УДК 519.7

Ю.В. БРАЗАЛУК, Д.В. ЕВДОКИМОВ, Р.А. ШУЛЬГА
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ И ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КОЛЬЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассмотрена методика сравнения эффективности двух существенно различных численных методов путем численного эксперимента на краевых задачах, имеющих известные аналитические решения в квадратурах. Обсуждены понятие эффективности и критерии эффективности численного алгоритма. Численный эксперимент проводился для задач Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа в кольцевых областях и во внешности круга (метод граничных элементов). Полученные результаты свидетельствуют о более высокой эффективности метода граничных элементов. Сделанные выводы могут быть полезны при разработке пакетов прикладных программ различного назначения и создании систем автоматического проектирования.

Ключевые слова: метод конечных разностей, метод граничных элементов, вычислительная эффективность, погрешность вычисления, уравнение Лапласа, задача Неймана, задача Дирихле, кольцевая область.

Ю.В. БРАЗАЛУК, Д.В. ЄВДОКИМОВ, Р.О. ШУЛЬГА
Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара

ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ТА ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ РОЗВ’ЯЗАННІ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У КІЛЬЦЕВИХ ОБЛАСТЯХ

Розглянуто методику порівняння ефективності двох суттєво різних чисельних методів шляхом обчислювального експерименту на крайових задачах, які мають відомий аналітичний розв’язок у квадратурах. Обговорені поняття ефективності та критерії ефективності чисельного алгоритму. Обчислювальний експеримент проводився для задач Неймана та Діріхлє для рівняння Лапласа в кільцевих областях та у зовнішності кола (метод граничних елементів). Отримані результати свідчать про більш високу ефективність методу граничних елементів. Зроблені висновки можуть бути корисні при розробці пакетів прикладних програм різного призначення, а також створенні систем автоматичного проектування.

Ключові слова: метод скінченних різниць, метод граничних елементів, обчислювальна ефективність, похибка обчислень, рівняння Лапласа, задача Неймана, задача Діріхлє, кільцева область.

IU.V. BRAZALUK, D.V. YEVDOKYMOV, R.O. SHULHA
Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

EFFECTIVENESS COMPARISON OF FINITE DIFFERENCE METHOD AND BOUNDARY ELLEMENT METHOD IN SOLUTION OF ELLIPTIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN RING-LIKE DOMAINS

Effectiveness comparison technique of two sufficiently different numerical methods by computational experiment is considered on boundary value problem, having known analytical solution in quadratures. Conception of effectiveness and effectiveness criteria of numerical algorithm are discussed. Numerical experiment is made for Neumann and Dirichlet problems for Laplace equation in ring-like domains and in exterior of circle (boundary element method). The obtained results confirm higher effectiveness of boundary element method. The made conclusions may be useful for development of applied computer code packets and computer aided designer system.

Key words: finite difference method, boundary element method, computational experiment, calculation error, Laplace equation, Neumann problem, Dirichlet problem, ring-like domain.

Введение

Практически повсеместное массовое использование численного моделирования, как в научных, так и в производственных целях, привело в последнее время к такому росту числа решаемых численно различных краевых задач, что даже относительно небольшое улучшение качества этого процесса (в виде улучшения точности, сокращения времени счета или уменьшения требуемых ресурсов компьютера) сулит ощутимые выгоды, которые, по-видимому, будут только возрастать в дальнейшем. Несомненно, что удачный выбор алгоритма численного решения, реализуемого в программном обеспечении, предназначенном для многократных расчетов, способен сократить затраты времени исследователей или разработчиков техники, сэкономить средства благодаря более рациональному использованию ресурсов вычислительной техники, и, в конечном итоге, улучшить качество получаемого научного или технического результата. К сожалению, современный численный анализ изобилует самыми разнообразными вычислительными алгоритмами, их вариациями и модификациями, большинство из которых явно недостаточно исследованы, вследствие чего они так и не были надлежащим образом систематизированы. Столь неудовлетворительное состояние вопроса объясняется, прежде всего, тем, что на протяжении более чем шестидесятилетней истории численного анализа алгоритмы и их модификации создавались с совершенно различными прикладными вычислительными целями и, в значительной мере, оставались в сфере интересов того направления предметной дисциплины, которая стимулировала их появление. Более того, результаты расчетов, выполненных по данному алгоритму, могут существенным образом зависеть от особенностей его программной реализации. Разнообразие сред разработки и вспомогательных программных продуктов с многочисленными недокументированными особенностями существенно затрудняют как проведение вычислительного эксперимента, так и трактовку его результатов, поскольку не позволяет оценить отдельно погрешность собственно алгоритма и накопление погрешности в результате тех или иных особенностей программы, а затраты машинного времени и памяти компьютера от одной программной реализации к другой могут отличаться в несколько раз. В силу перечисленных обстоятельств сравнение путем численного эксперимента вычислительной эффективности двух различных алгоритмов представляет собой задачу нетривиальную и с методологической, и с практической точек зрения. Однако постоянно возрастающая актуальность подобных сравнений заставляет решать указанную проблему.

