям излучения Мандельштама:

$$\frac{d\omega}{dk} < v, \ \ x < v \cdot t, \ \ \frac{d\omega}{dk} > v, \ \ x > v \cdot t. \tag{4}$$

Ниже эти соображения будут использованы при решении некоторых задач анализа динамического поведения упругих элементов машин и конструкций, в котором учтены эффекты волнообразования, вызванные движением источников.

Формулирование цели исследования.

Цель данного исследования состоит в обосновании методики расчёта динамических характеристик и анализа динамического поведения упругих элементов машин и конструкций в целом, в которых учитываются эффекты волнообразования, вызванные движением источников.

Изложение основного материала исследования.

Рассмотрим несколько примеров, которые демонстрируют существенное влияние эффектов волнообразования, вызванных движением источников, и адекватно моделируют особенности динамического поведения упругих элементов машин и конструкций.

1. Эффект волнообразования.

Пример 1. В отсутствие дисперсии, как это имеет место для поперечных волн в струнах, крутильных и продольных волн в стержнях, когда динамический процесс описывается волновым уравнением типа $\omega^2 - c_0{}^2 \cdot k^2 = 0,$ где c_0 – скорость распространения волн определённого типа в упругих элементах машин и конструкций, все волновые числа принимают действительные значения и скорости переноса волновой энергии $v_{гр} = d\omega / dk = \pm c_0$ (где $v_{гр}$ – групповая скорость волн). В этом случае задача кинематики (1) – (4) в зависимости от скорости v движения источника имеет качественно различные решения. При $v < c_0$ движущийся источник частоты Ω излучает одну волну впереди себя (в $+x$ направлении) с $\omega = \Omega \cdot (1-\beta)^{-1}$ и одну волну позади (в $-x$ направлении) с $\omega = \Omega \cdot (1+\beta)^{-1}$, где $\beta = v / c_0$. При $v > c_0$ вперёд излучения нет. Обе волны с указанными частотами возбуждаются за источником. Причём волна с $\omega = \Omega \cdot (\beta - 1)^{-1}$ бежит ему вослед.

Динамические следствия эффекта Доплера выявим на примере бесконечной струны с движущейся вдоль неё сосредоточенной массой m, к которой приложены поперечная $F(t) = F_0 \cdot \sin\Omega t$ и продольная $T_g(t)$ силы. (Модель движения тела конечной массы вдоль подвесной канатной дороги). Соответствующие волновые уравнения и условия на движущейся границе $x = l(t)$ запишутся в виде [1] $u_{tt} - c_0{}^2 \cdot u_{xx} = 0$ ($c_0 = \sqrt{N / \rho}$):

$$\begin{cases} u(l(t)+0,t) = u(l(t)-0,t) = u^0(t), \ \ m \cdot \ddot{u}^0 = [N \cdot u_x + \dot{l} \cdot \rho_0 \cdot u_t] + F(t), \\ m \cdot \ddot{l} = -\dfrac{1}{2} \cdot [\rho_0 \cdot u_t{}^2 + N \cdot u_x{}^2 + 2 \cdot \rho_0 \cdot \dot{l} \cdot u_x \cdot u_t] + T_g(t). \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $u(x,t)$ – поперечное отклонение струны; квадратные скобки – разность стоящих в них величин справа и слева от движущейся границы; N – натяг; ρ_0 – погонная плотность струны ($N = E / l,$ где E – модуль упругости материала струны, l – её длина).

