УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК
Державний вищий навчальний заклад "Національний гірничий університет"

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ В ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ, ЯКИЙ ОБЕРТАЄТЬСЯ

В данні роботі представлено порожнистий циліндр як спрощену модель прокатного валка. Циліндр знаходиться під впливом теплового потоку, який відображає дію розжареного металевого листа на валок. Розроблена тривимірна математична модель температурних полів у порожнистому циліндри, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності. Знайдено температурне поле порожнистого циліндра , який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ скінченної довжини L, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є.

Ключові слова: комплексний ряд Фур'є, інтегральні перетворення Ханкеля, Лапласа, Фур'є, критерій Предводітелева, трансцендентне рівняння.

М.Г. БЕРДНИК
Государственное высшее учебное заведение "Национальный горный университет"

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ПОЛОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ

В данной работе представлен полый цилиндр как упрощенная модель прокатного валка. Цилиндр находится под влиянием теплового потока, который отражает действие раскаленного металлического листа на валок. Разработана трехмерная математическая модель температурных полей в полом цилиндре, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ, в виде краевой задачи математической физики для уравнения теплопроводности. Найдено температурное поле полого цилиндра, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ длины L, в виде сходящихся ортогональных рядов по функциям Бесселя и Фурье.

Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, интегральные преобразования Ханкеля, Лапласа, Фурье, критерий Предводителева, трансцендентное уравнение.

M. G.BERDNYK
State Higher Education Institution "National Mining University"

MATHEMATICAL MODELING OF TEMPERATURE FIELDS IN A HOLLOW ROTATING CYLINDER

This paper presents a hollow cylinder as a simplified model of the roll. The cylinder is under the influence of heat flow, which reflects the effect of the heated metal sheet on the roll. A three-dimensional mathematical model of the temperature field in a hollow cylinder, which rotates at a constant angular velocity about the OZ axis, in the form of a boundary value problem of mathematical physics for the heat equation. Found a hollow cylinder temperature field which rotates at a constant angular velocity about the OZ axis length L, as convergent orthogonal series of Bessel and Fourier functions.

Keywords: complex Fourier series, integral Hankel transform, Laplace, Fourier criterion Predvoditeleva, transcendental equation.

Постановка проблеми

Історично склалося, що в Україні розвинута мережа металургійних підприємств, на яких виробляють значну частину світового випуску сталі[1]. При прокаті металевих листів металевий розжарений лист до температури 1200° С рухається за допомогою валків. При цьому валки можуть сильно нагріватися і, при досягнені певних критичних температур, деформуватися. Що в свою чергу викликає брак виробництва [1 - 3]. Отримання геометрично правильних розмірів прокату, зниження витрат прокатних валків, на пряму залежить від здатності управління тепловим профілем валків, оперативним управлінням їх тепловим розширенням по всій довжині бочки валка [3].

При розгляді ряду питань, пов'язаних з інтенсифікацією виробництва, отримання нового сортаменту, що вимагає жорсткі поля допусків, як по площинності, так і поперечної різнотовщинності, змушує прокатників все більше уваги звертати на тепловий стан валків [4 - 6]. Отже виникає необхідність аналізу температури валка та аналітично вирахувати необхідне охолодження для нього[5].

У з'вязку з цім, теоретичний і практичний інтерес представляє вивчення теплових явищ, пов'язаних із охолодженням валків. В даній роботі представлено порожнистий циліндр, як спрощену модель прокатного валка, який знаходиться під впливом теплового потоку. Тепловий потік, який діє на валок, є наслідком взаємодії з розжареним металевим листом.

Анализ останніх досліджень і публікацій

Як показує огляд літератури, теплообмін в циліндрах, які обертаються, вивчений в даний час ще недостатньо [7, 8]. В [9] показано, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндра , який обертається, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання [9].

