

УДК 534.1:539.3

Н.В. СМЕТАНКІНА, С.В. УГРИМОВ, О.М. ШУПІКОВ
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НЕСТАЦІОНАРНОГО
ДЕФОРМУВАННЯ БАГАТОШАРОВОГО ОСКЛІННЯ ПРИ РОЗПОДІЛЕНИХ ТА
ЛОКАЛІЗОВАНИХ СИЛОВИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

У статті розглядаються питання математичного моделювання напружено-деформованого стану багатошарового оскління при розподілених та локалізованих у просторі навантаженнях. Поведінка оскління моделюється на основі різних двовимірних теорій багатошарових пластин. Досліджено напруження у триплексах при імпульсному та ударному навантаженнях. Результати розрахунку порівнюються із експериментальними даними та даними розрахунку на основі методу скінченних елементів.

Ключові слова: багатошарове оскління, напружено-деформований стан, локалізоване навантаження, удар.

Н.В. СМЕТАНКИНА, С.В. УГРИМОВ, А.Н. ШУПИКОВ
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО ОСТЕКЛЕНИЯ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ И
ЛОКАЛИЗОВАННЫХ НАГРУЖЕНИЯХ**

В статье рассматриваются вопросы математического моделирования напряженно-деформированного состояния многослойного остекления при распределенных и локализованных в пространстве нагрузениях. Поведение остекления моделируется на основе разных двумерных теорий многослойных пластин. Исследованы напряжения в триплексах при импульсном и ударном нагружении. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными и данными расчета на основе метода конечных элементов.

Ключевые слова: многослойное остекление, напряженно-деформированное состояние, локализованное нагружение, удар.

N.V. SMETANKINA, S.V. UGRIMOV, O.M. SHUPIKOV
A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine**MATHEMATICAL MODELING OF NONSTATIONARY DEFORMATION PROCESS OF
MULTILAYER GLAZING AT DISTRIBUTED AND LOCALIZED LOADINGS**

The paper presents problems of mathematical modeling of the strain-stressed state of a multilayer glazing at the distributed and localized in space load. The glazing behavior is modeled based on different two-dimensional theories of multilayer plates. Stresses in triplexes are investigated at impulse and shock load. Calculation results are compared with experimental data and results of calculation by the finite element method.

Keywords: multilayer glazing, strain-stressed state, localized loading, impact.

Постановка проблеми

Багатошарове оскління широко використовується у сучасних транспортних засобах та будівництві. Багатошарова структура дозволяє створити більш безпечні в експлуатації конструкції, які мають меншу вагу. Таке оскління складається з декількох шарів силікатного скла (СС), між якими знаходяться тонкі шари полівінілбутирала (ПВБ). Також у деяких варіантах оскління використовується органічне скло та полікарбонат, але вони є менш стійкими до поверхневих пошкоджень та втрачають із часом свої оптичні характеристики. При цьому СС сприймає основне силове навантаження, а ПВБ поєднує шари у пакеті. При цьому фрагменти СС при руйнуванні шарів залишаються на клейовому шарі та не є додатковою загрозою для людини у вигляді уламків.

Існуючі правила проектування світлопрозорих конструкцій ґрунтуються на аналізі їх міцності при впливі різних навантажень в залежності від призначення оскління. Наприклад, це дія вітрового навантаження на оскління будівель [1, 2], навантаження при зіткненні птаха з осклінням кабіни літака [3], тощо. Ці навантаження розподілені на відносно великій частині поверхні скла, характерний розмір якої значно перевищує товщину пакету. Але досить часто оскління знаходиться під впливом локалізованих

навантажень. Так, оскління локомотивів проектується з урахуванням можливого удару твердим тілом, а при проектуванні будівельного скла у деяких країнах враховується вплив часток, що принесені вітром [4, 5].