Будем считать, что движение массы вдоль струны равномерное: $l(t) = v \cdot t,$ где $v = const$ (v – скорость движения массы вдоль струны). В таком случае из уравнения движения массы вдоль струны находим выражение для внешней силы, обеспечивающей равномерность движения, т.е. для силы давления волны:

$$T_g = \frac{1}{2} \cdot [\rho_0 \cdot u_t{}^2 + N \cdot u_x{}^2 + 2 \cdot v \cdot \rho_0 \cdot u_x \cdot u_t]. \tag{6}$$

При докритических скоростях ($v < c_0$) , согласно (3) – (5),

$$u(x,t) = \begin{cases} A \cdot \sin(\omega_1 t + k_1 x + \varphi), & x < v \cdot t, \\ A \cdot \sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi), & x > v \cdot t, \end{cases} \tag{7}$$

где:

$$A = \frac{c_0}{2\Omega} \cdot \frac{(F_0 / N)}{\sqrt{1 + a_0^2}}; \ \omega_1 = \frac{\Omega}{1+\beta}; \ \omega_2 = \frac{\Omega}{1-\beta}; \ k_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{c_0}; \ \varphi = -2arctg(a_0 + \sqrt{1 + a_0^2}); \ a_0 = \frac{mc_0\Omega}{2N};$$

$$\beta = \frac{v}{c_0}.$$

Подставляя полученное решение в (6), находим силу сопротивления движению, являющуюся следствием волнообразования:

$$T_g = \frac{\beta}{(1-\beta^2)} \cdot \frac{(F_0^2 / N)}{(1 + a_0^2)} \cdot \cos^2 \Omega t. \tag{8}$$

Отсюда видно, что при движении со скоростями, близкими к критической ($\beta \to 1$) , сила сопротивления движению может быть сколь угодно велика.

При закритических скоростях ($v > c_0$), согласно (3) – (5),

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\Omega}{2c_0} \cdot \left(\frac{F_0}{N}\right) \cdot \{\cos(\omega_1 t + k_1 x) - \cos(\omega_2 t - k_2 x)\}, & x < v \cdot t, \\ 0, \ x > v \cdot t. \end{cases} \tag{9}$$

$$T_g = \frac{F_0^2 \cdot N}{\beta^2 \cdot (-1 + \beta^2)} \cdot \cos^2 \Omega t. \tag{10}$$

В этом случае решение не зависит от массы m, что и естественно, поскольку $u^0(t) = 0$.

Пример 2. В системах с дисперсией эффект Доплера проявляется более сложно. Так, в случае балки модели Бернулли – Эйлера дисперсионное уравнение (2) запишется в виде: $\omega^2 - \alpha \cdot k^4 = 0$, где $\alpha = \sqrt{(IE)/(\rho F)}$; $F -$ площадь поперечного сечения балки; $I -$ момент инерции его поворота; $\rho -$ удельная плотность вещества; $E -$ модуль упругости материала балки. Разрешая его совместно с (1), находим следующее решение задачи кинематики волн, удовлетворяющее условиям (3) и (4).

При докритических скоростях, когда $|v| < v_{кр} = 2\sqrt{\alpha \cdot \Omega}$, движущийся источник частоты Ω излучает одну гармоническую волну впереди себя (в $+x$ направлении) с

$$\omega = \left(v + \sqrt{v_{кр}^2 + v^2}\right)^2 /(4\alpha), \ k = \left(v + \sqrt{v_{кр}^2 + v^2}\right)/(2\alpha) \tag{11}$$

и одну гармоническую волну позади (в $-x$ направлении) с

$$\omega = \left(v - \sqrt{v_{кр}^2 + v^2}\right)^2 /(4\alpha), \ k = \left(v - \sqrt{v_{кр}^2 + v^2}\right)/(2\alpha). \tag{12}$$

Кроме того, слева и справа от движущегося источника возникают пространственно неоднородные волны: в области $x > v \cdot t$ с

$$\omega = -\left(v + i \cdot \sqrt{v_{кр}^2 - v^2}\right)^2 /(4\alpha), \ k = -\left(v + i \cdot \sqrt{v_{кр}^2 - v^2}\right)/(2\alpha), \tag{13}$$

а в области $x < v \cdot t$ с

$$\omega = -\left(-v + i \cdot \sqrt{v_{кр}^2 - v^2}\right)^2 /(4\alpha), \ k = \left(-v + i \cdot \sqrt{v_{кр}^2 - v^2}\right)/(2\alpha). \tag{14}$$

Огибающие этих волн экспоненциально спадают по мере удаления от движущегося источника.

