513.88:517.44: 539.3

Т.Г. ВОЙТИК
Одесский национальный морской университет
Г.С. ПОЛЕТАЕВ
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
С.А. ЯЦЕНКО
Одесская национальная морская академия

ПРОЕКТОРНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧЕ РОДСТВЕННОГО РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА ТИПА ДЛЯ КОЛЬЦА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Поставлена и решена задача с правильно факторизуемым рациональным коэффициентом, родственная задаче типа Римана-Гильберта-Привалова из теории аналитических функций. Метод основан на результатах, вытекающих из установленных вторым автором для соответствующих абстрактных уравнений в кольце со специальной факторизационной парой подколец. Используются проекторы на подкольца, факторизация коэффициентов, разложения в суммы простейших рациональных дробей. Приведено несколько конкретных иллюстративных примеров решения задачи. Процедура свободна от аппарата теории интеграла Фурье и интеграла типа Коши, требования гёльдеровости функций, индекса.

Ключевые слова: Задача Римана, уравнение, факторизация, кольцо, проектор, факторизационная пара.

Т.Г. ВОЙТІК
Одеський національний морський університет,
Г.С. ПОЛЄТАЄВ
Одеська державна академія будівництва та архітектури
С.А. ЯЦЕНКО
Одеська національна морська академія

ПРОЕКТОРНИЙ ПІДХІД В ЗАДАЧІ СПОРІДНЕНОГО РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА ТИПУ ДЛЯ КІЛЬЦЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Поставлена та розв'язана задача з правильно факторизуємим коефіцієнтом, споріднена задачі Рімана-Гільберта-Привалова із теорії аналітичних функцій. Метод базується на теорії, що випливає із результатів другого автора для відповідних абстрактних рівнянь в кільці з спеціальною факторизаційною парою підкілець. Використовуються проектори на підкільця, факторизація коефіцієнтів, розклади раціональних функцій в суми простих раціональних дробів. Наведено декілька конкретних ілюстративних прикладів розв'язків задачі. Процедура вільна від апарату теорії інтеграла Фур'є та типа Коши, вимоги гьольдеровості функцій, індекса.

Ключові слова: Задача Рімана,рівняння, факторизація, кільце, проектор, факторизаційна пара.

T.G. VOYTIK
Odessa National Maritime University
G.S. POLETAEV
Odessa State Academy of Buildings and Architecture
S.A. YATSENKO
Odessa National Maritime Academy

PROJECTOR APPROACH IN THE TYPE RELATING TO RIEMANN-HILBERT-PRIVOLOV PROBLEM FOR THE RING OF RATIONAL FUNCTIONS

A problem was posted and solved with correctly factorable rational coefficient. It was posed from the theory of analytical function such as Riemann-Hilbert-Privolov problem. The method is based on the theory, which is derived from the second author's result for corresponding of abstract equations in ring, with special factorization pair of subrings. The projections are used on a subrings and factorization of coefficient, decomposition into a sum of simple rational fractions. Several specific illustrative examples are given for problems solution. Procedure is free from Fourier integral and the Cauchy integral theory, Holder requirements, and index.

Keywords: the Riemann problem, equation, factorization, ring, projection, factorization pair.

Постановка проблемы

Известна важная роль теории задачи Римана (Римана–Гильберта, Римана–Гильберта–Привалова) и связанных с нею уравнений для аналитических функций. Эта задача возникает или используется в теоретических и прикладных разделах математики, механики, их приложениях. В том числе, в теории упругости, задачах о кручении. Возникает в теории некоторых видов дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, интегральных уравнений типа свёртки, при изучении соответствующих дифференциальных уравнений математической физики [1–12].

Важная роль теории уравнений, в частности, из задачи Римана–Гильберта и родственных обосновывает необходимость поиска и исследования новых задач и уравнений, которые могут использоваться для понимания свойств уже известных, а также при моделировании. Поиска общих упрощающих методов исследования, установления условий разрешимости, представления решений в замкнутой форме, при их существовании. В том числе, точных методов, минимально опирающихся на теорию функций комплексного переменного, свободных от аппарата теории интегралов Фурье и типа Коши. Таким образом, построение элементов метода нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по общему линейному уравнению, рассматриваемому ниже, является актуальным.