Аналіз публікацій за темою дослідження

У більшості випадків розрахунок напружено-деформованого стану (НДС) оскління базується на застосуванні класичних двовимірних теорій багатошарових конструкцій, які є орієнтованими на аналіз міцності відносно тонких пластин з неістотною відмінністю механічних властивостей шарів при дії розподілених навантажень. Аналіз НДС оскління при впливі локалізованих навантажень потребує використання більш точних теорій. Ще складнішою є проблема розрахунку відгуку оскління на удар твердим тілом, коли навантаження є локалізованим в просторі, а контактна сила та розмір зони контакту змінюються у часі та заздалегідь невідомі. Детальний аналіз сучасних двовимірних теорій багатошарових пластин наведено у роботах [6, 7].

Таким чином, розробка ефективних методів розрахунку нестационарних коливань багатошарового оскління при локалізованому навантаженні залишається актуальною задачею.

Мета статті

Метою роботи є розробка ефективного методу розрахунку параметрів НДС оскління при локалізованому навантаженні, викликаному ударом твердим тілом.

Основна частина

Математична модель багатошарового оскління. Будемо розглядати багатошарове скло як багатошарову шарнірно оперту пластину, оскільки кріплення оскління здійснюється через гумовий ущільнювач до рамки, яка жорстко закріплюється у отворі. Багатошарова пластина складається з I шарів сталої товщини h_i . Пластина віднесена до декартової системи координат, яка зв'язана із зовнішньою поверхнею першого шару. На координатній поверхні Ox_1x_2 конструкція займає область Ω , обмежену довільним контуром Γ . На оболонку діють нестационарні навантаження $\mathbf{P} = \{p_j(x_1, x_2, t)\}$, $j = \overline{1, 3}$. Припускається, що контакт між шарами виключає їхнє розшарування та взаємне проковзування.

Поведінка пластини описується рівняннями узагальненої теорії багатошарових пластин [8 – 10]

$$u_v^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_v + \sum_{k=1}^K \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{vk}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{vk}^i \right], \quad v = 1, 2,$$

$$u_3^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_3 + \sum_{\ell=1}^L \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j^\ell u_{3\ell}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^\ell u_{3\ell}^i \right], \quad (1)$$

де $h_j^k = (h_j)^k$, $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i$, $i = \overline{1, I}$; u_α^i ($\alpha = \overline{1, 3}$) – переміщення точки i -го шару у

напрямку осі Ox_α ; $u_v, u_3, u_{vk}^i, u_{3\ell}^i$ – коефіцієнти розвинення, які є функціями аргументів x_1, x_2, t ; K, L – максимальні степені поперечної координати для площинних ($\alpha = 1, 2$) і поперечних ($\alpha = 3$) переміщень точок i -го шару, які обираються в залежності від необхідної точності.

Прийняті кінематичні гіпотези при $K=1, L=0$ еквівалентні гіпотезам Е.І. Григолока та П.П. Чулкова [11], при $K=1, L=1$ уточненій теорії першого порядку [8, 12], при $K=3, L=2$ – уточненій теорії високого порядку [8].

Деформації шарів визначаються відповідно до формул Коші [8]. Напруження і деформації у шарах пов'язані законом Гука. Зусилля і моменти i -го шару визначаються за формулою

$$N_{\alpha\beta}^{ik} = N_{\beta\alpha}^{ik} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (x_3 - \delta_{i-1})^k p_{\alpha\beta}^i dx_3, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad i = \overline{1, I},$$

де $p_{\alpha\beta}^i$ – компоненти тензора напружень в i -му шарі.

Рівняння руху багатошарової пластини та граничні умови впливають з варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона з урахуванням гіпотез (1).