При закритических скоростях, когда $v > v_{кр}$, по каждую сторону от источника возбуждаются по две волны. Вместо сопровождающих источник неоднородных волн возникнут отводящие от него энергию однородные волны с

$$\omega = -\left(v + \sqrt{v^2 - v_{кр}{}^2}\right)^2 / (4\alpha), \;\; k = -\left(v + \sqrt{v^2 - v_{кр}{}^2}\right) / (2\alpha) \qquad (15)$$

в области $x > v \cdot t$ и

$$\omega = -\left(-v + \sqrt{v^2 - v_{кр}{}^2}\right)^2 / (4\alpha), \;\; k = \left(-v + \sqrt{v^2 - v_{кр}{}^2}\right) / (2\alpha) \qquad (16)$$

в области $x < v \cdot t$.

Анализ ряда динамических следствий эффекта Доплера в балке модели Бернулли – Эйлера проведен также в работах [2-5].

2. Излучение волн движущимся источником нулевой частоты.

В динамике конструкций, несущих подвижные нагрузки, хорошо известно [8] о существовании так называемых критических скоростей, при которых прогибы под нагрузкой неограниченно (в линейном приближении) нарастают. При отыскании этих скоростей обычно полагают, что нагрузка постоянна (нулевой частоты). Однако долгое время оставался без ответа вопрос о динамическом поведении направляющих при закритических скоростях.

Оказалось [2,4,9,10], что при закритических в указанном смысле скоростях имеет место эффект типа Вавилова – Черенкова [11], выражающийся в излучении волн равномерно движущимся источником нулевой частоты. Подробное изучение особенностей его проявления в упругих системах представляет интерес, по крайней мере, по двум причинам. Знание условий его проявления, во-первых, указывает пути борьбы с соответствующими источниками вибраций в машинах и создания новых вибротехнологий, а во-вторых, позволяет грамотно рассчитывать силовые воздействия в движущихся контактах.

Пример 3. Одна из проблем токосъёма в электрическом транспорте состоит в определении параметров системы пантограф – электрический подвес, при которых в подвесе не возбуждались бы волны, а силы взаимодействия в движущемся контакте не превышали бы допустимых на разрыв и ускоренный износ. (Грузовые троллейвозы интенсивно используются в настоящее время в открытых и закрытых горных разработках, и именно при эксплуатации подобных машин, предотвращающих взрывоопасные ситуации в карьерах, возникают подобные проблемы).

В простейшей модели задача сводится к анализу динамического поведения подпружиненной струны с равномерно движущимся вдоль неё поджимным устройством. В этом случае из уравнения поперечных колебаний струны $\rho_0 \cdot u_{tt} - N \cdot u_{xx} + h_0 \cdot u = 0$, где h_0 – коэффициент жёсткости основания, получаем следующее дисперсионное уравнение (2):

$$\omega^2 - c_0{}^2 \cdot k^2 - \omega_*{}^2 = 0, \quad \omega_* = \sqrt{h_0 / \rho_0}. \qquad (17)$$

Используя (17), из (1), (3) и (4) находим, что при докритических скоростях, когда $v < c_0$, источник нулевой частоты $(\Omega = 0)$ волн не излучает, профиль прогиба под нагрузкой симметричен и экспоненциально спадает по мере удаления от неё: слева $(x < v \cdot t)$ $k = (i\omega_* / c_0) / \sqrt{1 - \beta^2}$, а справа $(x > v \cdot t)$ $k = -(i\omega_* / c_0) / \sqrt{1 - \beta^2}$, где $\beta = v / c_0$. При закритических скоростях, когда $v > c_0$, перед нагрузкой $(x > v \cdot t)$ прогибов нет $(u(x,t) = 0$, а за нагрузкой возбуждается бегущая ей вослед волна с $\omega = (\beta\omega_*) / \sqrt{\beta^2 - 1}$ и $k = (\omega_* / c_0) / \sqrt{\beta^2 - 1}$.

