

УДК 519.6

О.Р. ДЕНИСЮК

Украинский государственный химико-технологический университет

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

*В статье рассматривается задача управления погрешностью решения систем дифференциальных уравнений, описывающих процесс коррозии в элементах металлических конструкций. Для решения задачи автор предлагает использование нейросетевого модуля, позволяющего определить рациональный параметр численного решения задачи на основании информации о параметрах конструкции, агрессивной среды и допустимой погрешности. Разработанный алгоритм позволяет снизить вычислительные затраты, одновременно обеспечивая заданную точность решения системы дифференциальных уравнений.*

*Ключевые слова: искусственные нейронные сети, системы дифференциальных уравнений, управление погрешностью*

О.Р. ДЕНИСЮК

Український державний хіміко-технологічний університет

### ВИЗНАЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЕЯКИХ КЛАСІВ

*У статті розглядається задача управління похибкою розв'язку систем диференціальних рівнянь, що описують процес накопичення геометричних ушкоджень в елементах металевих конструкцій. Для вирішення задачі автор пропонує використання нейромережевого модуля, що дозволяє визначити раціональний параметр чисельного розв'язання задачі на основі інформації про параметри конструкції, агресивного середовища та допустиму похибку. Розроблений алгоритм дозволяє знизити обчислювальні витрати, одночасно забезпечуючи задану точність розв'язку системи диференціальних рівнянь.*

*Ключові слова: штучні нейронні мережі, системи диференціальних рівнянь, управління похибкою.*

O.R. DENYSIUK

Ukrainian State University of Chemical Technology

### DETERMINATION OF RATIONAL NUMERICAL SOLUTION PARAMETERS FOR SOME CLASSES OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

*The paper discusses the problem of solution error control in systems of differential equations describing the corrosion process in the metal structural elements. To solve the problem the author suggests the use of neural network module, allowing to determine the rational parameters of numerical solution of the problem based on information about structure parameters, aggressive environment and allowable error. The developed algorithm can reduce the computational cost, while providing the required accuracy for solution of systems of differential equations.*

*Keywords: artificial neural networks, systems of differential equations, error control.*

#### Постановка проблемы

В ряде отраслей промышленности, в частности, химической и металлургической, элементы оборудования функционируют в агрессивных средах, вызывающих коррозионный износ – разрушение поверхностного слоя металла. Это приводит к изменению начальных геометрических размеров элементов, снижению их несущей способности и преждевременному выходу из строя. Поведение корродирующей конструкции может быть исследовано путём численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (СДУ), описывающих процесс коррозии в её элементах. От точности решения СДУ зависит точность прогнозирования долговечности (времени работы до разрушения), поэтому проблема выбора параметров численных процедур, которые обеспечили бы её решение с заданной точностью, является весьма актуальной. С другой стороны, важной проблемой является эффективность вычислительных процедур, особенно при решении оптимизационных задач, когда значение долговечности вычисляется на каждой итерации поиска оптимального решения.

#### Анализ последних исследований и публикаций

Как отмечено в обзоре исследований по проблеме оптимального проектирования корродирующих конструкций [1], основным требованием, предъявляемым к алгоритмам вычисления функций ограничений, предполагающих решение СДУ, является их эффективность при обеспечении требуемой точности получаемого решения. За годы, прошедшие после выхода обзора, получили развитие различные алгоритмы,

позволяющие уменьшить вычислительные затраты за счёт изменения точности вычисления функций ограничений на различных этапах решения задачи оптимизации [2]. Однако существующие алгоритмы не позволяли обеспечить требуемую точность. Для этого необходим алгоритм управления погрешностью численного решения систем дифференциальных уравнений (СДУ), моделирующих коррозионный процесс в элементах конструкций.

В работе [3], очевидно, впервые было предложено использовать искусственные нейронные сети (ИНС) для определения параметров численного решения СДУ, обеспечивающих для текущего вектора варьируемых параметров заданную точность решения. В дальнейшем эта идея была использована при создании алгоритма управления точностью численного решения СДУ [4]. Предложенные в этих работах решения были применены при исследовании корродирующих шарнирно-стержневых систем (ШСК) со стержнями круглого или кольцевого сечений. Предельное состояние ШСК определялось временем достижения напряжением в каком-либо элементе предела прочности (условие прочности).