Анализ последних исследований и публикаций

Существующие точные методы исследования задачи Римана–Гильберта восходят, в частности, к работам И.И. Привалова, Ф.Д. Гахова, Ю.И. Черского, М.Г. Крейна и другим. На связь теории интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов и этой задачей, впервые обратил внимание И.М. Рапопорт (1948). Среди работ, связанных с теорией задачи Римана–Гильберта, но посвящённых абстрактным уравнениям в ассоциативных кольцах со специальной парой подколец, а также реализациям их в конкретных кольцах, укажем [10–19]. В силу отмеченного в [1, С. 114], со ссылкой на книгу Н.И. Мусхелишвили (1945), можно заключить, что, обычно, эту задачу решали, в основном, в предположении выполнения для соответствующих функций дополнительного условия Гёльдера на контуре. Часто применялся аппарат теории интеграла типа Коши, понятие индекса. В целом, основанные на применении теории функций комплексной переменной, аппарата теории интеграла типа Коши, подходы приводят к необходимости преодоления значительных аналитических трудностей. Не всегда оправданных. Новые идеи и результаты других возможных подходов к исследованию, в иных предположениях и без требования гёльдеровости функций, даны в [1]. Можно также пытаться применить соответствующие результаты из [10–14, 16, 17]. Публикации, в том числе [8], подтверждают сохранение интереса к использованию задачи Римана.

Наряду с другими, важен случай, когда в такого типа задаче Римана–Гильберта–Привалова коэффициенты являются рациональными функциями [1–5]. В [5], например, этот случай возникает в связи с исследованием дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами на оси и его редукцией. В рассматриваемой ситуации, от задачи Римана–Гильберта–Привалова можно перейти к родственной задаче, поставленной далее. При этом, считая искомые функции, принадлежащими соответствующим подмножествам рациональных. Однако, свободных от использования аппарата интегралов типа Коши, достаточно простых и исчерпывающих, подробно и строго изложенных методов исследования такого типа задач авторам не известно. До [19] отсутствовала, соответствующая предположениям, теорема существования с удобным представлением решений в замкнутой форме. Поэтому поиски путей упрощения элементов исследования рассматриваемой в статье ниже родственной задачи, поставленной в общем виде, актуальны. Актуально и накопление решений конкретных примеров, решений задачи с общим линейным уравнением – краевым условием.

Формулирование цели исследования

Целью работы является обоснование проекторного метода, упрощающего теорию родственной типа Римана–Гильберта–Привалова задачи, постановка которой сформулирована далее. А именно, задачи о нахождения двух рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по общему линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом на вещественной оси. Цель достигается посредством использования соответствующих общих результатов и общей теоремы существования с формулами решений из [10, 11, 15–19]. В качестве контура здесь выступает сомкнутая вещественная ось [1]. Положения работы развивают и дополняют [18, 19].

Изложение основного материала исследования

Общие положения, обозначения и определения. В сообщении к изучению рассматриваемой ниже задачи применяется решение нелинейной задачи факторизации по подкольцам и другие положения. Используя [10–14], напомним следующее.

Определение. Всякое кольцо R с единицей e, рассматриваемое вместе с его фиксированной факторизационной парой подколец (R^+, R^-) $[\equiv (R^-, R^+)]$, будем называть "кольцом с факторизационной парой". Кратко, кольцом с *ФП.*

Будем говорить, что элемент $a \in R$ допускает в коммутативном кольце R *факторизацию по факторизационной паре* (R^+, R^-), если существуют элементы $r^+ \in R^+$, $s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ такие, что:

$$a = r^+ s^0 t^-. \tag{1}$$

Факторизация (1) называется:

- *правильной факторизацией (п.ф.),* если $r^+ \in R^+$, $s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ – правильные элементы [10–14];
- *нормированной факторизацией (н.ф.),* если $t^0 = r^0 = e$;

– *нормированной правильной факторизацией (н.п.ф.),* если она является *(п.ф.)* и $t^0 = r^0 = e$.