В [9] доводиться, що умови стійкості обчислень в методах кінцевих елементів і кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестаціонарних неосесиметричних температурних полів циліндра, який обертається, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1-2\frac{\Delta F_o}{\Delta\varphi^2}\ge 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta\varphi}-\frac{Pd}{2}\ge 0,$$

де F_0 – критерій Фур'є, Pd – критерій Предводітелева.

Якщо $Pd=10^5$, що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра $\omega=1{,}671\,сек^{-1}$ радіусом 100 мм, змінні $\Delta\varphi$ и ΔF_o повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta\varphi\le 2\cdot 10^{-5} \quad \text{і} \quad \Delta F_o\le 2\cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови Bi = 5 (Bi – критерій Біо) час, необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює $Fo\approx 0.025$. Це означає, що потрібно принаймні здійснити $1.3\cdot 10^8$ операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури. Більш того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити $3.14\cdot 10^5$ операцій, так як внутрішній стан у кільці характеризується $3.14\cdot 10^5$ точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату видається нереальним.

Тому, для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестаціонарних процесів теплообміну в циліндрах , які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

Мета статті

Розробити тривимірну математичну модель розподілу температурних полів у порожнистому циліндри, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі *OZ* у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності, та знайти рішення отриманої крайової задачі, розв'язки якої використовуються під час керування температурними полями.

Основная часть

Розглянемо розрахунок нестаціонарного неосесиметричного температурного поля порожнистого циліндра в циліндричній системи координат (r,φ,z), який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ скінченної довжини L, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0, а на зовнішній і внутрішній поверхні циліндра температура відома і залежить від часу $G(\varphi,z,t)$ і $G_1(\varphi,z,t)$ відповідно.

Математично задача визначення температурного поля циліндра $T(\rho,\varphi,z,t)$ складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності [10] в області $D=\{(\rho,\varphi,z,t)\,|\,\rho\in(\rho_0,1),\varphi\in(0,2\pi),\mathrm{z}\in(0,1),F_0\in(0,\infty)\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial\theta}{\partial F_0}+\omega\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}=\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\chi\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \tag{1}$$

с початковою умовою

$$\theta(\rho,\varphi,z,0)=0 \tag{2}$$

і граничними умовами

$$\theta(\rho_0,\varphi,z,t)=W(\varphi,z,F_0),\quad \theta(1,\varphi,z,t)=V(\varphi,z,F_0), \tag{3}$$

$$\theta(\rho,\varphi,0,F_0)=0,\quad \theta(\rho,\varphi,1,F_0)=0, \tag{4}$$

де $\theta = \dfrac{T(\rho,\varphi,z,t) - G_0}{T_{\max} - G_0}$ - відносна температура циліндра; $T_{\max} = \max\limits_{\varphi,z,t}\{G(\varphi,z,t),\ G_1(\varphi,z,t)\}$; t –час; $\rho = \dfrac{r}{R}$; R – зовнішній радіус циліндра; $\chi = (R/L)^2$; $a = \dfrac{\lambda}{c\gamma}$ - коефіцієнт температуропровідності; $\gamma -$ щільність середовища; λ - коефіцієнт теплопровідності; с-питома теплоємність; $F_0 = at \cdot R^{-2}$ - критерій Фур'є; $Pd = \dfrac{\omega R^2}{a}$ - критерій Предводітелева; $W(\varphi,z,F_0)$, $V(\varphi,z,F_0) \in \mathrm{C}(\mathrm{D})$.

Тоді рішення крайової задачі (1)-(4) $\theta(\rho,\varphi,z,F_0)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ і φ, z, один раз по t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [10], тобто $\theta(\rho,\varphi,z,t) \in C^{2,1}(D) \cap C(\overline{D})$, а функції $W(\varphi,z,F_0)$, $V(\varphi,z,F_0)$, $\theta(\rho,\varphi,z,F_0)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [11]:

$$\begin{Bmatrix} \theta(\rho,\varphi,z,F_0) \\ V(\varphi,z,F_0) \\ W(\varphi,z,F_0) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \theta_n(\rho,z,F_0) \\ V_n(z,F_0) \\ W_n(z,F_0) \end{Bmatrix} \cdot \exp(in\varphi), \tag{5}$$

