УДК 517.946

С.Г. БЛАЖЕВСЬКИЙ
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА ДИФУЗІЇ В ТРИШАРОВОМУ НЕОДНОРІДОМУ НЕОБМЕЖЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Операційним методом отримано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі про дифузійні процеси в тришарових необмежених середовищах з м'якими межами у випадку, коли моделювання дифузійних процесів здійснено за допомогою методу гібридного диференціального оператора Ейлера-Ейлера-Фур'є.

Ключові слова:інтегральне перетворення Лапласа, рівняння дифузії, крайова задача.

С.Г. БЛАЖЕВСКИЙ
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича

ЗАДАЧА ДИФФУЗИИ В ТРЕХСЛОЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ С МЯГКИМИ ГРАНИЦАМИ

Операционным методом получено интегральное изображение точного аналитического решения задачи о диффузионных процессах в трехслойных неоднородных неограниченных средах с мягкими границами в случае, когда моделирование диффузионных процессов осуществлено методом гибридного дифференциального оператора Эйлера-Эйлера-Фурье.

Ключевые слова: интегральное преобразование Лапласа, уравнение диффузии, краевая задача.

S.G. BLAZHEVSKIY
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

THE DIFFUSION PROBLEM IN THREE-LAYERED HETEROGENEOUS UNBOUNDED ENVIRONMENT WITH SOFT LIMITS

We get the integral representation of exact analytical solve of problem about diffusive processes in three-layered heterogeneous unbounded environments with soft limits by operating method, when the design of diffusion processes is carried out by the method of hybrid differential operator Euler-Euler-Fourier.

Keywords: integral Laplace transform, diffusion equation, boundary problem.

Постановка проблеми та аналіз публікацій по темі дослідження

Процеси дифузії, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертали до себе увагу протягом усієї історії розвитку суспільства. Але серйозні дослідження почалися з найпростішої моделі дифузійного процесу – диференціального рівняння дифузії (теплопровідності) параболічного типу [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u^2}{\partial r^2} = f(t,r)$$

з відповідними початковими та крайовими умовами. Потреби практики призводили до різного узагальнення даного рівняння. Слід відмітити появу в другій половині ХХ-го століття «Узагальненої термомеханіки», породженої гіперболічним рівнянням теплопровідності [2]. Розроблялися різні аналітичні, числові та аналітично-числові методи знаходження розв'язку.

Особливу увагу заслуговує розроблений в другій половині ХХ-го століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик для вивчення технічного стану композитних матеріалів. Це привело навіть у випадку жорсткості межі області до диференціального рівняння з сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функцій та її похідних [3]. Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі в цьому випадку одержати неможливо. Цих труднощів можна уникнути, якщо здійснити моделювання дифузійного процесу методом гібридних диференціальних операторів. При цьому межа середовища може бути м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

Мета статті

Дана робота присвячена моделюванню нестаціонарних дифузійних процесів методом гібридного диференціального оператора Ейлера-Ейлера-Фурье на трискладовому необмеженому сегменті в припущенні, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття хвиль.

Основна частина

Побудуємо обмежений в області $D_2 = \{(t, r): t \in (0, \infty), r \in I_2 = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 \geq 0\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1(t,r) - a_1^2 B_{\alpha_1}^*[u_1(t,r)] = f_1(t, r),\ r \in (R_0, R_1),\\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2(t,r) - a_2^2 B_{\alpha_2}^*[u_2(t,r)] = f_2(t, r),\ r \in (R_1, R_2), \qquad (1)\\ &\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3(t,r) - a_3^2 \frac{\partial^2 u_3(t,r)}{\partial r^2} = f_3(t, r),\ r \in (R_2, \infty),\end{aligned}$$

за початковими умовами

$$\begin{aligned} &u_1(t, r)|_{t=0} = g_1(r),\ r \in (R_0, R_1),\\ &u_2(t, r)|_{t=0} = g_2(r),\ r \in (R_1, R_2), \qquad (2)\\ &u_3(t, r)|_{t=0} = g_3(r),\ r \in (R_2, \infty),\end{aligned}$$

крайовими умовами

$$L_{11}^0[u_1(t,r)]|_{r=R_0} = \omega_0(t),\ \lim_{r\to\infty} r^\gamma u_3 = 0 \qquad (3)$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k[u_k(t,r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)]\right)|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t),\ j, k \in \{1, 2\}. \qquad (4)$$

