УДК 539.3

В.О. ВАХНЕНКО
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, Україна
Е.Дж. ПАРКЕС
Департамент математики та статистики, Страсклайдський університет, Глазго, Великобританія

МЕТОД ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СПЕКТРАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Ґрунтуючись на досвіді вивчення рівняння Вахненка (the Vakhnenko equation (VE)), ми знайомимо читача з низкою методів та підходів, які можуть бути використані для деяких нелінійних рівнянь. Ми відтворюємо шлях, по якому недосвідчений читач міг би дослідити нове нелінійне рівняння. Прямим інтегруванням VE отримано періодичні та усамітнені розв'язки на біжучих хвилях, зокрема петлеподібні. Альтернативна форма VE відома як рівняння Вахненка-Паркеса (the Vakhnenko-Parkes equation (VPE)). Метод Хіроти дозволив нам знайти N-солітонні розв'язки для VPE. Перетворення Беклунда, що випливає з бі-лінійної форми рівняння (форма Хіроти), веде до законів збереження. З отриманої пари Лакса ми формулюємо метод оберненої задачі розсіювання. Цей метод для третього порядку спектральної задачі ми використали для дослідження зв'язаного і неперервного спектрів. Це дозволило знайти N-солітонні розв'язки та M-модові періодичні розв'язки, відповідно. Досліджується взаємодія між цими типами розв'язків.

Ключові слова: нелінійне рівняння, метод Хіроти, метод оберненої задачі розсіювання, пара Лакса, N-солітонні розв'язки, M-модові періодичні розв'язки.

В.А. ВАХНЕНКО
Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, Киев, Украина
Е.Дж. ПАРКЕС
Департамент математики и статистики, Страсклайдский университет, Глазго, Великобритания

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С СПЕКТРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Исходя из опыта изучения уравнения Вахненко (the Vakhnenko equation (VE)), мы знакомим читателя с рядом подходов и методов, которые могут быть применены к нелинейным уравнениям. Мы начерчиваем путь, по которому читатель мог бы исследовать новое нелинейное уравнение. Прямым интегрированием получены периодические и уединенные решения на бегущих волнах, некоторые из которых – петлеподобны. Альтернативная форма для VE известна как уравнение Вахненко-Паркеса (the Vakhnenko-Parkes equation (VPE)). Метод Хироты позволил нам найти N-солитонные решения для VPE. Преобразование Бэклунда, вытекающее из би-линейной формы уравнения (форма Хироты), приводит к законам сохранения. Из полученной пары Лакса мы формулируем метод обратной задачи рассеяния. Этот метод для третьего порядка спектральной задачи применен для исследования связанных состояний и непрерывного спектра. Таким образом, получены N-солитонные решения и M-модовые решения, соответственно. Исследуется взаимодействие между указанными типами волн.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, метод Хироты, метод обратной задачи рассеяния, пара Лакса, N-солитонные решения, M-модовые решения.

V.O. VAKHNENKO
Subbotin Institute of Geophysics, Kyiv , Ukraine
E.J. PARKES
Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Glasgow, UK

THE INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR EVOLUTION EQUATION WITH THIRD ORDER SPECTRAL EQUATION

Based on experience of the study of the Vakhnenko equation (VE), we acquaint the reader with a series of methods and approaches which may be applied to certain nonlinear equations. Thus we outline a way in which an uninitiated reader could investigate a new nonlinear equation. By direct integrating of the VE we obtain the periodic and solitary traveling wave solutions some of which are loop-like in nature. An alternative form of the VE is known as the Vakhnenko-Parkes equation (VPE). The Hirota method enables us to find an N-soliton solution for the VPE. A Bäcklund transformation following from the be-linear form of equation (Hirota's form) is used to construct conservation laws. From the obtained Lax pair we formulate the inverse scattering transform (IST) method. The standard IST method for third-order spectral problems is applied to investigate solutions *corresponding to bound states of the spectrum and to a continuous spectrum. This leads to N-soliton solutions and M-mode periodic solutions, respectively. Interactions between these types of solutions are investigated.*

Keywords: nonlinear equation, Hirota method, inverse scattering transform method, Lax pair, N-soliton solutions, M-mode periodic solutions.

