

УДК 539.3

И.П. БОКОВ, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА  
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАНУ

### КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ТРЕЩИН ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗГИБЕ

*Рассматривается бесконечная трансверсально-изотропная пластина с трещиной, которая находится в равновесии под действием приложенных на бесконечности усилий, а также сосредоточенных сил и изгибающих моментов, действующих в окрестности трещины. С использованием фундаментальных решений для трансверсально-изотропных пластин получены интегральные представления для изгибающих моментов. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины, которые позволили исследовать характер поведения хрупких тел с концентраторами напряжений в зависимости от упругих постоянных материалов и действующих сил.*

*Ключевые слова: трансверсально-изотропные пластины, интегральные уравнения, концентраторы напряжений, коэффициенты интенсивности напряжений, изгибающие моменты.*

І.П. БОКОВ, О.О. СТРЕЛЬНИКОВА  
Институт проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАНУ

### КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ТРІЩИН ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО- ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН ПРИ ЗГІНІ

*Розглянуто нескінченну трансверсально-ізоотропну пластину з тріщиною, яка знаходиться в рівновазі під дією зусиль, що прикладені до границь пластини на нескінченності та зосереджених сил і згинальних моментів, що діють в околі тріщини. З використанням фундаментальних розв'язків для трансверсально-ізоотропних пластин отримано інтегральні зображення згинальних моментів. Обчислені коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини, які дозволили дослідити характер поведінки крихких тіл з концентраторами напружень у залежності від пружних сталих матеріалів і діючих сил.*

*Ключові слова: трансверсально-ізоотропні пластины, інтегральні рівняння, концентратори напружень, коефіцієнти інтенсивності напружень, згинальні моменти.*

I.P. BOKOV, E.A. STRELNIKOVA  
A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine

### STRESS INTENSITY FACTORS FOR SPLIT IN TRANSVERSELY ISOTROPIC PLATES AT BENDING

*An infinite transversely isotropic plate with a crack being in equilibrium both under forces applied to the plate boundaries in infinity and concentrated forces and bending moments applied near the crack is under consideration. Using the fundamental solutions for the transversely isotropic plate the integral representations for bending moments were obtained. The stress intensity factors for the crack were calculated. That allowed us to analyze the behaviour of brittle solids in dependence on the elastic constants of materials and effective forces.*

*Key words: transversely isotropic plates, integral equations, stress concentrators, stress intensity factors, bending moments.*

#### Постановка проблеми

Проектирование, создание и эксплуатация элементов конструкций в современных условиях требуют разработки достоверных методов оценки их работоспособности. Известно, что в структуре реального конструкционного материала имеются (или возникают в процессе его деформирования) различного рода микродефекты. Эти дефекты являются концентраторами напряжений. Развитие дефектов под действием внешней нагрузки может привести к частичному или полному разрушению конструкции.

При исследовании предельного равновесия тел, содержащих дефекты типа трещин, требуется определить критическое значение внешней нагрузки, при достижении которой трещина начинает распространяться. В элементах конструкций, работающих при определенных внешних нагрузках и определенных режимах их изменения, наличие устойчивых трещин не опасно.

Вопрос продления времени эксплуатации элементов с дефектами такого рода является важной проблемой, как с теоретической, так и с практической точки зрения.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Одной из важнейших составляющих механики разрушения упругих тел является математическая теория трещин. Эта теория хорошо разработана, и ее основы и этапы развития изложены в следующих

монографіях і обзорах: [1, 2]. Фізическим аспектам виникнення і розповсюдження тріщин посвящена робота [3]. Ураховуючи актуальність проблеми стійкості пластин з дефектами, аналітичеським і експериментальним її дослідженням увага уделюсь неоднократно [4 - 6].

В трудах [7 - 10] было получено решение задач с произвольно ориентированными трещинами, разрезами, эллиптическими отверстиями и криволинейными жесткими включениями.

Одним из методов исследования концентрации напряжения в телах с трещинами является метод интегральных уравнений, основанный на теории потенциала. Использование этого метода предполагает наличие фундаментальных решений для рассматриваемой задачи.