Записывая условие в движущемся контакте $(x = v \cdot t)$ в виде [1]:

$$\begin{cases} u(vt + 0, t) = u(vt - 0, t) = u_0(t), \\ m\ddot{u}_0 + \tilde{k} u_0 = [N \cdot u_x + v\rho_0 u_t] + F_0, \end{cases} \qquad (18)$$

где m и $\tilde{k}$ – параметры пантографа; F_0 – постоянная сила поджатия, для случая закритических скоростей $(v > c_0)$ имеем:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0 \cdot \sin(\omega t - kx), & x < v \cdot t, \\ 0, & x > v \cdot t, \end{cases} \qquad u_0 = \frac{(c_0 F_0)/(\omega_* \cdot N)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}. \qquad (19)$$

При этом сила сопротивления движению, обусловленная волнообразованием [1],

$$T_g = \frac{1}{2} \cdot \left[N \cdot u_x{}^2 + \rho_0 \cdot u_t{}^2 + 2v\rho_0 u_x u_t\right] = \frac{1}{2} \cdot (F_0{}^2 / N) / (\beta^2 - 1). \qquad (20)$$

По характеру её зависимости от скорости движения видно, что она может быть причиной разрыва провода.

В пренебрежении диссипативными потерями, как было показано выше, при докритических скоростях ($v < c_0$) прогиб под нагрузкой симметричен и, следовательно, сопротивление движению отсутствует ($T_g = 0$). Если же учесть распределённые потери, то профиль под нагрузкой окажется несимметричен и сопротивление движению будет даже в отсутствие трения.

Поскольку в этом случае дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\omega^2 - 2i\gamma\omega - c_0{}^2 \cdot k^2 - \omega_*{}^2 = 0, \;\; i^2 = -1, \tag{21}$$

где $\gamma = \delta / \rho_0$, $\delta -$ коэффициент вязкости, то из решения задачи кинематики волн (1) – (4) следует, что слева от нагрузки ($x < v \cdot t$) :

$$c_0 k = i\kappa_1 = i\left\{\sqrt{\omega_*{}^2 \cdot (1-\beta^2) + (\beta\gamma)^2} - \beta\gamma\right\}/(1-\beta^2), \tag{22}$$

а справа ($x > v \cdot t$):

$$c_0 k = i\kappa_2 = -i\left\{\sqrt{\omega_*{}^2 \cdot (1-\beta^2) + (\beta\gamma)^2} + \beta\gamma\right\}/(1-\beta^2). \tag{23}$$

Далее, конструируя соответствующим образом решение для смещений:

$$u = \begin{cases} A \cdot \exp[(x/c_0 - \beta t) \cdot \kappa_1], & x < v \cdot t, \\ B \cdot \exp[(x/c_0 - \beta t) \cdot \kappa_2], & x > v \cdot t, \end{cases} \tag{24}$$

из (18) находим:

$$A = B = \left(\frac{F_0}{c_0 N}\right) / \left\{2 \cdot \sqrt{\omega_*{}^2 \cdot (1-\beta^2) + (\beta\gamma)^2} + (1-\beta^2) \cdot k\right\}. \tag{25}$$

Подставляя найденное решение в выражение для сил давления волн [1]:

$$T_g = \frac{1}{2} \cdot \left[\rho_0 \cdot u_t{}^2 + N \cdot u_x{}^2 - h_0 \cdot u^2 + 2v\rho_0 u_x u_t\right], \tag{26}$$