Известно [12, 10,11,13,14], что *правильную факторизацию* элемента из R по *ФП* (R^+, R^-) можно нормировать.

Нормированная правильная факторизация единственна.

Кольцо $\Re_r$ с факторизационной парой $(\Re_r^+, \Re_r^-)$. Обозначим через $\Re_r$ совокупность всех рациональных функций, вообще, комплексного переменного $z \in C$, все полюсы которых конечны и невещественны. Пределы функций из $\Re_r$ на бесконечности конечны. Пусть $\Re_r^+$ ($\Re^-$) – совокупности функций из $\Re_r$, все полюсы которых расположены внутри нижней (верхней) полуплоскости $\Pi_-(\Pi_+)$, соответственно (Ср. [1]; С. 13–14). Проверяется, что $\Re_r$ – кольцо с мультипликативной единицей $e = f(z) := 1, z \in C$ относительно обычных операций сложения и умножения функций, а $\Re_r^+, \Re_r^-$ – его подкольца с единицей. Проекторы на подкольца: $\Re_r \to \Re_r^{\mp}$ обозначим $P^{\mp}$, соответственно. Эти проекторы коммутирующие. Проектор P^+ (проектор P^-) каждой функции из $\Re_r$ ставит в соответствие часть её разложения в сумму простейших дробей первого и второго типов с полюсами лишь из Π_- (из Π_+), соответственно. Полагаем:

$$P^0 = P^+P^-, P_+ = P^+ - P^0, P_- = P^- - P^0, \Re_r^{\mp,0} = P^{\mp,0}(\Re_r), \text{ где } \Re_r^0 = \Re_r^+ \cap \Re_r^-.$$

Можно показать, что $\Re_r$ является кольцом с факторизационной парой ($\Re_r^+, \Re_r^-$).

Постановка задачи и формулы решения.

Задача. Для заданных рациональных функций – коэффициентов $A(x), B(x), -\infty < x < \infty$, *найти пару рациональных функций* $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in (\Re_r)_-$, *из* $\Re_r$ *все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй – в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлятворяющих на сомкнутой вещественной оси общему линейному уравнению:*

$$\alpha A(x)X^+(x) + \beta Y_-(x) = \gamma B(x); x \in \{-\infty; \infty\}; \alpha\beta \neq 0; \alpha, \beta, \gamma \in C. \tag{2}$$

Значения функций на бесконечности принимается равным соответствующим пределам.

При решении задачи в $\Re_r$ будем исходить из очевидной возможности продолжения каждой из функций и, следовательно, всего соотношения (2) на всю комплексную плоскость заменой вещественного переменного x комплексной переменной z, не выходя из соответствующего подкласса рациональных функций. Так вместо (2) возникает уравнение:

$$\alpha A(z)X^+(z) + \beta Y_-(z) = \gamma B(z); z \in C; \alpha\beta \neq 0; \alpha, \beta, \gamma \in C. \tag{3}$$

где, в силу предположений: $A(z), B(z) \in \Re_r,\ z \in C$ – известные функции, а $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in (\Re_r)_-$, – искомые.

Всякая, являющаяся решением (3), пара рациональных функций $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in (\Re_r)_-$, сужением на сомкнутую вещественную ось, порождает искомое решение уравнения (2) и рассматриваемой задачи. Учитывая возможность реализации в кольце R = $\Re_r$ с *ФП (* $\Re_r^+, \Re_r^-$ *)* результатов из [10–11] (см. также [19]) и очевидные преобразования в сответствующих предположениях, получены такие формулы для построения решения уравнений (3), (2) и поставленной задачи [15–19]:

$$X^+(z) = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \tilde{A}^+(z)S^0P^+[T^-(z)B^+(z)], Y_-(z) = \frac{\gamma}{\beta}\{B_-(z) + [T^-(z)]^{-1} \cdot P_-[T^-(z)B^+(z)]\}; \tag{4}$$