У рівностях (1) – (4) беруть участь диференціальні оператори Ейлера $B_\alpha^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1) r \frac{d}{dr} + \alpha^2$, Фур'є $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ та диференціальні оператори

$$L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t},\ m, j \in \{1, 2\};\ k \in \{0, 1, 2, 3\}. \qquad (5)$$

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $a_j > 0$; $2\alpha_j + 1 > 0$; $\alpha_{11}^0 \leq 0$, $\beta_{11}^0 \geq 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0$, $\alpha_{22}^3 \geq 0$, $\beta_{22}^3 \geq 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0$, $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$, $\delta_{jm}^k \geq 0$, $\gamma_{jm}^k \geq 0$, $j, m, k = 1, 2$; $c_{11,j}\, c_{21,k} > 0$, $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0$, $\delta_{2j}^k \beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k \beta_{2j}^k = \alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k$.

Нехай задані та шукані функції є оригіналами за Лапласом відносно змінної t [1]. У зображенні за Лапласом отримуємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині I_2 розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера та Фур'є для модифікованих функцій:

$$\begin{aligned} &\left(B_{\alpha_1}^* - q_1^2\right) u_1^*(p,r) = -F_1^*(p,r),\ r \in (R_0, R_1),\\ &\left(B_{\alpha_2}^* - q_2^2\right) u_2^*(p,r) = -F_2^*(p,r),\ r \in (R_1, R_2), \qquad (6)\\ &\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_3^2\right) u_3^*(p,r) = -F_3^*(p,r),\ r \in (R_2, \infty),\end{aligned}$$

за крайовими умовами

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^0\right) u_1^*(p,r)\Big|_{r=R_0} = \omega_{01}^*(p),\ \lim_{r\to\infty} r^\gamma u_3^* = 0 \qquad (7)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k\right) u_k^*(p,r) - \left(\overline{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j2}^k\right) u_{k+1}^*(p,r)\right]\Big|_{r=R_k} = \overline{\omega}_{jk}^*(p),\ j, k \in \{1, 2\}. \qquad (8)$$

У рівностях (6) – (8) беруть участь функції:

$q_j = a_j^{-2}(p + \gamma_j^2)^{1/2}$, $F_j^*(p,r) = a_j^{-2}(f_j^*(p,r) + g_j(r))$, $j \in \{1, 2, 3\}$; $\overline{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k p$,

$\overline{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m p$, $u^*(p) = \int_0^\infty u(t,r) e^{-pt} dt$, $\overline{\omega}_0^*(p) = \omega_0^*(p) + \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)$,

$\overline{\omega}^*_{jk}(p) = \omega^*_{jk}(p) + \psi_{jk}$; $\psi_{jk} = \delta^k_{j1} g'_k(R_k) + \gamma^k_{j1} g_k(R_k) - [\delta^k_{j2} g'_{k+1}(R_k) + \gamma^k_{j2} g_{k+1}(R_k)]$,

$\mathrm{Re}q_j > 0$, $p = \sigma + is$, $i^2 = -1$, $\omega^*_0(p) = \int\limits_0^\infty \omega_0(t) e^{-pt} dt$, $\omega^*_{jk}(p) = \int\limits_0^\infty \omega_{jk}(t) e^{-pt} dt$,

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_\alpha - q^2)v = 0$ утворюють функції $r^{-\alpha-q}$, $r^{-\alpha+q}$; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q^2)v = 0$ складають функції e^{qr} та e^{-qr} [4].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (6) – (8) методом функцій Коші:

$$u^*_1 = A_1 r^{-\alpha_1 - q_1} + B_1 r^{-\alpha_1 + q_1} + \int\limits_{R_0}^{R_1} E^*_1(p,r,\rho) F^*_1(p,\rho) \rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho ,$$

$$u^*_2 = A_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + B_2 r^{-\alpha_2 + q_2} + \int\limits_{R_1}^{R_2} E^*_2(p,r,\rho) F^*_2(p,\rho) \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho , \tag{9}$$

$$u^*_3 = A_3 \mathrm{ch} q_3 r + B_3 \mathrm{sh} q_3 r + \int\limits_{R_2}^{\infty} E^*_3(p,r,\rho) F^*_3(p,\rho) d\rho .$$