Постановка проблеми

Фізичні явища та процеси, що мають місце в природі, у загальному носять нелінійний характер. Це приводить до нелінійних математичних моделей для реальних процесів, а також до ускладнення опису. Вивчення кожного нового нелінійного рівняння вважається важливим кроком. Мета доповіді надати загальні уявлення про методи та підходи, які розроблені в математичній фізиці для дослідження нелінійних еволюційних рівнянь. Ми вказуємо послідовний шлях, проходячи який, необізнаний читач може дослідити нове рівняння.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нелінійним системам (рівнянням) притаманні унікальні властивості. До таких, в першу чергу, потрібно віднести солітони. Не претендуючи на строге означення, зазначимо, що солітон – це хвиля з властивостями частинки. Це – усамітнена стійка хвиля. Важливо, що після нелінійної взаємодії єдиним результатом буде набуття солітонами фазового зсуву. З математичної точки зору стійкість солітону зумовлена двома взаємо конкуруючими чинниками. З одного боку, нелінійність намагається перевернути хвилю, з іншого боку, дисперсія розмиває хвилю. Баланс цих двох процесів веде до можливості утворення стійких хвильових утворень – солітонів. Взаємодію двох солітонів для *KdV* рівняння (2) ілюструємо на рис. 1. Більший солітон наздоганяє менший, відбувається нелінійна взаємодія (перекачується енергія від більшого солітону до меншого), потім, відновивши початкову форму, солітони розходяться.

Різні методи вивчення властивостей нелінійних еволюційних рівнянь будемо пояснювати на прикладі рівняння Вахненка (the Vakhnenko equation) [1, 3]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)u+u=0. \tag{1}$$

Це рівняння моделює, зокрема, розповсюдження високочастотних хвиль у релаксівному середовищі. Крім того, неодноразово будемо звертатися до класичного рівняння Кортевега-де Вріза (the *KdV* equation) [4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0. \tag{2}$$

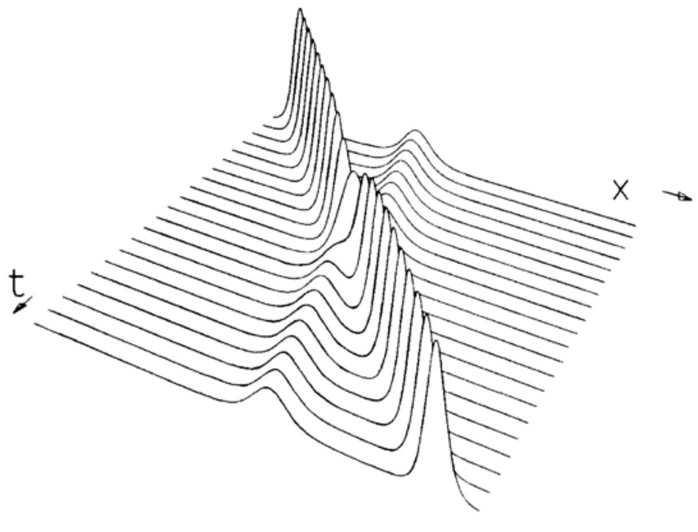

Рис. 1. Зіткнення двох солітонів для *KdV* рівняння.

Розпочинаючи вивчення нелінійного еволюційного рівняння, перш за все потрібно удатися до прямих методів. Отже, повинні бути досліджені, насамперед, розв'язки на біжучих хвилях. Для цього заміною $z=u-\upsilon$, $\eta=x-\upsilon t$ з $\upsilon=\text{const}$ потрібне початкове рівняння зводимо до звичайного диференційного рівняння, певна річ, нелінійного. У нашому випадку маємо рівняння $(zz_{\eta})_{\eta}+z+\upsilon=0$, яке двічі інтегруємо [1]. Розв'язок набуває параметричної залежності з параметром φ:

$$\sin^2\varphi = \frac{z_3 - z}{z_3 - z_2}, \quad \eta = \frac{\sqrt{6}z_1}{\sqrt{z_3 - z_1}} F(\varphi| m) + \sqrt{6(z_3 - z_1)} E(\varphi| m), \tag{3}$$

де $F(\varphi| m)$, $E(\varphi| m)$ – еліптичні інтеграли першого і другого роду, відповідно, $m = (z_3 - z_2)/(z_3 - z_1)$, а $z_1 \le z_2 \le z_3$ – корені рівняння $z^3 + \frac{3}{2}\upsilon z^2 + A = 0$, $A = \text{const}$. Розв'язки подані на рис. 2 і 3. Виявилось, що усамітнена хвиля 1 з рис. 2 – солітон.