Стержневые элементы реальных конструкций такого класса изготавливаются из стандартных прокатных профилей (двутавр, швеллер, уголок). Такие профили характеризуются значительно более высоким коэффициентом слитности сечения (отношением периметра к площади), чем круглые или кольцевые, что определяет высокую скорость изменения напряжений в них. Правила вычисления геометрических характеристик сечений (площадь и минимальный момент инерции) зависят от типа сечения. Вследствие коррозии в двутавровых и швеллерных профилях может произойти полное разрушение стойки, то есть нарушение сплошности сечения, что приводит к его разрушению даже в том случае, когда значения напряжений в сечении далеки от предельных. Разрушение ШСК, кроме нарушения условия прочности, может быть вызвано потерей устойчивости её элемента или нарушением условия сплошности сечения. Таким образом, результаты, полученные в [3, 4] имеют более теоретическое, чем практическое значение.

**Формулирование цели исследования**

Целью работы является разработка методики определения рациональных параметров численного решения СДУ, при которых требуемая точность результата достигалась бы при минимальных вычислительных затратах. Для решения данной проблемы в настоящей работе предлагается использование искусственных нейронных сетей. В качестве объекта исследования рассматриваются статически неопределённые шарнирно-стержневые системы с элементами из стандартных профилей. Долговечность конструкции определяется условиями прочности, устойчивости и сплошности сечения.

**Изложение основного материала исследования**

Поведение конструкции, подверженной влиянию агрессивной среды, моделируется путём численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 [1 + k\sigma_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\delta})]; \delta_i |_{t=0} = 0; i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где  $\delta_i$  – глубина коррозионного поражения в  $i$ -том элементе конструкции,  $v_0$  – скорость коррозии при отсутствии напряжений,  $k$  – коэффициент влияния напряжений,  $\sigma_i$  – напряжение в  $i$ -том элементе конструкции,  $\bar{x}$  – вектор параметров конструкции,  $\bar{y}$  – вектора параметров агрессивной среды.

Традиционную схему численного решения СДУ такого вида можно представить в виде, приведенном на рис. 1. Входными параметрами являются векторы  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , а также параметр численного решения  $h_t$ , задающийся произвольно ввиду отсутствия каких-либо правил его определения. Результатом численного решения СДУ является долговечность конструкции  $t^*$ . Погрешность решения при таком подходе контролировать невозможно. Если параметр численного решения остается постоянным, она будет меняться при любом изменении векторов параметров конструкции и агрессивной среды. Для выполнения поставленной цели получения решения СДУ с заданной точностью необходимо ввести в схему решения задачи модуль управления погрешностью решения (рис. 2), позволяющий определять параметр вычислительной процедуры, основываясь на информации о параметрах конструкции, параметрах агрессивной среды и величине допустимой погрешности решения. Иными словами, необходимо построить аппроксимирующую функцию, формализующую данную зависимость.

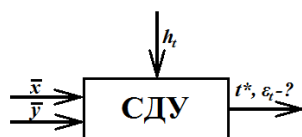


Рис. 1. Традиционная схема численного решения СДУ

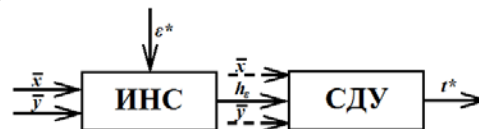


Рис. 2. Схема решения СДУ с использованием нейросетевого модуля управления погрешностью (ИНС)

Для построения аппроксимирующей функции следует решить следующие частные задачи:

- выбрать алгоритм решения СДУ и параметр управления;
- определить значимые параметры и способ аппроксимации.

Для решения СДУ (1) используются одношаговые численные методы типа Рунге-Кутты, поэтому параметром управления будет являться расстояние между узлами временной сетки.

Допустим, что существует эталонное решение СДУ (1) – значение долговечности конструкции, полученное аналитически или численно с контролируемой погрешностью. Тогда, задавая произвольным образом параметры конструкции, параметры агрессивной среды и параметр численного решения СДУ, можно получить множество решений и из погрешности, то есть множество учебных образцов, которое будет использоваться при построении аппроксимирующей функции.

Сформулируем условия получения эталонных решений СДУ (1):

1. Исходная СДУ путём внесения в неё некоторых изменений может быть преобразована в новую, для которой получить эталонное решение не представляет труда.
2. Погрешности численных решений обеих систем не должны существенно отличаться на заданном множестве значений параметра вычислительной процедуры. Решения этих двух систем могут при этом отличаться весьма существенно.