Постановка проблемы

В современном численном анализе можно условно выделить три основных направления: метод конечных разностей, метод конечных элементов и так называемые альтернативные методы. Благодаря универсальности и относительной простоте метода конечных разностей этот метод оказался исторически первым универсальным методом численного анализа. Несколько уступая методу конечных разностей по универсальности, но, в то же время, значительно превосходя его при решении задач в областях сложной геометрической формы, метод конечных элементов несколько позже стал вторым универсальным подходом численного расчета, почти полностью вытеснив метод конечных разностей в ряде направлений, связанных с решением краевых задач эллиптического типа. В настоящее время более 90% прикладных расчетов (а по некоторым оценкам 98%) производится при помощи методов конечных разностей и конечных элементов. Термин альтернативные методы объединяет значительное число разнообразных приближенных аналитических, полуаналитических, численно-аналитических методов, значительной частью появившихся еще в «докомпьютерную эпоху». К альтернативным методам относятся методы теории потенциала (метод граничных элементов, метод функций Грина, методы дискретных особенностей, панельные методы), вариационные методы (метод Ритца, метод Трефтца) и множество инженерных подходов. Если для методов конечных разностей и конечных элементов проводились обширные теоретические и методологические исследования, позволившие создать классификацию алгоритмов и обеспечить достаточно четкую и последовательную их систематизацию внутри метода, то для альтернативных методов подобные исследования не проводились, более того, сомнительно, чтобы можно было построить единую систематизацию альтернативных методов. Тем не менее, в рамках отдельных методов, относящихся к альтернативным, были предприняты попытки классификации и систематизации. В результате, внутри отдельных методов как направлений развития численного анализа, сформировались устойчивые системы взглядов, методик и отношений сравнения точности и эффективности, позволяющих дать заключение о свойствах алгоритма в сравнении с алгоритмами того же метода. Естественным продолжением этих работ представляется сравнение алгоритмов, относящихся к различным методам. Однако тут возникает существенные трудности, преодоление которых требует нетрадиционных подходов и неординарных усилий. Прежде чем сравнивать алгоритмы необходимо выработать количественный критерий такого сравнения. Традиционно в качестве подобных критериев рассматривали точность расчета и затраты ресурсов компьютера (машинное время, оперативная и внешняя память). В то же время, совершенно очевидно, что результат любого практического расчета существенно зависит от программной реализации алгоритма, поэтому основной тенденцией в сравнительной оценке алгоритмов является отказ от численного эксперимента в пользу теоретических оценок. В результате, появилось большое число работ по численному моделированию, в которых в качестве количественного критерия точности используется порядок аппроксимации, а для количественной оценки затрат компьютерных ресурсов применяется оценка количества арифметических операций. К сожалению, если указанные критерии работоспособны для близких по логической структуре алгоритмов, относящихся к одному методу, то для различных по структуре алгоритмов применение таких подходов – явный нонсенс. Поясним эту мысль: если для метода конечных разностей основными операциями являются простейшие действия над координатами узлов сетки, то, например, в методе граничных элементов самой трудоемкой частью вычислений является численное определение интегралов от сложных функций по граничным элементам; понятно, что эти операции несоизмеримы.