Разработке методов построения фундаментальных решений (решений, соответствующих сосредоточенным воздействиям) уравнений теории упругих тонких пластин и оболочек посвящено большое количество публикаций. Постановки задач, методы их решения и ряд конкретных результатов содержатся в монографиях и научных статьях А. Л. Гольденвейзера [11], В. М. Даревского [12] и других. Фундаментальные решения уравнений статики для изотропных и трансверсально-изотропных пластин, используя уточненную теорию, были получены в статьях И. П. Бокова, Е. А. Стрельниковой [13, 14].

Из проведенного анализа следует, что имеющиеся фундаментальные решения, построенные по уточненной теории, относятся к бесконечным изотропным и трансверсально-изотропным пластинам.

**Формулирование цели исследования**

Рассматривается бесконечная трансверсально-изотропная пластина толщиной  $2h$  со сквозной прямолинейной трещиной длиной  $2l$ . Пластина находится в равновесии под действием усилий, приложенных к границам пластины и на бесконечности, сосредоточенных сил  $P^{(i)}$  и моментов  $M^{(i)}$  в точках с координатами  $(x_j; y_j)$  ( $i=1, \dots, N$ ) декартовой системы координат  $Ox\tilde{z}$ , начало которой находится в геометрическом центре трещины, плоскость  $xOy$  совпадает с серединной плоскостью пластины, а ось  $Ox$  направлена вдоль трещины.

Сосредоточенные силы  $P^{(i)}$  полагаются перпендикулярными к основам пластины, а вектор момента  $M^{(i)}$  имеет две составляющие -  $M_x^{(i)}$  и  $M_y^{(i)}$ .

Граничные условия трещины имеют вид:

$$M_x^+ - M_x^- = 0, M_y^+ - M_y^- = 0, \quad (|x| < l) \tag{1}$$

$$M_x^+ = M_x^- = p_1(x), M_y^+ = M_y^- = p_2(x), \quad (|x| < l)$$

где знаками «+» и «-» здесь и в остальных случаях обозначены граничные значения функции при  $y \rightarrow \pm 0$ . Для определения  $p_i(x)$  ( $i=1,2$ ), предположим, что в точке с координатами (0;1) приложен сосредоточенный момент единичной интенсивности. Для трещин с  $l = 1$ , приведем значения этих функций

$$p_1(x) = \frac{1+\nu}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1-\nu}{4} \frac{x^2-1}{x^2+1}, \tag{2}$$

$$p_2(x) = \frac{1+\nu}{2} \ln \frac{\gamma \sqrt{x^2+1}}{2} - \frac{1-\nu}{4} \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона;  $C = \ln \gamma = 0,5772\dots$  - константа Эйлера.

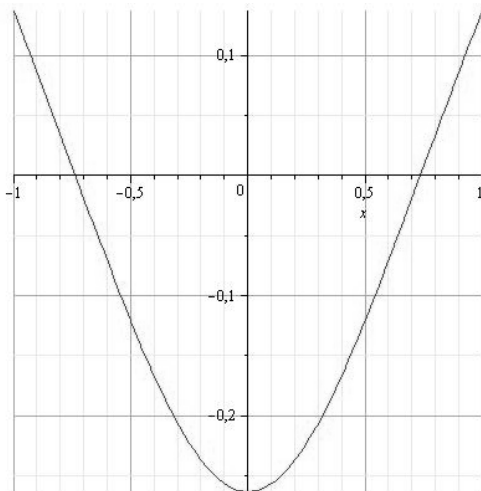


Рис. 1. Функция  $p_1(x)$

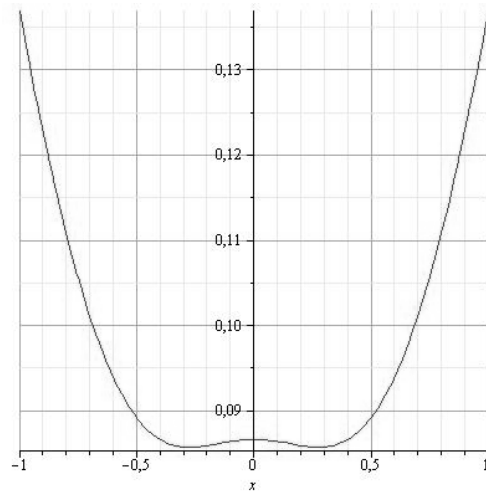


Рис. 2. Функция  $p_2(x)$

На рис. 1 и 2 представлены графики функций (2), представляющие собой выражения для изгибающих сил на контуре трещины.