де

$$\begin{Bmatrix} \theta_n(\rho,z,F_0) \\ V_n(z,F_0) \\ W_n(z,F_0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \theta(\rho,\varphi,z,F_0) \\ V(\varphi,z,F_0) \\ W(\varphi,z,F_0) \end{Bmatrix} \cdot \exp(-in\varphi)\,d\varphi, \tag{6}$$

де $\theta_n(\rho,z,F_0) = \theta_n^{(1)}(\rho,z,F_0) + i\theta_n^{(2)}(\rho,z,F_0)$, $\mathrm{V_n}(\mathrm{z},F_0) = \mathrm{V_n^{(1)}}(\mathrm{z},F_0) + i\,\mathrm{V_n^{(2)}}(\mathrm{z},F_0)$,
$\mathrm{W_n}(\mathrm{z},F_0) = \mathrm{W_n^{(1)}}(\mathrm{z},F_0) + i\,\mathrm{W_n^{(2)}}(\mathrm{z},F_0)$, i – уявна одиниця. (7)

З огляду на те, що $\theta(\rho,\varphi,z,F_0)$ функція дійсна, обмежимося надалі розглядом $\theta_n(\rho,z,F_0)$ для n=0,1,2,…,тому що $\theta_n(\rho,z,F_0)$ і $\theta_{-n}(\rho,z,F_0)$ будуть комплексно спряженими [11]. Підставляючи значення функцій з (5)-(7) у (1)-(4) одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial F_0} + \vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)} = \frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial\rho} - \frac{n^2}{\rho^2}\theta_n^{(i)} + \chi\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial z^2} \tag{8}$$

с початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho,z,0) = 0, \tag{9}$$

і граничними умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho_0,z,F_0) = W_n^{(i)}(z,F_0), \qquad \theta_n^{(i)}(1,z,F_0) = V_n^{(i)}(z,F_0) \tag{10}$$

$$\theta_n^{(i)}(\rho,0,F_0) = 0, \qquad \theta_n^{(i)}(\rho,1,F_0) = 0, \tag{11}$$

де $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n;$ $\vartheta_n^2 = \omega n;$ $\mathrm{m}_1 = 2$; $\mathrm{m}_2 = 1$; i=1,2.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (8) інтегральне перетворення Ханкеля [13]:

$$\bar{f}(\mu_{n,k}) = \int_{\rho_0}^{1} \rho\, \mathrm{f}(\rho)\,\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho)\,d\rho, \tag{12}$$

де $\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho) = Y_n(\mu_{n,k}\rho_0)J_n(\mu_{n,k}\rho) - J_n(\mu_{n,k}\rho_0)Y_n(\mu_{n,k}\rho)$; $J_n(x), Y_n(x)$ – функції Бесселя $1^{го}$ і $2^{го}$ роду $n^{го}$ порядку відповідно; $\mu_{n,k}$ – корні трансцендентного рівняння

$$Y_n(\mu_{n,k}\rho_0)J_n(\mu_{n,k}) - J_n(\mu_{n,k}\rho_0)Y_n(\mu_{n,k}) = 0,$$

які можна знайти по формулі [4]:

$$\mu_{n,k} = \delta + p\delta^{-1} + (q - p^2)\cdot\delta^{-3} + (r - 4pq + 2p^3)\cdot\delta^{-5} + \ldots,$$

де $\delta = \mathrm{k}\pi(\rho_0 - 1)$; $\mathrm{p} = (\mathrm{m}-1)(8\rho_0)^{-1}$; $\mathrm{q} = 4(\mathrm{m}-1)(\mathrm{m}-25)(\rho_0{}^3 - 1)\left[3(\rho_0 - 1)(8\rho_0)^3\right]^{-1}$;

$r = 32(m-1)(m^2 - 114m + 1073)(\rho_0{}^5 - 1)\left[5(8\rho_0)^3(\rho_0 - 1)\right]^{-1}$; $\mathrm{m} = 4\mathrm{n}^2$.

Формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho)}{\left\|\Psi_{n,k}\right\|^2} \bar{f}(\mu_{n,k}) \tag{13}$$

де $\left\|\Psi_{n,k}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left\{\left[\Psi'_{n,k}(\mu_{n,k})\right]^2 - \rho_0\left[\Psi'_{n,k}(\mu_{n,k}\rho_0)\right]^2\right\}$; $\Psi'_{n,k}(\mu_{n,k}\rho_0) = \left[\frac{d\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho)}{d(\mu_{n,k}\rho)}\right]_{\rho=\rho_0}$.

В результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial F_0} + \vartheta_n^{(i)} \bar{\theta}_n^{(m_i)} = \Omega_{n,k}^{(i)}(\mu_{n,k}, z, F_0) - \mu_{n,k}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \bar{\theta}_n^{(i)}}{\partial z^2} \tag{14}$$

с початковими умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, z, 0) = 0, \tag{15}$$

і граничними умовами

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, 0, F_0) = 0, \qquad \bar{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, 1, F_0) = 0, \qquad \mathrm{i}=1,2. \tag{16}$$

де $\Omega_{n,k}^{(i)}(\mu_{n,k}, z, F_0) = \mu_{n,k}\left[\rho_0 \Psi'_{n,k}(\mu_{n,k}\rho_0) W_n^{(i)} - \Psi'_{n,k}(\mu_{n,k}) V_n^{(i)}\right]$; i=1,2.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (14) інтегральне перетворення Фур'є [13]:

$$\hat{f}(\lambda_m) = \int_0^1 f(x)\sin(\pi \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{x})\, \mathrm{dx},$$

де $\lambda_m = \pi \cdot m$; m=1,2,…,а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(x) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{x}) \cdot \hat{f}(\lambda_m). \tag{17}$$

В результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\hat{\bar{\theta}}_n^{(i)}}{d F_0} + \vartheta_n^{(i)} \hat{\bar{\theta}}_n^{(m_i)} = \hat{\Omega}_{n,k}^{(i)}(\mu_{n,k}, \lambda_m, F_0) - \left(\mu_{n,k}^2 + \chi \cdot \lambda^2{}_m\right) \hat{\bar{\theta}}_n^{(i)} \tag{18}$$

с початковими умовами

$$\hat{\bar{\theta}}_n^{(i)}(\mu_{n,k}, \lambda_m, 0) = 0, \tag{19}$$

де i=1,2.

Застосовуємо до системи звичайних диференціальних рівнянь (18) інтегральне перетворення Лапласа [13]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau}\, \mathrm{d}\tau.$$

В результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{\hat{\bar{\theta}}}_n^{(i)}$:

$$s\tilde{\hat{\bar{\theta}}}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)} \cdot \tilde{\hat{\bar{\theta}}}_n^{(m_i)} = \tilde{\hat{\Omega}}_{n,k}^{(i)}(\mu_{n,k}, \lambda_m, s) - \left(\mu_{n,k}^2 + \lambda^2{}_m\right) \tilde{\hat{\bar{\theta}}}_n^{(i)} \tag{20}$$

де i=1,2.

Застосовуючи до зображення функцій (20) формули оберненого перетворення Лапласа [13], одержуємо оригінали функцій:

$$\hat{\hat{\theta}}_n^{(i)}(\mu_{n,j},\beta_m,F_0)=\int\limits_0^{Fo}\left[\hat{\Omega}_{n,k}^{(i)}(\mu_{n,k},\lambda_m,F_0')\cdot\cos nPd(F_0-F_0')+\delta_i\hat{\Omega}_{n,k}^{(m_i)}(\mu_{n,k},\lambda_m,F_0')\sin nPd(F_0-F_0')\right]\cdot$$

$$\exp\left\{\left(\mu_{n,j}^{(i)}+x\beta_m^2\right)\left(F_0'-F_0\right)\right\}dF_0' \qquad (21)$$

де $\delta_1=-1,\ \delta_2=1$; i=1,2.