У рівностях (9) беруть участь функції Коші $E^*_j(p,r,\rho)$:

$$E^*_1(p,r,\rho) = -\frac{1}{2q_1 \Delta_{\alpha_1;11}} \begin{cases} \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r) \Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho) \Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r), & R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \tag{10}$$

$$E^*_2(p,r,\rho) = -\frac{1}{2q_2 \Delta_{\alpha_2;11}} \begin{cases} \Psi^{1*}_{\alpha_2,12}(q_2,r) \Psi^{2*}_{\alpha_2}(q_2,\rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ \Psi^{1*}_{\alpha_2,12}(q_2,\rho) \Psi^{2*}_{\alpha_2}(q_2,r), & R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \tag{11}$$

$$E^*_3(p,r,\rho) = \frac{1}{q_3(\overline{\alpha}^2_{12} q_3 - \overline{\beta}^2_{12})} \begin{cases} \Phi^2_{22}(q_3 R_2, q_3 \rho) \Phi^2_{12}(q_3 R_2, q_3 r), & R_2 < r < \rho < \infty, \\ \Phi^2_{22}(q_3 R_2, q_3 r) \Phi^2_{12}(q_3 R_2, q_3 \rho), & R_2 < \rho < r < \infty. \end{cases} \tag{12}$$

У рівностях (10) – (12) прийняті позначення:

$$Z^{m1}_{\alpha_n;jk}(q_n, R_m) = [(\overline{\beta}^m_{jk} - \alpha R^{-1}_m \overline{\alpha}^m_{jk}) - \overline{\alpha}^m_{jk} R^{-1}_m q_n] R_m^{-\alpha_n - q_n} ,$$

$$Z^{m2}_{\alpha_1;jk}(q_1, R_m) = [(\overline{\beta}^m_{jk} - \alpha R^{-1}_m \overline{\alpha}^m_{jk}) + \overline{\alpha}^m_{jk} R^{-1}_m q_n] R_m^{-\alpha_n + q_n} ,$$

$$\Psi^{m*}_{\alpha_n;j2}(q_n, r) = Z^{m2}_{\alpha_n;j2}(q_n, R_m) r^{-\alpha_n - q_n} - Z^{m1}_{\alpha_n;j2}(q_n, R_m) r^{-\alpha_n + q_n} , \ n, m = 1, 2,$$

$$\Delta_{\alpha_n;j2}(q_n, R_{n-1}, R_n) = Z^{n-1,1}_{\alpha_n;j2}(q_n, R_{n-1}) Z^{n-1,1}_{\alpha_n;11}(q_n, R_n) - Z^{n-1,2}_{\alpha_n;j2}(q_n, R_{n-1}) Z^{n-1,2}_{\alpha_n;11}(q_n, R_n) , \ j = 1, 2,$$

$$\Phi^2_{12}(q_3 R_2, q_3 r) = V^{21}_{12}(q_3, R_2) \mathrm{ch} q_3 r - V^{21}_{12}(q_3, R_2) \mathrm{sh} q_3 r \equiv$$

$$\equiv \overline{\alpha}^1_{12} q_3 \mathrm{ch} q_3 (r - R_2) - \overline{\beta}^1_{12} \mathrm{sh} q_3 (r - R_2) , \ \Phi^2_{22}(q_3 R_2, q_3 r) = e^{-q_3(r - R_2)} .$$

Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення величин A_1, A_2, B_1, B_2 та A_3 дають неоднорідну алгебраїчну систему:

$$A_1 Z^{01}_{\alpha_1,11} + B_1 Z^{02}_{\alpha_1,11} = \overline{\omega}^*_0(p) ,$$

$$A_1 Z^{11}_{\alpha_1;11} + B_1 Z^{12}_{\alpha_1;11} + A_2 Z^{11}_{\alpha_1,12} + B_2 Z^{12}_{\alpha_1,12} = \overline{\omega}^*_{11}(\mathrm{p}) ,$$

$$A_1 Z^{11}_{\alpha_1;21} + B_1 Z^{12}_{\alpha_1;21} + A_2 Z^{11}_{\alpha_1,12} + B_2 Z^{12}_{\alpha_1,22} = \overline{\omega}^*_{21}(p) + G^*_{12} ,$$

$$A_2 Z^{21}_{\alpha_2;11} + B_1 Z^{22}_{\alpha_2;11} + A_3 \Phi^{21}_{12} = \overline{\omega}^*_{12}(p) ,$$

$$A_2 Z^{21}_{\alpha_2;21} + B_1 Z^{22}_{\alpha_2;21} + A_3 \Phi^{21}_{22} = \overline{\omega}^*_{22}(p) + G^*_{23}. \tag{13}$$