На изменение напряжения в стержневом элементе влияют два фактора: уменьшение площади сечения  $A_i$  вследствие коррозии и изменение величины осевого усилия  $Q_i$ . Первый фактор зависит от глубины коррозионного поражения только в данном элементе, второй – от глубины коррозионного поражения во всех элементах конструкции  $\bar{\delta}$ . Тогда для линейной функции напряжений (1) запишется в виде:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 [1 + k\sigma_i(A_i(\delta_i), Q_i(\bar{\delta}))]; \delta_i|_{t=0} = 0; i = \overline{1, N}, \tag{2}$$

Если пренебречь изменением во времени величины осевого усилия, то система (5) преобразуется в простую совокупность несвязанных ДУ:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 [1 + k\sigma_i(A_i(\delta_i), Q_i)]; \delta_i|_{t=0} = 0; i = \overline{1, N}, \tag{3}$$

Для каждого из этих уравнений может быть получено аналитическое решение вида [4]:

$$t_i^* = t_i - \frac{2kQ_i}{v_0 d_i} \ln \left\{ \frac{(P_i + d_i - 2a_i \delta_i)(P_i - d_i)}{(P_i - d_i - 2a_i \delta_i)(P_i + d_i)} \right\};$$

$$t_i = \frac{\delta_i^{\min}}{v_0}; d_i = \sqrt{|4a_i(A_i + kQ_i) - P_i^2|};$$

$$t^* = \min\{t_1^*, t_2^*, t_3^*, \dots, t_N^*\}, \tag{4}$$

где  $P_i$  – периметр  $i$ -ого элемента;  $a_i, d_i$  – коэффициенты.

Долговечность всей конструкции, очевидно, будет определяться временем жизни наименее долговечного стержня. Таким образом, первое условие выполнено. Так как скорость изменения площади сечения значительно выше, чем скорость изменения осевого усилия, что доказано большим объёмом численных экспериментов, то выполняется и второе условие. Таким образом, система (3) не может заменить решение системы (2) ввиду того, что изменение внутренних усилий может быть весьма значительным, но может использоваться для получения аппроксимирующей функции, которая строится для отдельного стержневого элемента.

Аппроксимировать зависимость между параметром численного алгоритма решения СДУ, параметрами стержневого элемента, АС и допустимой погрешностью решения предлагается с помощью искусственной нейронной сети (ИНС). На рис. 3 показана архитектура нейронной сети для растянутых и сжатых стержней.

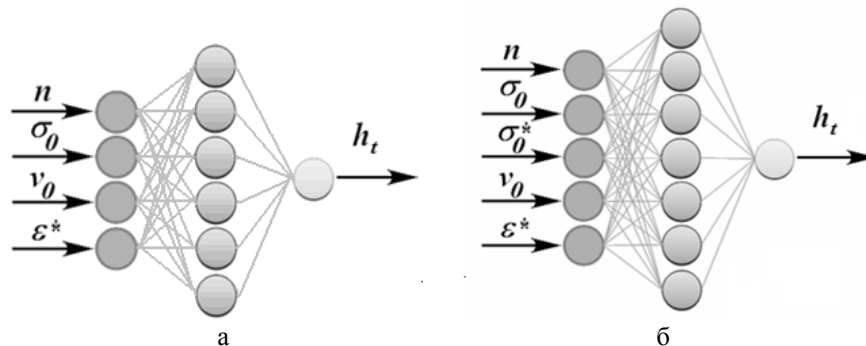


Рис. 3. Архитектура нейронной сети для растянутого (а) и сжатого (б) стержней

Для растянутого стержня значимыми параметрами являются площадь и периметр сечения, начальное напряжение и скорость коррозии при отсутствии напряжений. Для сжатого стержня существенное влияние на значение критического напряжения потери устойчивости оказывают его минимальный момент инерции и длина, которая может быть пересчитана по величине начального критического напряжения потери устойчивости. Важнейшим параметром является форма сечения, определяющая правила вычисления периметра, площади и момента инерции сечения. Для каждого из видов сечений (двутавр, швеллер, равнополочный и неравнополочный уголок) обучалась своя сеть. Поскольку все размеры фасонных профилей регламентируются стандартами, в качестве входного параметра используется номер типоразмера профиля. Таким образом, для растянутого стержня входными параметрами при обучении ИНС являются номер типоразмера  $n$ , начальное напряжение  $\sigma_0$ , скорость коррозии при отсутствии напряжений  $v_0$  и допустимая погрешность  $\varepsilon^*$ . Для сжатого стержня дополнительным входным параметром является начальное критическое напряжение потери устойчивости  $\sigma_0^*$ .

Для обучения искусственных нейронных сетей использовался алгоритм обратного распространения ошибки [5].

При тестировании алгоритма управления погрешностью вычисления долговечности ШСК в качестве объекта исследований использовалась статически неопределимая шарнирно-стержневая конструкция (рис. 4).