где

$$X^+(x) = X^+(z) \downarrow_{z=x}, \ Y_-(x) = Y_-(z) \downarrow_{z=x}, \ -\infty < x < \infty \ ; \tag{5}$$

$$A^{-1}(z) = \Gamma^+(z)S^0T^-(z); z \in C.$$

Иллюстративные примеры. Решим задачу, поставленную по краевому условию на сомкнутой вещественной оси, заданному уравнением (2):

1) при $A(x)=\dfrac{x^2+9}{x^2+1}$; $B(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^2+4)(x+5i)}$; $\alpha=50, \beta=25, \gamma=7000$.

Тогда,

$$A^{-1}(z)=\frac{z+i}{z+3i}\cdot 1\cdot\frac{z-i}{z-3i}.$$

Отсюда, полагая $\tilde{A}^{+}\equiv\Gamma^{+}$, имеем:

$$S^0=1;\ \tilde{A}^{+}(z)=\frac{z+i}{z+3i}; T^{-}(z)=\frac{z-i}{z-3i}; (T^{-}(z))^{-1}=\frac{z-3i}{z-i}.$$

Разложение для $B(z)$ получаем в виде:

$$B(z)=-\frac{1}{4(z+2i)}+\frac{3}{28(z-2i)}+\frac{8}{7(z+5i)}.$$

Поэтому

$$B^{+}(z)=\frac{1}{28}\cdot\frac{25z+29i}{(z+2i)(z+5i)};\ B_{-}(z)=\frac{3}{28(z-2i)}.$$

Реализуя формулы (4), находим выражение для решения:

$$X^{+}(z)=\frac{99z^2+234zi-135}{z^3+10z^2i-31z-30i}, Y_{-}(z)=2\cdot\frac{41z-67i}{z^2-3zi-2}. \tag{6}$$

Сравнительные решения, подходами из [2] и предложенным в [15-17], привели в подобном примере к одинаковым результататам. Причём предложенный подход, основанный на результатах [10–11], проще.

В следующих примерах, рассмотренных в работе [18], установлено, что

2) при $A(x)=\dfrac{x^2+9}{x^2+1}$; $B(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; $\alpha=5, \beta=100, \gamma=40$, будет

$$X^{+}(z)=4\cdot\frac{2z+i}{z+3i};\ Y_{-}(z)=\frac{i}{z-i};$$

3) при $A(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+9}$; $B(x)=1; \alpha=5; \beta=1; \gamma=10$, найдено

$$X^{+}(z)=2\cdot\frac{z+3i}{z+i};\ Y_{-}(z)=-\frac{20i}{z-3i};$$

4) при $A(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+1}$; $B(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^2+1)(x+4i)}$; $\alpha=\beta=1; \gamma=210$, получено

$$X^{+}(z)=\frac{151z^2+380zi-229}{(z+2i)(z+3i)(z+4i)};\ Y_{-}(z)=\frac{59z-97i}{(z-i)(z-3i)}.$$

Выводы

При сделанных предположениях, от задачи Римана–Гильберта–Привалова можно перейти к родственной задаче, считая искомые функции, принадлежащими соответствующим подмножествам рациональных. Эта родственная задача с правильно факторизуемым рациональным коэффициентом поставлена и решена. Её решение, в соответствующих предположениях построено в явном виде. Построения проще. Свободны от опирающихся на теорию интеграла типа Коши, понятие индекса, условие Гёльдера, восходящих к Ф.Д. Гахову и другим. Не требуют, непосредственно, аппарат преобразований Фурье. Базируются на результатах второго автора для соответствующих уравнений в кольце со специальной факторизационной парой подколец. Используются основные положения теории колец и функционального анализа; - проекторы, а также возможность непосредственно провести требуемую для применения, установленного в [11, 12, 16, 17] факторизацию. Результаты имеют теоретическое и практическое (при решении конкретных примеров) значение.