Рівняння руху в зусиллях та моментах для багатошарової пластини має вигляд [8, 10]:

$$\sum_{i=1}^I [L_\alpha^i - I_{\alpha 1}^i] + p_\alpha = 0,$$

$$N_{1\alpha,1}^{ik_\alpha} + N_{\alpha 2,2}^{ik_\alpha} - k_\alpha N_{\alpha 3}^{ik_\alpha-1} + h_i^{k_\alpha} \sum_{j=i}^{I-1} [L_\alpha^{j+1} - I_{\alpha 1}^{j+1}] - I_{\alpha k_\alpha+1}^i = 0, \quad (2)$$

де $L_1^i = N_{11,1}^{i0} + N_{12,2}^{i0}$, $L_2^i = N_{22,2}^{i0} + N_{12,1}^{i0}$, $L_3^i = N_{13,1}^{i0} + N_{23,2}^{i0}$,

$$I_{\alpha r}^i = \frac{\rho_i h_i^r}{r} \left(u_{\alpha 0,tt} + \sum_{k=1}^{K_\alpha} \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k,tt}^j + \frac{r h_i^k}{k+r} u_{\alpha k,tt}^i \right] \right), \quad \alpha = \overline{1,3}, \quad k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Кількість рівнянь та граничних умов залежить від числа шарів і дорівнює $(2K + L)I + 3$.

Метод розв'язання. Метод розв'язання системи рівнянь (2) для прямокутних шарнірно опертих багатошарових пластин полягає у наступному. Переміщення і зовнішні навантаження розвиваються у ряди по функціям, які задовольняють граничні умови, в результаті чого задача про колювання багатошарової пластини зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для пластин, що мають складну форму у плані, для розв'язання використовується метод занурення [8, 12, 13]. Згідно з цим методом замість вихідної пластини розглядається допоміжна шарнірно оперта прямокутна пластина з тією ж композицією шарів. В області Ω допоміжна пластина навантажена так само, як і вихідна пластина. Тотожність НДС в області Ω допоміжної пластини стану вихідної пластини забезпечується шляхом додавання компенсуючих навантажень $q_j^{\text{comp}}(\varphi, t)$, $j = \overline{1, 3I+3}$, які неперервно розподілені вздовж контуру Γ .

Математична модель ударного імпульсу при ударі птахом. Модель імпульсу тиску, що виникає при зіткненні багатошарового оскління зі птахом, базується на гіпотезі, що птах розглядається як еліпсоїд обертання з півосями a , b і c . Експериментально встановлено, що область взаємодії птаха з елементом оскління є еліптичною площадкою [13], а компоненти вектора зовнішнього навантаження в системі (2) можуть бути подані у вигляді

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(\tau_b - t)] F(t),$$

де τ_b – час дії імпульсу; $F(t) = P_0 \left[1 - \frac{(x-x_1)^2}{u_b^2} - \frac{(y-y_1)^2}{v_b^2} \right]^{1/2}$; u_b и v_b – півосі площадки

навантаження, які встановлюються на основі експериментальних даних; x_1 и y_1 – координати точки перетинання траєкторії центра маси птаха з елементом оскління.

Залежність $P_0 = P_0(t)$ також встановлюється на основі експериментальних даних [3, 13].

Низькошвидкісний удар твердим тілом по осклінню. Досліджується динамічна поведінка вертикально закріпленого багатошарового скла при ударі твердою часткою по зовнішній поверхні першого шару оскління зі швидкістю V_0 . Аналогічно роботі [4], частка моделюється кулею радіусом R і масою M .

Припускається, що область взаємодії кулі зі склом є круг радіусу $a(t)$, а контактний тиск розподілений по площадці навантаження, відповідно до закону

$$p_3(x_1, x_2, t) = P_0(t) \left[1 - \frac{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2}{a^2} \right]^{1/2}, \quad p_1 = p_2 = 0,$$

де x_{10} , x_{20} – координати точки зіткнення частки зі склом в початковий момент часу.

Система рівнянь, яка описує нестационарну поведінку пластини (2), доповнюється рівнянням руху тіла, що завдає удар, та умовою сумісності переміщень індентора та пластини

$$u_3^1(x_{10}, x_{20}, 0, t) + \alpha(t) - z(t) \geq 0,$$

де $\alpha(t)$ – контактне зближення, $z = z(t)$ – переміщення індентора.