находим, что при докритических скоростях ($\beta < 1$) :

$$T_g = (1-\beta^2) \cdot \frac{N}{2c_0{}^2} \cdot (\kappa_2 - \kappa_1) \cdot A^2 = \frac{2\gamma\beta}{(1-\beta^2)} \cdot \frac{N}{c_0{}^2} \cdot A^2 \cdot \sqrt{\omega_*{}^2 \cdot (1-\beta^2) + (\beta\gamma)^2}. \tag{27}$$

Отсюда видно, что для расчёта допустимых скоростей движения пантографа учёт распределённых потерь принципиально необходим, т.к. продольная составляющая силы, действующей на подвес в контакте, достигает опасных значений ещё при докритических скоростях.

Пример 4. Эффект излучения упругих волн равномерно движущимся источником нулевой частоты характерен для систем с конвекцией (трубопроводов, передач с гибкими связями, лентопротяжных механизмов и т.п.), а также для дорожных конструкций, несущих подвижные перегрузки.

Рассмотрим равномерное движение экипажа вдоль упругой направляющей в предположениях, соответствующих следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} IEu_{xxxx} + \rho F u_{tt} + h_0 u = 0, \\ u(vt+0,t) = u(vt-0,t) = u_0(t), \;\; u_x(vt+0,t) = u_x(vt-0,t) = w_0(t), \\ m\ddot{u}_0 + \tilde{k}^* u_0 = -IE[u_{xxxx}] + F_0, \;\; I_0 \ddot{w}_0 + G_0 w_0 = IE[u_{xx}], \end{cases} \tag{28}$$

где m, I_0 и $\tilde{k}^*, G_0 -$ параметры упругости и инерционности «экипажа»; $F_0 = const.$ Полагается , что на бесконечности $(x \to \pm\infty)$ прогибы ограничены и выполняются условия излучения Мандельштама [12].

Как следует из анализа задачи кинематики волн (1) – (4), при докритических скоростях, когда $v < v_{кр} = \sqrt{2\alpha \cdot \omega_*}$ $(\alpha = \sqrt{(IE)/(\rho F)}, \;\; \omega_* = \sqrt{h_0/(\rho F)})$, прогиб под нагрузкой локализован и симметричен, т.е. излучения нет. При закритических скоростях, когда $v > v_{кр}$, излучаются две волны. Одна из них бежит перед нагрузкой ($x > v \cdot t$) с волновым числом:

$$k_1 = \sqrt{v^2 + \sqrt{v^4 - v_{кр}{}^4}} / (\sqrt{2} \cdot \alpha), \tag{29}$$

а другая ей вослед ($x < v \cdot t$) с волновым числом:

$$k_2 = \sqrt{v^2 - \sqrt{v^4 - v_{кр}{}^4}} / (\sqrt{2} \cdot \alpha). \tag{30}$$

Амплитуды этих волн, согласно (28), соответственно равны:

$$\begin{cases} A_1 = \left(\dfrac{F_0}{k_1}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{(G_0 k_1)^2 + (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)}}{\tilde{k}^* G_0 - (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2}, \\ A_2 = \left(\dfrac{F_0}{k_2}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{(G_0 k_2)^2 + (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)}}{\tilde{k}^* G_0 - (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2}. \end{cases} \tag{31}$$

Что касается силы сопротивления движению, т.е. силы давления волн, то она определяется по формуле [13]:

$$T_g = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\rho F u_t^2 + IE u_{xx}^2\right) - IE u_x u_{xxx} + v \rho F u_x u_t\right], \tag{32}$$

или с учётом (28):

$$T_g = \left(\tilde{k}^* u_0 - F_0\right) w_0 + \frac{1}{2} \cdot IE[u_{xx}^2] =$$

$$= \frac{F_0^2 IE (k_1^2 - k_2^2)}{\left\{\tilde{k}^* \cdot G_0 + (IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2\right\}^2} \cdot \left\{(IE)^2 \cdot (k_2^2 - k_1^2)^2 + \frac{G_0^2}{2} \cdot (k_1^2 + k_2^2)\right\}. \tag{33}$$

3. Эффект тормозного излучения.