**Изложение основного материала исследования**

Рассмотрим ранее полученные выражения для изгибающих моментов [14]. Положим  $m_1^* = m_2^* = 0$

$$M_x = \frac{1}{2} q_3^* (1 + \nu) \ln \frac{\gamma \sqrt{x^2 + y^2}}{2} + \frac{1}{4} q_3^* (1 - \nu) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \tag{3}$$

$$M_y = \frac{1}{2} q_3^* (1 + \nu) \ln \frac{\gamma \sqrt{x^2 + y^2}}{2} + \frac{1}{4} q_3^* (1 - \nu) \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}.$$

Для построения интегрального представления предположим, что сосредоточенная сила действует на отрезке  $[-l; l]$ . В каждой точке этого отрезка величины  $q_3^*$  являются функциями  $w_x(\xi)$  и  $w_y(\xi)$  ( $\xi \in [-l; l]$ ) для  $M_x, M_y$  соответственно. Данные функции нам неизвестны.

Запишем интегральные представления для изгибающих моментов  $M_x, M_y$  при  $x = x - \xi$ ,  $y = y - \eta$  ( $x = \xi$ ,  $y = \eta$  - особая точка). Учитывая, что  $\eta = 0$ , так как трещина расположена вдоль оси  $Ox$ , получим

$$M_x = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln \frac{\gamma \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{2} d\xi + \frac{1 - \nu}{4} \int_{-l}^l w_x(\xi) \frac{(x - \xi)^2 - y^2}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \tag{4}$$

$$M_y = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln \frac{\gamma \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{2} d\xi + \frac{1 - \nu}{4} \int_{-l}^l w_y(\xi) \frac{y^2 - (x - \xi)^2}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

Рассмотрим выражения (4) при  $y \rightarrow 0$

$$M_x = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi + \frac{1 - \nu}{4} \int_{-l}^l w_x(\xi) d\xi, \tag{5}$$

$$M_y = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi - \frac{1 - \nu}{4} \int_{-l}^l w_y(\xi) d\xi.$$

В задачах теории трещин требуется, чтобы было выполнено соотношение  $\int_{-l}^l w(\xi) d\xi = 0$  - условие однозначности смещений. Перепишем выражения (5), учитывая это условие

$$M_x = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi, \tag{6}$$

$$M_y = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi.$$

Запишем (6) учитывая, что  $\ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| = \ln \frac{\gamma}{2} + \ln |x - \xi|$ . Получим

$$M_x = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi = \frac{1 + \nu}{2} \ln \frac{\gamma}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) d\xi + \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln |x - \xi| d\xi, \tag{7}$$

$$M_y = \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln \frac{\gamma}{2} |x - \xi| d\xi = \frac{1 + \nu}{2} \ln \frac{\gamma}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) d\xi + \frac{1 + \nu}{2} \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln |x - \xi| d\xi.$$

Учитывая условие однозначности смещений, запишем интегральные уравнения для  $M_x, M_y$

$$M_x = \int_{-l}^l w_x(\xi) \ln |x - \xi| d\xi = \frac{2}{1 + \nu} p_1(x), \tag{8}$$

$$M_y = \int_{-l}^l w_y(\xi) \ln|x - \xi| d\xi = \frac{2}{1+\nu} p_2(x).$$

Аналитического решения для полученных уравнений с данными правыми частями не существует, поэтому необходимо использовать численный метод. Продифференцируем уравнения (8) по переменной  $x$ . Получим сингулярные уравнения с ядрами типа Коши

$$M'_x = \int_{-l}^l \frac{w_x(\xi)}{x - \xi} d\xi = \frac{2}{1+\nu} p'_1(x), \tag{9}$$

$$M'_y = \int_{-l}^l \frac{w_y(\xi)}{x - \xi} d\xi = \frac{2}{1+\nu} p'_2(x).$$

Рассмотрим выражения (9) при  $l = 1$ . Сделаем замену неизвестных функций

$$w_x(\xi) = \frac{w_{x0}(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad w_y(\xi) = \frac{w_{y0}(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \tag{10}$$