Кроме того, различные алгоритмы могут иметь специфические особенности, вообще не проявляющиеся у других численных подходов. Примером тому может служить реализация условий в бесконечно удаленной точке, возникающих во внешних задачах, что будет также рассмотрено в настоящей работе. Метод конечных разностей, как и метод конечных элементов, требует, чтобы условия на бесконечности были "снесены" на внешнюю границу сетки, которая, разумеется, не может быть бесконечной. В то же время метод граничных элементов, равно как и другие методы вычислительной теории потенциала, позволяет ограничиться решением только на актуальной границе области, реализуя условия в бесконечно удаленной точке автоматически.

Учитывая недостаточно четкую формулировку понятия эффективности численного метода, наличие принципиальных отличий в логических подходах разных алгоритмов, не исключающих зависимость результатов от способа и качества программирования, проблема сравнения алгоритмов, относящихся к различным численным методам, представляется весьма нетривиальной и для своего разрешения требует разработки специальных подходов.

Анализ последних исследований и публикаций

Теория алгоритмов вычислительной математики как часть общей теории алгоритмов стремительно развивались на протяжении всего периода использования компьютеров в вычислительной практике, то есть, с пятидесятых годов двадцатого века, однако особенно плодотворными были первые десятилетия ее развития. В результате, сформировалась достаточно полная и стройная теория, описание которой можно найти, например, в монографиях [1-4]. В то же время появилась известная монография Д. ван Тассела [5], где среди прочих идей было предложено (в современной терминологии) использование вычислительного эксперимента для анализа свойств, как программного обеспечения, так и вычислительного алгоритма. Следует отметить, что классическая теория весьма скептически оценивает подобную возможность, однако в последнее время в вычислительной практике преобладает взгляд на численный алгоритм как на важную составляющую часть программного продукта, неотделимую от программной реализации, что в корне отличается от традиционных взглядов на алгоритм, как математический объект, существующий вне программной реализации. Настоящая статья – это не первое обращение ее авторов к рассматриваемой тематике, ей предшествуют работы [6, 7]. Именно в этих работах была сформулирована идея отказа от использования количества операций и порядка аппроксимации как качественных характеристик вычислительного алгоритма при сравнении существенно различных алгоритмов в пользу единого критерия – эффективности алгоритма. Уже из результатов работы [6] понятно, что для линейных однородных эллиптических краевых задач метод граничных элементов по эффективности превосходит метод конечных разностей, в том числе и в областях кольцевой формы, но количественные характеристики, необходимые для сравнения методов оставались неясными, поскольку решение методом конечных разностей в кольцевой области на согласованной сетке требует больших затрат машинного времени и обеспечивает меньшую точность, чем тот же метод, реализованный в прямоугольной области на декартовой ортогональной сетке. С другой стороны, в кольцевой области нет угловых точек, снижающих точность метода граничных элементов, но, в то же время, прямоугольные области не требуют аппроксимации границ области решения, что для кольцевой области неизбежно.

Формулирование целей статьи

Очевидным побудительным мотивом написания данной статьи была потребность сравнить систематическую ошибку, вносимую реализацией в вычислительном процессе условий в бесконечно удаленной точке на конечное расстояние, с неизбежными ошибками расчета, присущими любому вычислительному процессу. Очевидно, что исследование данного вида погрешностей невозможно без систематического изучения погрешностей расчетов в кольцевых областях, что и определило основную цель настоящей работы: Путем численного эксперимента на примере краевых задач для уравнения Лапласа в плоском случае проанализировать погрешность методов граничных элементов и конечных разностей, а также сравнить суммарные вычислительное ошибки этих методов с систематической ошибкой, вызванной переносом условия в бесконечно удаленной точке на конечное расстояние.

Основной материал исследования

Перед изложением собственно сути проведенных работ представляется целесообразным обосновать, насколько это возможно, метод исследования и дать определение понятию вычислительной эффективности алгоритма. Как отмечалось выше, в основу использованного подхода положен анализ результатов численных экспериментов на задачах, имеющих известное аналитическое решение в квадратурах. Очевидно, что результаты подобных численных расчетов никак не могут считаться строгим доказательством тех или иных свойств алгоритма, однако технология программирования в настоящее время достигла такого уровня развития и стандартизации, что с эвристической точки зрения подобный расчет может рассматриваться как весомый аргумент, подтверждающий тот или иной тезис.