Если частота источника лежит в полосе непропускания, то при его движении, начиная с некоторой скорости $v > v_*$, он начинает излучать. Такое излучение принято называть тормозным [14].

Пример 5. Для струны на упругом основании источник частоты $\Omega < \omega_*$ будет излучать волны при скорости v, превышающей v_*, а именно:

$$v > v_* = c_0 \cdot \sqrt{1 - (\Omega / \omega_*)^2}, \quad \omega_* = \sqrt{h_0 / \rho_0}, \tag{34}$$

где ω_* – критическая частота; h_0 – коэффициент жёсткости «постели»; ρ_0 – погонная плотность струны; $c_0 = \sqrt{N / \rho_0}$; N – натяг. Причём перед источником ($x > v \cdot t$) побежит волна с волновым числом:

$$k = \left(v\Omega + \omega_* \cdot \sqrt{v^2 - v_*^2}\right) / (c_0^2 - v^2), \tag{35}$$

а вослед ему ($x < v \cdot t$) - волна с волновым числом:

$$k = \left(v\Omega - \omega_* \cdot \sqrt{v^2 - v_*^2}\right) / (c_0^2 - v^2). \tag{36}$$

В случае движения по струне сосредоточенной массы m с приложенной к ней силой $F(t) = F_0 \cdot \sin \Omega t$ из соответствующих условий на движущейся границе ($x = v \cdot t$) :

$$\begin{cases} u(vt + 0, t) = u(vt - 0, t) = u_0(t), \\ m\ddot{u}_0 = \left[N u_x + v \rho_0 u_t\right] + F(t) \end{cases} \tag{37}$$

находим, что амплитуды возбуждаемых слева и справа волн одинаковы и равны:

$$A = F_0 / \sqrt{m^2 \Omega^4 + 4 \rho_0^2 \omega_*^2 \cdot (v^2 - v_*^2)} \tag{38}$$

и сила давления этих волн на сосредоточенную массу:

$$T_g = \left(2 v \rho_0 \Omega \omega_* \cdot \sqrt{v^2 - v_*^2} \cdot A^2\right) / (c_0^2 - v^2) \tag{39}$$

будет тормозящей.

Выводы

1. Движущийся источник постоянной частоты, как видно из примеров 1,2, возбуждает в направляющей колебания одновременно на нескольких частотах, которые могут сильно различаться. Отсюда ясно, почему широко практикуемый метод расчёта динамики систем с движущимися нагрузками, основанный на представлении решения в виде ряда по собственным формам колебаний соответствующей однородной задачи [6,7], имеет, вообще говоря, плохую сходимость. Ведь структура искомого решения не адекватна истинному процессу.

2. Для упрощения и одновременного повышения точности инженерных расчётов необходимо при конструировании вынужденных решений закладывать в их структуру информацию о сдвиге частот, полученную из предварительного решения задачи кинематики волн.

3. Целесообразно рассчитывать величину сил давления волн на объект, являющийся носителем движущегося источника. Это позволит в стадии проектирования точнее прогнозировать результирующую сил сопротивления в движущихся контактах.

4. Динамике конструкций, несущих подвижные нагрузки, присуще существование критических скоростей, при которых прогибы под нагрузкой неограниченно нарастают (в линейном приближении). Постоянная нагрузка (нулевой частоты) особым образом изменяет динамическое поведение направляющих при закритических скоростях, в частности, при закритических скоростях имеет место эффект типа Вавилова – Черенкова. Подробное изучение особенностей проявления указанного эффекта в упругих системах представляет интерес по двум причинам: а) знание условий его проявления указывает пути борьбы с соответствующими источниками вибраций в машинах, конструкциях и создания новых вибротехнологий; б) позволяет грамотно, научно обоснованно, рассчитывать силовые воздействия в движущихся контактах.