Контактне зближення визначалось на основі закону Герца

$$\alpha = k P^{2/3}.$$

Коефіцієнт k , який залежить від форми і матеріалу взаємодіючих тіл обчислювався за допомогою формул, отриманих О.М. Дінніком [14]

$$k = \left[\frac{9}{256} \frac{(\theta_1 + \theta)^2}{R} \right]^{1/3}, \quad \theta_1 = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1}, \quad \theta = \frac{4(1 - \nu^2)}{E},$$

де E, ν – модуль Юнга и коефіцієнт Пуассона для матеріалу кулі, E_1, ν_1 – аналогічні характеристики для першого шару пластини.

Радіус області контакту $a(t)$ обчислюється за формулою

$$a(t) = \left[\frac{3}{16} R P(t) (\theta + \theta_1) \right]^{1/3}.$$

Розв'язок рівняння руху індентора одержано за допомогою інтегрального перетворення Лапласу. Значення контактної сили визначається з умови сумісності переміщень на кожному кроці за часом.

Аналіз результатів чисельних досліджень. Розглянуто процес нестационарного деформування багатошарових пластин при локалізованому імпульсному та ударному навантаженнях.

Досліджено розподіл напружень вздовж товщини тришарових пластин (триплексів) при розподілених і локалізованих навантаженнях. Імпульсне навантаження $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = P_0(H(t) - H(t - t_1))$ рівномірно розподілено по прямокутній площадці $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i = 1, 2$) на зовнішній поверхні першого шару ($H(t)$ – функція Хевісайда). Час дії навантаження $t_1 = 1,8 \cdot 10^{-3}$ с.

На рис. 1 наведено розподіл напружень вздовж товщини посередині тришарової пластини ($A = 0,42$ м, $B = 0,47$ м, $h_1 = h_3 = 0,012$ м, $h_2 = 0,002$ м), зовнішні шари якої виконані із СС з такими характеристиками: $E_i = 6,67 \cdot 10^4$ МПа, $\rho_i = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu_i = 0,22$ ($i = 1, 3$). Другий шар виконано із ПВБ: $E_2 = 2,74 \cdot 10^2$ МПа, $\rho = 1,2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu_2 = 0,38$. Тут E_i – модуль пружності, ν_i – коефіцієнт Пуассона, ρ_i – щільність i -го шару. На рис. 1, а показано розподіл напружень вздовж товщини пластини при імпульсному навантаженні, рівномірно розподіленому по всій поверхні першого шару ($P_0 = 10,13$ кПа), а на рис. 1, б – при імпульсному навантаженні, яке рівномірно розподілено по квадрату із стороною 5 мм посередині пластини ($P_0 = 80$ МПа). Суцільна лінія відповідає теорії {3,2}, а пунктир – теорії {1,0}.

Встановлено, що під час дії локалізованих навантажень розподіл напружень вздовж товщини пластини під площею навантаження, має нелінійний характер, який не відображає теорія {1,0}. При впливі розподілених навантажень розподіл напружень є лінійним, а дані, які отримані за теоріями {1,0} та {3,2}, практично співпадають.