Что касается понятия вычислительной эффективности алгоритма, то оно достаточно очевидно на интуитивном уровне и заключается в принципе: "минимальная ошибка расчета за минимальное время". Однако количественная мера вычислительной эффективности не столь очевидна и вызывает интенсивные дискуссии. В работах [6, 7] была предложена следующая формула для количественного критерия эффективности алгоритма:

$$Q = \tau^m \delta^n, \tag{1}$$

где τ – время счета, δ – погрешность, определенная в одной из общепринятых норм или в каком-либо специальном виде, m, n – некоторые величины, выбор которых, в значительной мере, субъективен. Формула (1) полностью соответствует принципу, определенному выше. На первый взгляд удобно взять $m = n = 1$, что и было сделано в работах [6, 7]. Очевидно, такой выбор не всегда целесообразен, что можно проиллюстрировать следующим примером: Пусть решается краевая задача для уравнения Лапласа при помощи конечноразностной схемы второго порядка точности, что является фактическим стандартом в настоящее время. Если сгустить сетку в каждом из направлений в N раз, то погрешность аппроксимации уменьшиться в N^2 раз, но и количество узлов возрастет в N^2 раз. То есть, в N^2 раз вырастет количество арифметических операций (на самом деле больше, поскольку увеличится еще и количество необходимых итераций в итерационном процессе). То есть, при $m = n = 1$ сгущение сетки с целью увеличения точности решения не приводит к увеличению эффективности расчета. Еще сильнее эта тенденция проявляется в пространственном случае, когда при аналогичном сгущении сетки погрешность аппроксимации уменьшается в N^2 раз, а количество узлов возрастает в N^3 раз. Таким образом, если стоит задача повысить точность, то в формуле (1) следует увеличить n, если сократить время – m.

Численный эксперимент был проведен на следующих краевых задачах для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$

где u – искомая функция, x, y – декартовы координаты, в кольцевой области при граничных условиях Дирихле или Неймана, соответствующих следующим аналитическим решениям тестовых задач:

$$u_1(x, y) = (x + y)/2, \tag{3}$$

$$u_2(x, y) = x^2 - y^2, \tag{4}$$

$$u_3(x, y) = e^{x-1} \cos y. \tag{5}$$

Что касается неограниченной области (задачи, сформулированные во внешности круга), то была выбрана задача о бесциркуляционном обтекании прямого кругового цилиндра, сформулированная в терминах задачи потенциала скоростей (задача Неймана) [8]:

$$\varphi = |V_\infty| \left(x + \frac{R_1^2 x}{x^2 + y^2} \right), \tag{6}$$

и функции тока (задача Дирихле) [8]:

$$\psi = |V_\infty| \left(y - \frac{R_1^2 y}{x^2 + y^2} \right), \tag{7}$$

где V_∞ – скорость жидкости в бесконечно удаленной точке, R_1 – радиус обтекаемого цилиндра (радиус внутренней окружности в кольце).

Численные расчеты проводились по следующим алгоритмам:

- метод конечных разностей на несогласованной декартовой ортогональной равномерной сетке [6] (в данном случае для кольцевой области шаг сетки в направлении осей Ox и Oy естественно выбрать равными в отличии от работы [6], где они были различны, что, впрочем, никак не помешало использовать при проведении данного исследования то же программное обеспечение, что и при написании работы [6]); таким образом

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right), \tag{8}$$

- метод конечных разностей на согласованной равномерной сетке в полярных координатах, для чего уравнение (2) следует записать в полярных координатах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \tag{9}$$

где r – полярный радиус, а θ – полярный угол. Тогда

$$u_{ij}=\frac{\Delta\theta\Delta r}{2(\Delta\theta+\Delta r)}\left(\frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}}{(\Delta r)^2}+\frac{1}{r_i}\frac{u_{i+1,j}-u_{i+1,j}}{\Delta r}+\frac{1}{r_i^2}\frac{u_{i,j+1}+u_{i,j-1}}{(\Delta\theta)^2}\right), \tag{10}$$