5. Проведен анализ сил давления волн на сосредоточенную массу для случая, когда излучение волн является тормозным. Этот эффект реализуется в тех случаях, когда частота источника лежит в полосе непропускания. Тогда при движении источника, начиная с некоторой скорости $v > v_*$, последний начинает излучать (т.н. тормозное излучение [14]).

6. Полученные в данной работе результаты могут в дальнейшем служить для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта параметров динамического поведения упругих элементов машин и конструкций при учёте в последних эффектов волнообразования, вызванных движением источников, как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

Список использованной литературы

1. Весницкий А.И. Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками/А.И. Весницкий, Л.Э. Каплан, Г.А. Уткин//Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47, №5. – С. 863-866.
2. Весницкий А.И. Излучение упругих волн в одномерных системах равномерно движущимися источниками / А.И. Весницкий, С.В. Крысов, С.А. Сьянов, Г.А. Уткин. – Горький, 1982. – 17с. (Препринт/НИРФИ; №160).
3. Сьянов С.А. Вынужденные колебания экипажа, движущегося вдоль упругой направляющей / С.А. Сьянов // Проблемы машиностроения. – 1985. – Вып. 23. – С. 12-14.
4. Крысов С.В. Излучение упругих волн в одномерных системах движущимся источником / С.В. Крысов // Прикладная механика и техническая физика. – 1983. - №1. – С. 150-153.
5. Крысов С.В. Силы сопротивления движению постоянных нагрузок вдоль упругих направляющих/С.В. Крысов, В.В. Холуев//Динамика систем: Межвузовский сборник. – Горький: ГГУ, 1985. – С. 142-149.
6. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем/А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734с.
7. Кохманюк С.С. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках/С.С. Кохманюк, Е.Г. Янютин, Л.Г. Романенко. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232с.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний/В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408с.
9. Весницкий А.И. Особенности проявления эффекта Доплера в одномерных упругих системах с дисперсией/А.И. Весницкий, С.В. Крысов//Волны и дифракция. – 1981. – Т. 2. – С. 291.
10. Весницкий А.И. Возбуждение колебаний в движущихся элементах конструкций/А.И. Весницкий, С.В. Крысов // Машиноведение. – 1983. - №1. – С. 16-17.
11. Тамм И.Е. Общие свойства излучения, испускаемого системами, движущимися со сверхсветовыми скоростями, и некоторые приложения к физике плазмы: (Нобелевская лекция)/И.Е. Тамм//Успехи физических наук. – 1959. – Т. 68. – Вып. 3. – С. 42-59.
12. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике: Сб. трудов/Л.И. Мандельштам. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – Т. 2. – 372с.
13. Уткин Г.А. О краевых задачах динамики одномерных упругих систем с движущимися по ним сосредоточенными объектами/Г.А. Уткин // Прикладная механика: Межвузовский сборник. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. - Вып. 7. – С. 23-27.
14. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1983. – 928с.
15. Горошко О.А. Критические случаи движения стержня с демпфером на конце / О.А. Горошко // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, №8. – С. 129-132.
16. Весницкий А.И. К построению демпфера изгибных колебаний балки/А.И. Весницкий, Н.Д. Романов // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, №6. – С. 122-124.
17. Весницкий А.И. К вопросу о граничных условиях в задаче динамики волновых систем с движущимися закреплениями и нагрузками/А.И. Весницкий, Г.А. Уткин//Волны и дифракция. – 1981. – вып. 1. – С. 365-368.
18. Весницкий А.И. Граничные условия для изгибных колебаний балки с движущимся упруго-инерциальным закреплением/А.И. Весницкий//Доклады АН УССР. – 1982. - №5. – С. 33-35.
19. Мангова В.Н. О поперечных колебаниях стержня с движущимся жёстким закреплением/В.Н. Мангова // Прикладная механика. – 1981. – Т. 16, №12. – С. 126-129.