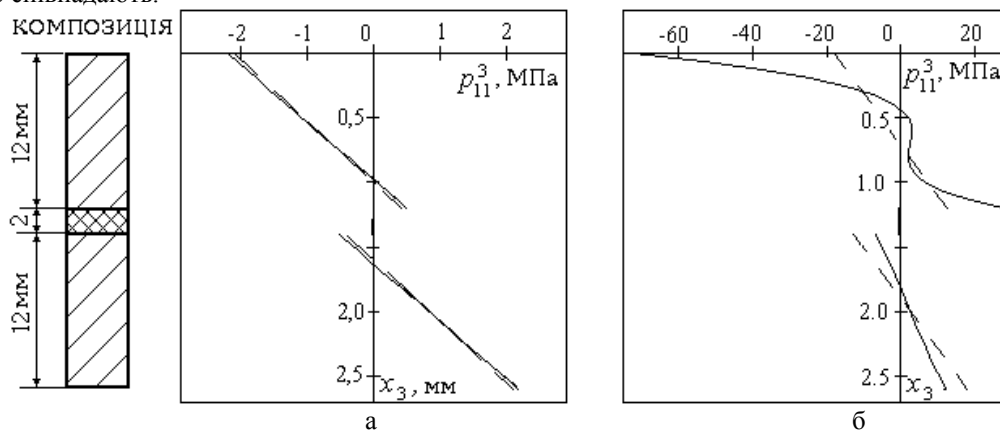


Рис. 1 Розподіл напружень вздовж товщини

Для перевірки вірогідності отриманих результатів проведено порівняння результатів розрахунку НДС реального оскління при ударному впливі з експериментальними даними. Розглянуто деформування авіаційного оскління при ударі птахом та архітектурного оскління при ударі твердими частками. У першому випадку оскління підлягає впливу навантаження, що розподілене по значній частині поверхні скла, а у другому має місце локалізоване навантаження.

Теоретично й експериментально досліджено реакцію елемента оскління літара кабін літака АН-24 на удар птаха. Шари оскління виконані з матеріалів з наступними характеристиками: $E_i = 6,12 \cdot 10^4$ МПа (модуль пружності), $\nu_i = 0,22$ (коефіцієнт Пуассона), $i = 1, 3, 5$; $E_2 = 1$ МПа, $E_4 = 280$ МПа, $\nu_i = 0,39$, $i = 2, 4$; $\rho_i = 2500$ кг/м³, $i = 1, 3, 5$, $\rho_i = 1200$ кг/м³, $i = 2, 4$ (густина матеріалу); $h_1 = 5$ мм, $h_2 = 5$ мм, $h_3 = 6$ мм, $h_4 = 2$ мм, $h_5 = 10$ мм (товщини шарів). Розрахунок проводився на основі теорії {1, 0}. Удар

наносився в середину покривного скла паралельно осі фіюзеляжу. Експериментальне дослідження проводилося методом динамічної ширококугової тензометрії [3, 8, 13].

На рис. 2 показана розрахункова схема елемента оскління й позначена точка C , у якій досліджувалися деформації. Геометричні параметри елемента оскління такі: $l_1 = 0,36$ м, $l_2 = 0,39$ м, $l_3 = 0,34$ м, $l_4 = 0,45$ м, $R_i = 0,04$ м, $i = \overline{1,4}$. На рис. 3 наведена залежність від часу головної деформації ε_1^5 в точці C при ударі птаха 1,74 кг зі швидкістю 99,07 м/с. Результатам розрахунку відповідає суцільна лінія, результатам експерименту – пунктирна. Добре узгодження розрахункових і експериментальних даних підтверджує вірогідність результатів, одержаних за допомогою розробленої методики, що застосовується для розрахунку напружень в елементах оскління.