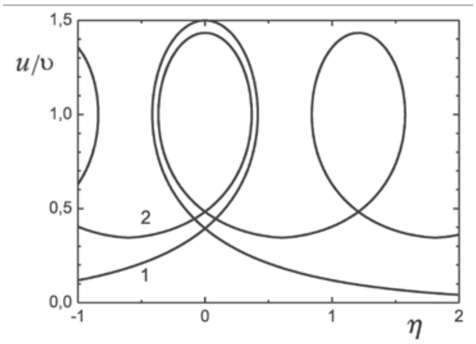

Рис. 2. Розв'язки рівняння (1) на біжучих хвилях для $\upsilon > 0$.

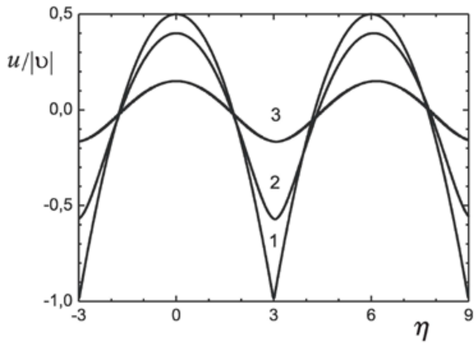

Рис. 3. Розв'язки рівняння (1) на біжучих хвилях для $\upsilon < 0$.

Одним з фундаментальних прямих методів без сумніву є метод Хіроти [5], якому притаманні унікальні особливості. Зокрема, метод дозволяє знайти N-солітонні розв'язки, закони збереження, а також вказати на шлях для отримання пари Лакса та сформулювати обернену задачу розсіювання.

Записавши рівняння, що досліджується (1), у нових координатах $x = T + W(X,T) + x_0$, $t = X$ з $u(x,t) = U(X,T) = W_X(X,T)$ маємо альтернативне рівняння, яке відоме як рівняння Вахненка-Паркеса (the Vakhnenko-Parkes equation (VPE)) [6]:

$$W_{XXT} + (1 + W_T)W_X = 0. \tag{4}$$

Це рівняння набуває такого вигляду у білінійній формі Хіроти [7]:

$$(D_T D_X^3 + D_X^2) f \cdot f = 0, \quad W = 6(\ln f)_X. \tag{5}$$

За означенням оператор Хіроти [5]:

$$D_T^n D_X^m a \cdot b = \left(\frac{\partial}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial T'}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial X'}\right)^m a(T,X) b(T',X')\Bigg|_{T=T',\, X=X'}. \tag{6}$$

Тут звертаємо особливу увагу на те, що зацікавлений читач повинен з білінійної форми рівняння, що вивчається, (в нашому випадку з рівняння (5)) отримати білінійну форму перетворення Беклунда

$$(D_X^3 - \lambda) f' \cdot f = 0, \quad (3D_X D_T + 1 + \mu D_X) f' \cdot f = 0 \tag{7}$$

та пару Лакса з $\psi = f'/f$

$$\psi_{XXX} + W_X \psi_X - \lambda\psi = 0, \quad 3\psi_{XT} + (1 + W_T)\psi + \mu\psi_X = 0. \tag{8}$$

Білінійної форми рівняння (у нас це рівняння (5)) достатньо, щоб отримати *N*-солітонні розв'язки. Наприклад, двосолітонний розв'язок для (4) набуває вигляду

$$f = 1 + \exp(2\eta_1) + \exp(2\eta_2) + b\exp(2(\eta_1 + \eta_2)) \tag{9}$$

з $b = \left(\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}\right)^2 \frac{k_1^2 + k_2^2 - k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2}$ та $\eta_i = (k_i X - c_i T) + \alpha_i$.

Три типи взаємодії показані для солітонів рівняння (1) на рис. 4–6.

Отеж, якщо читачеві вдалось отримати пару Лакса для рівняння, яке він вивчає, значить наполегливий читач досяг значного прогресу. Власне сумісність рівнянь в парі Лакса з необхідністю породжує початкове нелінійне рівняння. Перше рівняння з пари Лакса (8) визначає спектральні дані при заданих початкових умовах. За еволюцію спектральних даних відповідає друге рівняння (8), а така функціональна залежність виявляється досить простою. Часто вважається, що якщо пара Лакса вже отримана, тобто доведена інтегровність, то потрібне рівняння може бути розв'язане методом оберненої задачі розсіювання. Однак, щоб досягти цього, необхідно прикласти зусиль для реалізації відомої процедури. Для прикладу прослідкуємо реалізацію методу оберненої задачі розсіювання для *VPE* (4).