У системі (13) беруть участь функції:

$$G^*_{12} = -\frac{c^*_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \int_{R_0}^{R_1} \frac{\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)} F^*_1(p,\rho)\rho^{2\alpha_1-1} d\rho +$$

$$+ \frac{c^*_{21}}{R_2^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi^{2*}_{\alpha_2;11}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)} F^*_2(p,\rho) d\rho,$$

$$G^*_{23} = -\frac{c^*_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Psi^{2*}_{\alpha_2;12}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_2;11}(q_2,R_1,R_2)} F^*_2(p,\rho) d\rho - c^*_{22} \int_{R_2}^{\infty} \frac{e^{-q_3(\rho-R_2)}}{\overline{\alpha}^2_{12} q_3 - \overline{\beta}^2_{12}} F^*_3(p,\rho) d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (6) – (8): для $p = \sigma + is$ із $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\operatorname{Im} p = s \in (-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (13)

$$\Delta_\alpha(p) \equiv \Phi^2_{22}(q_3R_2, q_3R_3) A_{\alpha_1;1}(p) - \Phi^2_{12}(q_3R_2, q_3R_3) A_{\alpha_1;2}(p) =$$

$$= \Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1) B_{\alpha_2;2}(p) - \Delta_{\alpha_1;21}(q_1,R_0,R_1) B_{\alpha_2;1}(p) \neq 0, \ (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2). \tag{14}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (6) – (8):

1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W^*_{\alpha;11}(p,r) = \frac{1}{\Delta_\alpha} [B_{\alpha_2;2}(p) \Psi^{1*}_{\alpha_1;11}(q_1,r) - B_{\alpha_2;1}(p) \Psi^{1*}_{\alpha_1;21}(q_1,r)],$$

$$W^*_{\alpha;12}(p,r) = -\frac{2q_1 c^*_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha} Q_{\alpha_2;2}(p,r), \ W^*_{\alpha;13}(p,r) = -\frac{2q_1 c^*_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{c^*_{12} q_2}{\Delta_\alpha} e^{-q_3(r-R_2)};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{1*}_{\alpha;11}(p,r) = -\frac{B_{\alpha_2;2}(p)}{\Delta_\alpha(p)} \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r), \ R^{1*}_{\alpha;21}(p,r) = -\frac{B_{\alpha_2;1}(p)}{\Delta_\alpha(p)} \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),$$

$$R^{1*}_{\alpha;12}(p,r) = -\frac{c^*_{21} q_2}{\Delta_\alpha(p)} \Delta_{\alpha_1,21}(q_1,R_0) \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),$$

$$R^{1*}_{\alpha;22}(p,r) = -\frac{c^*_{21} q_2}{\Delta_\alpha(p)} \Delta_{\alpha_2,12}(q_3,R_2) \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r),$$

$$R^{2*}_{\alpha;11}(p,r) = \frac{\Delta_{\alpha_1;21}(q_3,R_0,R_1)}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha_2;2}(p,r), \ R^{2*}_{\alpha;21}(p,r) = -\frac{\Delta_{\alpha_1;11}(q_1,R_0,R_1)}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha_2;2}(p,r),$$

$$R^{2*}_{\alpha;12}(p,r) = -\frac{\Delta_{\alpha_1,22}(q_1,R_0,R_1)}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha_1;1}(p,r), \ R^{2*}_{\alpha;22}(p,r) = \frac{\Delta_{\alpha_1,22}(q_1,R_0,R_1)}{\Delta_\alpha(p)} Q_{\alpha_1;1}(p,r),$$

$$R^{3*}_{\alpha;11}(p,r) = -\frac{c^*_{12} q_2}{\Delta_\alpha(p)} \Delta\alpha_{1;21} e^{-q_3(r-R_2)}, \ R^{3*}_{\alpha;21}(p,r) = \frac{c^*_{12} q_2}{\Delta_\alpha(p)} \Delta\alpha_{1;11}(q_1,R_0,R_1) e^{-q_3(r-R_2)}, \tag{15}$$

$$R^{3*}_{\alpha;12}(p,r) = -\frac{A_{\alpha_1;2}}{\Delta_\alpha(p)} e^{-q_3(r-R_2)}, \ R^{3*}_{\alpha;22}(p,r) = -\frac{A_{\alpha_1;2}}{\Delta_\alpha(p)} e^{-q_3(r-R_2)};$$