Для сведения системы интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений воспользуемся многочленами Чебышева I и II рода [15] и квадратурной формулой Корнейчука-Старка [16]

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad U_{n-1}(t) = \frac{\sin(n \arccos t)}{\sin(\arccos t)}. \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{w_{u0}(x_k)}{n} \frac{1}{x_k - x_{0k}} = p_i(x), \quad (u = x, y) \quad (i = 1, 2). \tag{12}$$

Запишем систему алгебраических уравнений из  $n-1$  уравнений с  $n$  – неизвестными. Вид системы следующий  $Av = p$ , где

$$v = \begin{Bmatrix} v(t_1^n) \\ v(t_2^n) \\ \vdots \\ v(t_n^n) \end{Bmatrix}, \quad p = \begin{Bmatrix} p(t_{01}^n) \\ p(t_{02}^n) \\ \vdots \\ p(t_{0(n-1)}^n) \end{Bmatrix}, \tag{13}$$

$$a_{kj} = h_{mk},$$

где  $h_{mk} = \frac{1}{(x_k - x_{0m})n}$ ,  $x_k = \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n}$ ,  $x_{0m} = \cos \frac{\pi m}{n}$ ,  $(k = 1, \dots, n) (m = 1, \dots, n-1)$ ,  $n$  - степень многочлена Чебышева.

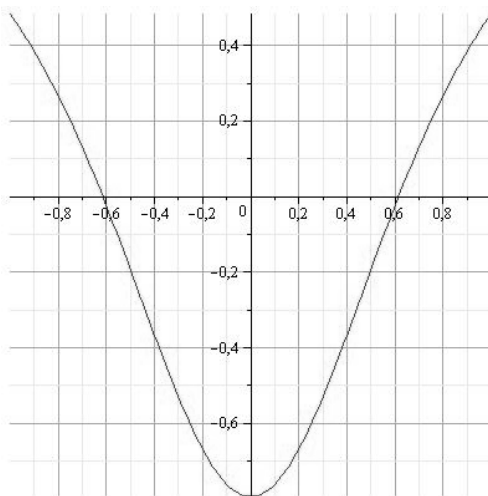


Рис. 3. Функция  $w_x(x)$

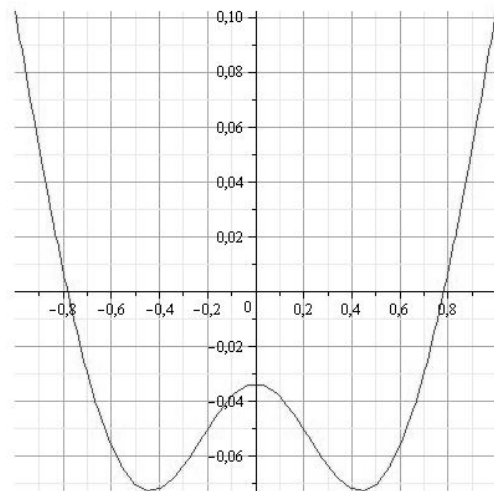


Рис. 4. Функция  $w_y(x)$

Дополняем полученную систему условиями однозначности смещений

$$\int_{-1}^1 \frac{w_{x0}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{w_{y0}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 0. \quad (14)$$

Численное решение интегральных уравнений было найдено с помощью предложенного метода при  $\nu = 0,28$ . На рис. 3 и 4 представлены графики решений этих уравнений.

Проверка алгоритма была произведена для правой части  $p_1(x) = p_2(x) = x$ . Численное и аналитическое решения приведены ниже (табл. 1)

Таблица 1

Данные проверки алгоритма

Численное решение	Аналитическое решение
0,9876883209	0,9876883410
0,8910065122	0,8910065278
0,7071067781	0,7071067907
0,4539905066	0,4539905165
0,1564344845	0,1564344889
-0,1564344357	-0,1564344359
-0,4539904641	-0,4539904687
-0,7071067485	-0,7071067528
-0,8910065069	-0,8910065035
-0,9876884475	-0,9876883326

Корректность использованного метода подтверждается точностью  $10^{-7}$ , полученной для численного решения приведенного в табл. 1.