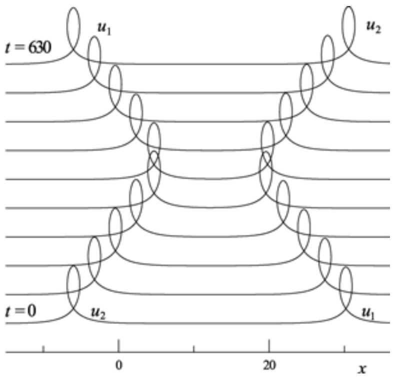

Рис. 4. Взаємодія солітонів для $k_1 = 0.99, \quad k_2 = 1.$

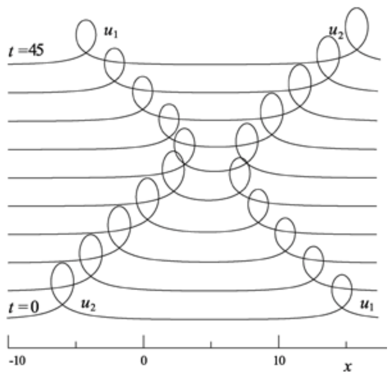

Рис. 5. Взаємодія солітонів для $k_1 = 0.88867, \quad k_2 = 1.$

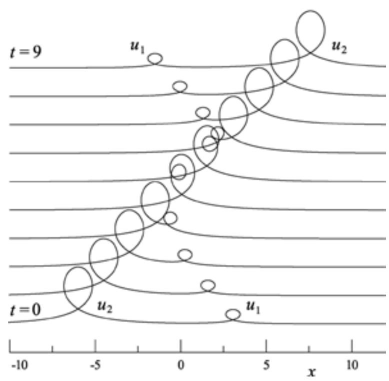

Рис. 6. Взаємодія солітонів для $k_1 = 0.5, \quad k_2 = 1.$

Ключовий момент в методі оберненої задачі розсіювання полягає в дослідженні спектрального рівняння (8), оскільки спектр (величина λ), як доведено в [7], зберігається. Розв'язок лінійного рівняння (8) був здобутий Каудреєм у [8] у вигляді функцій Йоста $\phi_j(X,\zeta)$ через $\Phi_j(X,\zeta) = \exp\{-\lambda_j(\zeta)X\}\,\phi_j(X,\zeta)$, $\lambda_j(\zeta) = \omega_j\zeta$, $\lambda_j^3(\zeta) = \lambda$, $\omega_j = e^{2\pi i(j-1)/3}$. Комплексна площина ζ розбивається на декілька областей таких, всередині яких порядок числа $\mathrm{Re}(\lambda_j(\zeta))$ сталий (див. рис. 7). Функція Йоста $\phi_j(X,\zeta)$ регулярна на площині ζ, за виключенням полюсів і меж між виділеними областями (рис. 7). Всередині окремої області розв'язок спектрального рівняння (8) підпорядковується співвідношенню (2.12) з [8]. Це – пряма спектральна задача.

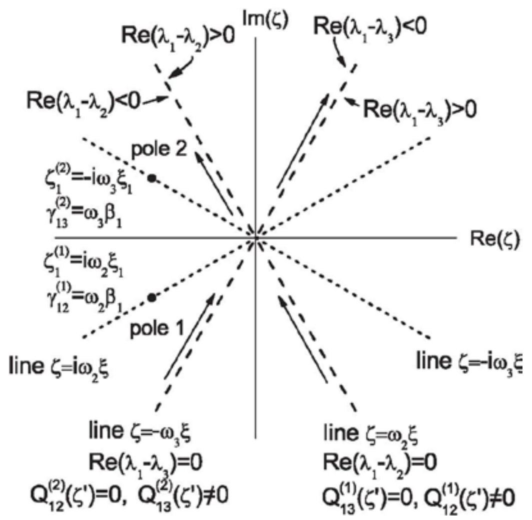

Рис. 7. Регулярна область для функцій Йоста $\phi_j(X,\zeta)$ **на комплексній площині** ζ **.**

Примітка. Пунктирні лінії визначають межі регулярних областей. На цих лініях задаються функції сингулярності $Q_{1j}(\zeta')$. На лініях з точок можуть появлятися полюси.