4) породжені неоднорідністю системи (6) функції впливу

$$H^*_{\alpha;11}(p,r,\rho) = -\frac{1}{2q_1\Delta_\alpha(p)} \begin{cases} \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r) W^*_{\alpha;11}(p,\rho), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho) W^*_{\alpha;11}(p,r), & R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases}$$

$$H^*_{\alpha;12}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{21}}{\Delta_\alpha(p)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,r)Q_{\alpha_2;2}(p,\rho),$$

$$H^*_{\alpha;13}(p,r,\rho)=\frac{q_2c^*_{12}c^*_{22}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha}\Psi^{0*}_{\alpha_2;11}(q_1,r)e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$H^*_{\alpha;21}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{11}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha(p)}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(q_1,\rho)Q_{\alpha_2;2}(p,r),$$

$$H^*_{\alpha;22}(p,r,\rho)=-\frac{1}{2q_2\Delta_\alpha(p)}\begin{cases}Q_{\alpha_1;1}(p,r)Q_{\alpha_2;2}(p,\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ Q_{\alpha_1;1}(p,\rho)Q_{\alpha_2;2}(p,r), & R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$H^*_{\alpha;23}(p,r,\rho)=-\frac{c^*_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}\Delta_\alpha(p)}Q_{\alpha_1;1}(p,r)e^{-q_3(r-R_2)}, \qquad (16)$$

$$H^*_{\alpha;31}(p,r,\rho)=-\frac{c^*_{11}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\frac{q_2c^*_{12}}{\Delta_\alpha}\Psi^{0*}_{\alpha_1;11}(p,r)e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$H^*_{\alpha;32}(p,r,\rho)=-\frac{c^*_{12}}{\Delta_\alpha(p)}Q_{\alpha_1;2}(p,\rho)e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$H^*_{\alpha;33}(p,r,\rho)=-\frac{1}{2q_3}\begin{cases}\Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,r)e^{-q_3(\rho-R_2)}, & R_2<r<\rho<\infty,\\ \Psi^{3*}_{\alpha_2;22}(q_3,\rho)e^{-q_3(r-R_2)}, & R_2<\rho<r<\infty.\end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (13) й підстановки одержаних значень A_j та B_j (j = 1, 2, 3) у формули (9) та низки елементарних перетворень одержимо єдиний розв’язок крайової задачі (6) – (8):

$$u^*_j(p,r)=W^*_{\alpha;1j}(p,r)\overline{\omega}^*_0(p)+\sum_{m,k=1}^{2}R^{j*}_{\alpha;mk}\overline{\omega}^*_{mk}(p)+$$
$$+\int_{R_0}^{R_1}H^*_{\alpha j1}(p,r,\rho)F^*_1(p,\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H^*_{\alpha;j2}(p,r,\rho)F^*_2(p,\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho+ \qquad (17)$$
$$+\int_{R_2}^{\infty}H^*_{\alpha;j3}(p,r,\rho)F^*_3(p,\rho)d\rho,\ j=1,2,3.$$

Повертаючись у формулах (17) до оригіналу, одержуємо єдиний розв'язок задачі (1) – (4):

$$u_j(t,r)=\int_0^t W_{(\alpha);1j}(t-\tau,r)\omega_0(\tau)d\tau+[\delta^0_{11}g'_1(R_0)+\gamma^0_{11}g_1(R_0)]W_{(\alpha);1j}(t,r)+$$
$$+\sum_{m,k=1}^{2}\left[\int_0^t R^j_{(\alpha);mk}(t-\tau,r)\omega_{mk}(\tau)d\tau+R^j_{(\alpha);mk}(t,r)\psi_{mk}\right]+$$
$$+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}H_{(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_1(\rho)]a_1^{-2}\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+$$
$$+\int_0^t\int_{R_1}^{R_2}H_{(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_2(\rho)]a_2^{-2}\rho^{2\alpha_2+1}d\rho+$$
$$+\int_0^t\int_{R_2}^{\infty}H_{(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)g_3(\rho)]a_3^{-2}d\rho,\ j=1,2,3.$$

Тут $\delta_{+}(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau = 0$.

Зауваження. Вибором параметрів, які беруть участь у постановці даної дифузійної задачі, можна виділити безпосередньо із загальних структур будь-який практично важливий випадок.

Висновок

Вектор-функція $u(t, r) = \{u_1(t, r); u_2(t, r); u_3(t, r)\}$ визначає інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку задачі моделювання дифузійних процесів в неоднорідному середовищі з м'якими межами методом ГДО на сегменті полярної осі.

Список використаної літератури

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
5. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.