Таким чином з урахуванням формул обернених перетворень (13), (17) одержуємо температурне поле порожнистого циліндра який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ довжини L :

$$\theta(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{2\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left\langle 2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\hat{\hat{\theta}}_n^{(1)}(t)+i\cdot\hat{\hat{\theta}}_n^{(2)}(t)\right]\sin(\pi\,\mathrm{m}\,\mathrm{z})\right\rangle\frac{\Psi_{n,k}(\mu_{n,k}\rho)}{\left\|\Psi_{n,k}\right\|^2}\right\}\cdot\exp(in\varphi) \qquad (22)$$

де значення $\hat{\hat{\theta}}_n^{(1)}(t)$, $\hat{\hat{\theta}}_n^{(2)}(t)$ визначаються по формулам (21).

Висновки

Знайдено температурне поле (22) порожнистого циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ скінченної довжини L, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається, може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, прокатних валках, турбінах і т.і.).

Список використаної літератури

1. Каліниченко В. Вплив експлуатаційних факторів на напружено-деформований та граничний стан роликів машин безперервного лиття заготовок / Каліниченко В., Гопкало Н. // Вісник ТДТУ. - 2010. - Том 15. - № 1. - С. 41-51.
2. Домбровский Ф.С. Работоспособность наплавленных роликов машин непрерывного литья заготовок / Ф.С. Домбровский, Л.К. Лещинский // – К.: Институт электросварки им.Е.О.Патона, 1985. – 198с.
3. Будаква А.А. Профилирование валков листовых станов/ А.А. Будаква, Ю.В. Коновалов, К.Н. Ткалич, и др. // – К.: Техніка, 1986. – 190 с.
4. Капланов В. И. Некоторые вопросы к проблеме охлаждения прокатных валков / Капланов В.И., Петренко А. С., и др. // Вісник Приазовського державного технічного університету. Серія: Технічні науки.- 2010 р. Вип. №20. – С. 94-97.
5. Гарбер Э. А. Моделирование теплового режима стана холодной прокатки с учетом различий в условиях охлаждения верхних и нижних валков / Э. А. Гарбер, В. О. Гусаров, Е. В. Дилигенский, В. В. Кузнецов // Металлург. – 2005. – N 6. – С. 66–69.
6. Гарбер Э.А. Моделирование теплового режима валков широкополосного стана горячей прокатки для определения эффективных режимов их охлаждения / Э.А. Гарбер [и др.] //Металлы. – 2009. – N3. – С. 34–47.
7. Бердник М. Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі Неймана теплообміну суцільного циліндра, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла / Бердник М. Г. // Вісник Дніпропетр. ун-та. Сер. «Механіка» – 2005.– №10. – С. 197–202.
8. Голицына Е. В. Математическое моделирование температурного поля в полом вращающемся цилиндре при нелинейных граничных условиях / Е.В. Голицына // Теплофизика высоких температур. Ноябрь-Декабрь. – 2008. – том 46, № 6. – С. 905 – 910.
9. Kuwashimo Kensuke Temperature distribution within a rotatinq cylindrieal body/ Kuwashimo Kensuke, Yamada Tominori // Bull. JSME. – 1978. – Vol. 21, N 152. – P. 266 – 272.
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков // – М., Высшая школа, 1967. – 599 С.
11. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г.Михлин // – М., Высшая школа, 1977. – 427 С.
12. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов // – М., Наука, 1980. – 384 С.
13. Галицын А.С., Жуковский А.И. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А.С. Галицын, А.И. Жуковский // – Киев., Наукова думка. 1979. – 561 С.
14. Грэй Э. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике / Э. Грэй, Г.Б. Мэтьюз // – М., 1949. – 386 С.