Реконструкція розв'язку $W(X,T)$ зі спектральних даних становить суть оберненої спектральної задачі. У загальному випадку необхідно враховувати як дискретний спектр (полюси), так і неперервний (функції $Q_{1j}(\zeta')$). У відповідності до співвідношення (6.20) з [8] розв'язок спектрального рівняння (8) подається у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi_1(X,\zeta) = 1 - \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=2}^{3}\gamma_{1j}^{(k)}\,\frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta_1^{(k)})]X\}}{\lambda_1(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta)}\,\Phi_1(X,\omega_j\zeta_1^{(k)}) \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\sum_{j=2}^{3}Q_{1j}(\zeta')\,\frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta') - \lambda_1(\zeta')]X\}}{\zeta' - \zeta}\,\Phi_1^{\pm}(X,\omega_j\zeta')\,d\zeta'.\end{aligned} \tag{10}$$

Рівняння (10) утримує спектральні дані, а саме, K полюсів і величин $\gamma_{1j}^{(k)}$ для дискретного спектру, а також для неперервного спектру функції $Q_{1j}(\zeta')$ на межах, де $\mathrm{Re}(\lambda_1(\zeta') - \lambda_j(\zeta')) = 0$ при $j \neq 1$.

Функція Йоста $\Phi_1(X,\zeta)$ пов'язана з розв'язком таким чином (див. (5.11) у [8])

$$\Phi_1(X,\zeta) = 1 - \frac{1}{3\lambda_1(\zeta)}\left[W(X) - W(-\infty)\right] + O(\lambda_1^{-2}(\zeta)). \tag{11}$$

Як приклад, наводимо результат по взаємодії солітону та періодичної хвилі, отриманий з методу оберненої задачі розсіювання [9-11]

$$W(X,T) = 3\frac{\partial}{\partial X}\ln\left(F(X,T)\right), \qquad F = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{b}}q_1 + \frac{1}{\sqrt{b}}q_2 + q_1 q_2\right)^2, \tag{12}$$

де $q_1 = \exp[\sqrt{3}\xi_1 X - (\sqrt{3}\xi_1)^{-1}T]$, $q_2 = \exp[-\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2 X + (\mathrm{i}\sqrt{3}\xi_2)^{-1}T]$, $b = \left(\frac{\xi_1 + \mathrm{i}\xi_2}{\xi_1 - \mathrm{i}\xi_2}\right)^2 \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2 + \mathrm{i}\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \mathrm{i}\xi_1\xi_2}$.

Висновки

Ми познайомили читача з низкою методів та підходів, які можуть бути використані для вивчення еволюційних нелінійних рівнянь. Ми відтворили шлях (деталі в [11]), по якому допитливий читач може дослідити нове нелінійне рівняння.

Список використаної літератури

1. Vakhnenko, V. A. Solitons in a nonlinear model medium / V.A. Vakhnenko // .J. Phys.A: Math.Gen. – 1992. – V.25. – PP. 4181 – 4187.
2. Parkes, E. J. The stability of solutions of Vakhnenko's equation / E.J. Parkes // J. Phys.A: Math. Gen. – 1993. – V.26. – PP. 6469 – 6475.
3. Vakhnenko, V. O. High frequency soliton-like waves in a relaxing medium / V.O. Vakhnenko // J. Math. Phys. – 1999. – V.40, № 3. – PP. 2011 – 2020.
4. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Мир. – 1988. – 694 с.
5. Hirota, R. The direct method in soliton theory / R. Hirota, – Cambridge: University Press, Cambridge, UK, – 2004. – 200 p.
6. Vakhnenko, V. O. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Nonlinearity. – 1998. – V.11, № 6. – PP. 1457 – 1464.
7. Vakhnenko, V. O. The calculation of multisoliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2002. – V.13, N. 9. – PP. 1819 – 1826.
8. Caudrey, P. J. The inverse problem for a general NxN spectral equation / P.J. Caudrey // Physica D. – 1982. – V.6. – PP. 51 – 66.
9. Vakhnenko, V. O. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2012. – V.45, N. 6. – PP. 846 – 852.
10. Vakhnenko, V. O. Solutions associated with discrete and continuous spectrums in the inverse scattering method for the vakhnenko-parkes equation / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Progress of Theoretical Physics. – 2012. – V.127, № 4. – PP. 593 – 613.
11. Vakhnenko, V. O. Approach in theory of nonlinear evolution equations: the Vakhnenko-Parkes equation / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Advances in Mathematical Physics. – 2016. – V.2016, Article ID 2916582. – 39 p.