где $\Delta\theta,\ \Delta r$ – соответствующие шаги равномерной сетки по координате. Применение разностных схем (8), (10) требует итерационного процесса, известного как процесс Либмана [9];

- метод граничных элементов [10, 11] с использованием прямолинейных элементов нулевого порядка точности (аналогично работе [6]), для чего уравнение (2) преобразуем в его граничноинтегральный аналог:

$$C(x_0,y_0)u(x_0,y_0)=\int_\Gamma \varphi_0(x,y,x_0,y_0)\frac{\partial u(x,y)}{\partial n(x,y)}dS(x,y)-\int_\Gamma u(x,y)\frac{\partial\varphi_0(x,y,x_0,y_0)}{\partial n(x,y)}dS(x,y), \tag{11}$$

где φ_0 – фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$\varphi_0(x,y,x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \tag{12}$$

(x_0,y_0) – точка наблюдения; (x,y) – точка источника, $C(x_0,y_0)$ – функция форма границы Γ [6]

$$C(x_0,y_0)=\begin{cases}1,(x_0,y_0)\in D,\\ 1/2,(x_0,y_0)\in\Gamma,\\ 0,(x_0,y_0)\notin D,(x_0,y_0)\notin\Gamma,\end{cases} \tag{13}$$

кривая Γ – граница кольца, но в некоторых расчетах в бесконечно простирающейся области Γ – только внутренний контур. Применяя к граничному интегральному уравнению $C=1/2$ (11) процедуру метода граничных элементов [10, 11], получим дискретный аналог уравнения (11):

$$1/2\,u_i=\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_k\int_{\Gamma_k}\varphi_0(x,y,x_i,y_i)dS_n-\sum_{k=1}^{M}u_k\int_{\Gamma_k}\frac{\partial\varphi_0(x,y,x_i,y_i)}{\partial n(x,y)}dS, \tag{14}$$

который после переупорядочивания представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, поскольку интегралы по граничным элементам Γ_k, входящие в правую часть (14), является определенными интегралами по прямолинейным элементам, то есть, легко вычисляемыми числовыми значениями. После решения системы линейных алгебраических уравнений (14) краевая задача считается решенной, хотя при необходимости в рамках той же аппроксимации при $C=1$ значение искомой функции без труда может быть определено в любой внутренней точке области решения.

Анализ полученных результатов

Ограниченные рамки настоящей работы не позволяют привести непосредственные численные результаты проведенных расчетов, поэтому ограничимся здесь количественными выводами, сделанными на основе упомянутых результатов:

1. Как и следовало ожидать, конечноразностная схема на согласованной сетке (10) превосходит аналогичную схему на несогласованной декартовой сетке (8) как по точности, так и по общей вычислительной эффективности, впрочем, при сгущении сетки это преимущество убывает. Вопрос о том, существуют ли параметры сетки, при которых эти подходы эквивалентны по точности или вычислительной эффективности в данной работе не рассматривался ввиду громоздкости необходимых вычислений.

2. Результаты решения тестовых задач, соответствующих формулам (3) – (5), в целом, достаточно хорошо коррелируют между собой.

3. На тестовых задачах (3–5) метод граничных элементов значительно (в отдельных случаях до двух порядков) превосходит рассмотренные конечноразностные подходы, а, если решение необходимо было построить только на границе, то превосходство метода граничных элементов увеличивалось, как минимум, еще на порядок и для точности расчетов, и для вычислительной эффективности.

4. Рассматривая тестовые задачи (6), (7), можно отметить, что решения состоят из двух частей, причем оба слагаемых являются гармоническими функциями. "Снос" условий в бесконечно удаленной точке на внешнюю границу конечного кольца означает постановку там граничного условия, соответствующего только первой составной части решения. То есть, второе слагаемое можно трактовать как специфическое возмущение, порождающее систематическую ошибку перехода от бесконечной области к конечной. На внешней границе кольца эта ошибка имеет порядок $1/R_2$, где R_2 – радиус внешней окружности, и уменьшается с ростом R_2. Соответственно, в силу принципа максимума для гармонических функций, вносимая ошибка не превосходит по модулю $1/R_2$ и достигает максимума на внешней границе кольца, на

внутренней границе она намного меньше. Вследствие этого обстоятельства рассматриваемая проблема ранее, к сожалению, не привлекала внимание исследователей, поскольку в задачах внешнего обтекания основной интерес сосредоточен на решении вблизи внутреннего контура, где данная ошибка относительно мала. Однако в случае более сложных моделей, где возмущения, в том числе и ошибочные, переносятся потоком, подобная благоприятная ситуация места не имеет, а тестирование расчетных схем для уравнений Эйлера, Навье-Стокса или Рейнольдса представляется нетривиальной проблемой.