Воспользуемся следующими соотношениями для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений

$$K_h^\pm = \pm m \sqrt{l} \lim_{x \rightarrow \pm 1} \left[ \sqrt{1-x^2} w_u(x) \right] \quad (h = M_x, M_y) \quad (u = x, y) \quad (15)$$

где верхний (нижний) знак отвечает вершине  $x = l$  ( $x = -l$ ) трещины  $m$  - величина приложенной силы.

Получим

$$K_{M_x}^\pm = \pm 0,4828250711m, \quad K_{M_y}^\pm = \pm 0,1022633697m. \quad (16)$$

Для оценки прочности элемента конструкции с трещиной полученные коэффициенты интенсивности напряжений сравниваются с пороговыми значениями, при которых трещина не будет распространяться в материале. Это позволяет определить максимальную величину  $m$ , при которой не происходит развитие трещины, и рассматриваемый элемент конструкции не теряет работоспособности.

**Выводы**

Рассмотрена бесконечная трансверсально-изотропная пластина с разрезом, которая находится в равновесии под действием усилий, приложенных к границам пластины и на бесконечности, сосредоточенных сил и изгибающих моментов. Получены интегральные представления для изгибающих моментов. Вычислены значения коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины, которые позволят исследовать характер поведения хрупких тел в зависимости от упругих постоянных различных материалов и определить максимальную величину нагрузки, при которой не происходит развитие трещины, и рассматриваемый элемент конструкции не теряет работоспособности.

**Список использованной литературы**

1. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин / А. Е. Андрейкив – К. : Наук. думка, 1982.- 346 с.
2. Бережницкий Л. Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. / Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук – К. : Наук. думка, 1983. - 288 с.
3. Броек Д. Основы механики разрушения / Д. Броек - М.: Высшая школа, 1980. -368 с.
4. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. / Г. Н. Савин Киев: – К. : Наук. думка, 1968.- 888с.
5. Михайлов Б. К. Исследование устойчивости прямоугольных пластин с прямоугольными отверстиями при продольном сжатии / Б. К. Михайлов, В. Г. Москалева // Металлические конструкции: межвуз. темат. сб. тр. / Ленингр. инж.-строит. ин-т. – Л., 1983. С. 14–21.
6. Грачева Е. А. Устойчивость судовых пластин с трещинами / Е. А. Грачева // Механика разрушения и надежности судовых конструкций. – Горький, 1987. С. 23–29.
7. Shakerley T. M. Elastic buckling of plates with eccentrically positioned rectangular perforations / Т. М. Shakerley, С. J. Brown // Int. J. Mech. Sci. 1996. 38 № 8–9. С. 825 – 838.

8. Tsukrov I. Anisotropic material with arbitrarily oriented cracks and elliptical holes: effective elastic moduli / I. Tsukrov, M. Kachanov // *International Journal of Fracture*. - 1998. - Vol. 92. - P. L9-L14.
9. Зорин С. А. Предельное равновесие анизотропной пластины с эллиптическим отверстием, криволинейными жесткими включениями и трещинами / С. А. Зорин, В. Н. Максименко // *Динамика сплошной среды*. - Новосибирск, 2012. - Вып. 127. - С. 55-57.
10. Довбня Е. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния ортотропной оболочки с эллиптическим отверстием / Е. Н. Довбня // *Теоретическая и прикладная механика*. - 2001. - Вып. 32. - С.140-144.
11. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки / А. Л. Гольденвейзер // *Прикл. математика и механика*. - 1944. - 8, вып. 6. - С. 441 - 467.
12. Даревский В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки) / В. М. Даревский // *Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок*. - М.: Наука, 1966. - С. 927 - 933.
13. Боков И. П. Построение фундаментального решения уравнений статики изотропных пластин средней толщины / И. П. Боков, Е. А. Стрельникова // *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. - 2015. - Vol. 4, № 76. - С. 27-34.
14. Bokov I. P. Fundamental solution of static equations of transversely isotropic plates. / I. P. Bokov, E. A. Strelnikova // *International Journal of Innovative Research in Engineering & Management*. - 2015. - Vol. 2, Issue-6. - P. 56-62.
15. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Ю. В. Гандель - Харьков: ХНУ, 2001. - 92 с.
16. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. - К.: Наук. думка, 1976. - 444 с.