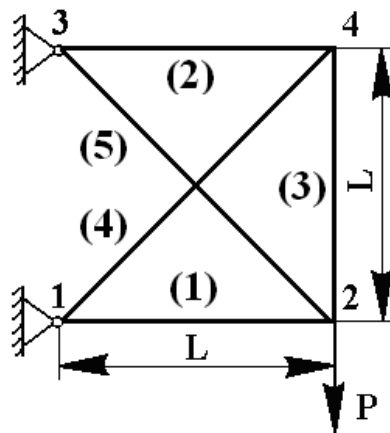


Рис. 4. Расчетная схема пятиэлементной ШСК

Нейронные сети обучались и тестировались для трех видов активных ограничений: по прочности, по устойчивости и по сплошности сечения (для двутавра и швеллера). При этом в каждой из задач были отдельно получены матрицы весовых коэффициентов для каждого из используемых видов профилей. При тестировании задача управления погрешностью решалась для конструкций, долговечность которых составляла от 2,25 до 2,75 года.

В табл. 1 представлены результаты тестирования алгоритма при активных ограничениях по сплошности сечения (долговечность конструкции  $t^*=2,277$  года).

Таблица 1

**Результаты тестирования алгоритма управления погрешностью решения (активные ограничения по сплошности)**

$\varepsilon^*, \%$	$\varepsilon, \%$	$h_t$ , лет	$N$
1,0	0,806	0,0429	56
2,0	1,812	0,0992	24
3,0	3,040	0,1784	14
4,0	4,023	0,2728	10
5,0	5,286	0,3734	8

**Примечание:**  $\varepsilon^*$  – заданная погрешность решения задачи;  $\varepsilon$  – полученная погрешность решения задачи;  $h_t$  – расстояние между узлами на интервале изменения времени;  $N$  – количество узловых точек на временном интервале.

В табл. 2 приведены результаты тестирования алгоритма при активных ограничениях по прочности (долговечность конструкции  $t^*=2,454$  года) и устойчивости (долговечность конструкции  $t^*=2,463$  года).

Таблиця 2

**Результаты тестирования алгоритма управления  
погрешностью решения (активные ограничения по прочности)**

$\varepsilon^*, \%$	$\varepsilon, \%$	$h_t, \text{ лет}$	$N$
1,0	0,543	0,0243	103
2,0	1,681	0,0532	48
3,0	2,591	0,0996	26
4,0	3,769	0,1553	17
5,0	4,783	0,2132	13

Таблиця 3

**Результаты тестирования алгоритма управления  
погрешностью решения (активные ограничения по устойчивости)**

$\varepsilon^*, \%$	$\varepsilon, \%$	$h_t, \text{ лет}$	$N$
1,0	1,015	0,1596	19
2,0	2,036	0,3597	9
3,0	3,078	0,5634	6
4,0	3,742	0,7953	5
5,0	4,852	1,1664	4

**Выводы**

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Модуль управления погрешностью решения, использующий искусственную нейронную сеть, позволяет обеспечить заданную точность численного решения СДУ.
2. Использование набора матриц синаптических весов позволяет решать задачу определения долговечности конструкции для разных видов профилей и активных ограничений при разных гранично допустимых значениях погрешности, то есть управлять точностью решения СДУ.
3. Использование рационального шага интегрирования, исключающего слишком большое количество узловых точек на временном интервале, существенно повышает эффективность вычислительного алгоритма.

**Список использованной литературы**

1. Зеленцов, Д. Г. Обзор исследований по применению методов нелинейного математического программирования к оптимальному проектированию конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой [Текст] / Д. Г. Зеленцов, Г. В. Филатов // Вопросы химии и химической технологии. – 2002. – № 4. – С. 108–115.
2. Зеленцов, Д. Г. Адаптация метода скользящего допуска к задачам оптимизации корродирующих конструкций [Текст] / Д. Г. Зеленцов, Н. Ю. Науменко // Системні технології. – 2005. – Вип. 2 (37). – С. 48–56.
3. Короткая, Л. И. Использование нейронных сетей при численном решении некоторых систем дифференциальных уравнений [Текст] / Л. И. Короткая // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2011. – №3/4 (51). – С. 24–27.
4. Зеленцов, Д. Г. Алгоритм управления точностью численного решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений [Текст] / Д. Г. Зеленцов, Л. В. Новикова, Н. Ю. Науменко // Системні технології. – 2012. – Вип. 5 (82). – С. 71–79.
5. Callan, R. The Essence of Neural Networks [Text] / R. Callan. – Prentice Hall Europe, 1999. – 232 p.