5. С ростом внешнего радиуса кольца R_2 падает точность и эффективность всех рассмотренных численных методов, особенно конечноразностных. На первый взгляд, естественно было бы увеличивать R_2 до того момента, когда вычислительная ошибка расчета (полученная, например, при использовании на внешней окружности в качестве граничных условий полных функций (6), (7)) сравняется по порядку с систематической ошибкой, вызванной "сносом" условия в бесконечно удаленной точке на конечное расстояние, которая с ростом R_2 уменьшается. Но в силу соображений, высказанных в предыдущем пункте, такой критерий не представляется практически ценным.

6. Конечноразностные решения, их точность и эффективность существенно зависят от задаваемой точности итерационного процесса, а граничноэлементные нет, что является еще одним преимуществом последней группы алгоритмов.

Выводы и анализ перспектив дальнейших исследований

Проведенные исследования подтверждают вывод, сделанный в работе [6], о преимуществе метода граничных элементов над методом конечных разностей при решении плоских линейных краевых задач эллиптического типа. Более того, показано, что для областей с криволинейными границами указанные преимущества только усиливаются. Удалось также показать, что для внешних задач возможность метода граничных элементов избегать "сноса" условия в бесконечно удаленной точке на конечное расстояние обеспечивает не менее существенные дополнительные преимущества перед методом конечных разностей.

Очевидно прикладное значение полученных результатов, которое заключается в повышении эффективности используемого прикладного программного обеспечения.

Перспективы дальнейших исследований также совершенно очевидны и заключаются в:

- проведении аналогичных исследований для линейных эллиптических краевых задач с иными дифференциальными операторами (уравнения Гельмгольца, Пуассона, бигармонические уравнения и др.);
- проведении аналогичных исследований для линейных эллиптических краевых задач в пространственном случае;
- распространение предложенного подхода на линейные краевые задачи параболического типа, где преимущества одного из методов не очевидны [7].

Представляет также интерес анализ возможностей использования критерия вычислительной эффективности (1) для оптимизации расчетной сетки.

Список использованной литературы

1. Bentley J.L. Writing of efficient programs / J.L. Bentley. — Prentice-Hall, New Jersey, 2000. — 183 p.
2. Greene D.H. Mathematics for the analysis of algorithms / D.H. Greene, D.E. Knuth. — Birkhauser, Boston, 1990. — 139 p.
3. Parberry I. Problems of algorithms / I. Parberry, W. Gasarch. — Prentice-Hall, New Jersey, 2002. — 268 p.
4. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. — М.: Мир, 1979. — 536 с.
5. Ван Тассел Д. Стиль, разработка, эффективность, отладка и испытание программ: монография / Д. ван Тассел. — М.: Мир, 1985. — 332 с.
6. Бевза Э.К. Сравнение эффективности метода граничных элементов и метода конечных разностей путем численного эксперимента / Э.К. Бевза, Ю.В. Бразалук, Д.В. Евдокимов, А.А. Кочубей // Вестник ХГТУ. — 2002. — №2 (15). — С. 53—56.
7. Хрущ В.К. Сравнение эффективности некоторых алгоритмов численного решения уравнения теплопроводности путём численного эксперимента / В.К. Хрущ, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. "Механіка". — 2002. — Вып.6. — Т. 1. — С. 9—16.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Лойцянский Л. Г. — М.: Наука, 1970. — 904 с.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем / Самарский А.А. — М.: Наука, 1989. — 576 с.
10. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. — М.: Мир, 1984. — 494 с.
11. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел.— М.: Мир, 1987.— 524 с.