Отметим в заключение, что возможности исследований и приложений для родственных задач, уравнений, открывающиеся приближением рациональными для коэффициентов из других классов функций, ещё ожидают своей реализации. В перспективе, в частности, остаются исследования случаев, когда факторизация не является правильной, а также связи решений, соответствующих произвольным и специальным правым частям. Накопление конкретных примеров создаёт часть базы дальнейшего изучения свойств задачи и её решений. Отметим, что бóльшая часть материала статьи подготовлена профессором Г.С. Полетаевым, иллюстративные примеры и выводы подготовлены при участии всех соавторов.

Список использованной литературы

1. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / М.Г. Крейн // Успехи мат. наук. — 1958. — № 13, Вып. 5(83). — С. 3—120.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1963. — 640 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Наука, 1968. — 512 с.
4. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. — М.: Наука, 1978. — 296 с.
5. Попов Г.Я. Метод факторизации и его численная реализация. Учебное пособие / Г.Я. Попов, П.В. Керекеша, В.Е. Круглов; под ред. проф. Г.Я. Попова. — Одесса: Одесский гос. университет, 1976. — 82 с.
6. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г.Я. Попов. — Киев-Одесса: ВШ, 1982. —168 с.
7. Мхитарян С.М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учётом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях / С.М. Мхитарян // Изв. АН Армянской ССР. Серия: Механика. — 1968. — № XXI. — №5—6. — С. 3—20.
8. Акопян В.Н. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом / В.Н. Акопян, Л.Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тезисы докладов международной научной конференции (Одесса, 2013 г.). — Одесса, 2013. — С. 12.
9. Черский Ю.И. Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. — Одесса: Астропринт, 2010. — 552 с.
10. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами / Г.С. Полетаев. — Киев, 1988. — 20 с. — (Препринт / АН УССР. Институт математики: 88.31).
11. Полетаев Г.С. Об однопроекторн. II порядка уравн. с правильно факторизуемыми коэфф. в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // Вестик ХГТУ. — 2000. — № 2 (8). — С. 191—195.
12. McNabb A. Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples / A. McNabb, A. Schumitzky // J. Functional Analysis. — 1972. — Vol. 9. — № 3. — P. 262—295.
13. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // Украинский матемаимческий журнал. — 1991. — Т. 43. — № 9. — С. 1201—1213.
14. Полетаев Г.С. Некоторые результаты о парных уравнениях в кольцах с факторизационными парами / Г.С. Полетаев // Вісник Харківського національного ун-ту. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. — 2002. — Вып. 52. — № 582. — С. 143—149.
15. Полетаев Г.С. Нахождение двух рациональных функций с полюсами из полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Г.С. Полетаев, Т.Г. Войтик, С.А. Яценко // Глушковські читання: Всеукраїнська науково-практична конференція (Київ,10-13 вересня 2013 р.). — К.: НТУУ "КПІ", 2013. — С. 74—77.
16. Полетаев Г.С. Подвид двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемым коєффициентом в кольце с факторизационной парой // XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation": Abstracts of conference reports (Kiev, Ukraine. May 27-29, 2015). —К.: НТУУ "КПІ", 2015. — С. 46.
17. Полетаев Г.С. Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары / Г.С. Полетаев // Математика в сучасному технічному університеті: Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 24-25 грудня 2015 р.) — К.: НТУУ "КПІ", 2015. — С. 85—88.
18. Войтик Т.Г. Проекторный поход к нахождению двух рациональных линейно связанных на оси функций с полюсами из разных полуплоскостей / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // Необратимые процессы в природе и технике: Труды 8-ой Всероссийской конференции. Часть II. (Москва, 27-29 января 2015 г.). — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. — С. 125—129.
19. Войтик Т.Г. Метод нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // Наукові нотатки. — Луцьк: Луцький НТУ, 2016. — Вип. 54. — С. 65 — 70.