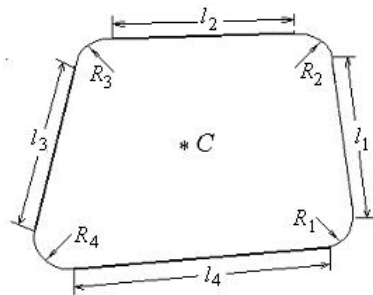


Рис. 2. Розрахункова схема елемента оскління

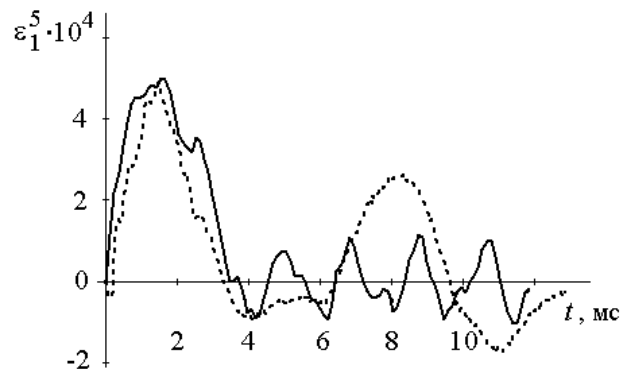


Рис. 3. Реакція елемента оскління на удар птаха

Досліджено динамічну поведінку тришарового архітектурного скла (305 x 305 мм) різної товщини при ударі твердою часткою $M = 2$ г, $R = 3,97$ мм на швидкості 9,1 м/с посередині зовнішньої поверхні першого шару. (табл.1). Зовнішні шари конструкції виготовлені із СС з характеристиками $E = 72$ ГПа, $\nu = 0,25$, $\rho = 2500$ кг/м³ та з'єднані за допомогою ПВБ з характеристиками $E_2 = 2,74 \cdot 10^2$ МПа, $\nu_2 = 0,38$, $\rho = 1100$ кг/м³. Характеристики твердої частки $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,29$, $\rho = 7800$ кг/м³. Розрахунок проводився на основі теорії [3, 2].

У табл. 1 наведено результати розрахунків максимальних значень деформацій посередині зовнішньої поверхні третього шару за запропонованим методом при використанні теорії [3,2], методом скінченних елементів на базі комплексу LS-DYNA 2D [4, 5], а також експериментальні дані [4, 5].

Таблиця 1

Товщини та деформації шарів тришарового скла

Скло	Товщина шарів, мм			Деформації, $\varepsilon_r \cdot 10^6$		
	1 шар	2 шар	3 шар	Запропонований метод	метод скінченних елементів	експеримент
1	2,98	0,76	2,98	590	580	580
2	4,78	0,76	4,78	333	330	360
3	4,81	1,52	4,81	265	310	260
4	4,66	2,29	4,66	290	310	280

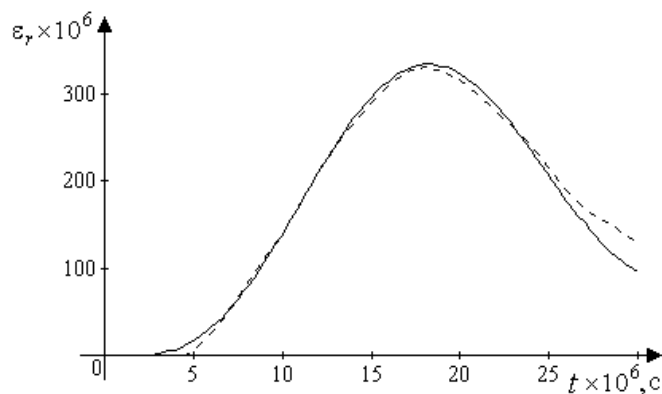


Рис. 4. Деформації в осклінні

На рис. 4 показано змінення деформацій за часом посередині зовнішньої поверхні третього шару для скла № 2. Суцільна лінія відповідає результатам розрахунку за запропонованим методом, пунктирна – за методом скінченних елементів на базі комплексу LS-DYNA2D [4, 5].

Висновки й перспективи подальших досліджень

Розглянуто процеси деформування багатошарового оскління при розподіленому та локалізованому навантаженні. На основі узагальненої теорії запропоновано метод визначення НДС оскління при ударному навантаженні. На ряді прикладів розрахунку тришарового оскління показано працездатність та високу ефективність запропонованого методу. Встановлено, що при розподіленому навантаженні характер розподілу напружень вздовж товщини пластини є лінійним, а при локалізованому – нелінійним. Тому використання теорій, заснованих на лінійному розподілі переміщень, призводить до значних похибок для випадку, коли розміри площі навантаження є близькими до товщини пластини.

Запропонований підхід дозволяє скоротити витрати і час на передпроектні дослідження і натурні випробування.

Роботу виконано у рамках Цільової комплексної програми наукових досліджень НАН України «Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин» («Ресурс-2»).

Список використаної літератури

1. ДСТУ Б В.2.6-23-2001 (ГОСТ 23166-99) Конструкції будинків і споруд. БЛОКИ ВІКОННІ. Загальні технічні умови – На заміну ГОСТ 23166; Чинний від 01.01.2002. – УДК691.11.023.1/2:006.354; МКС 91.060.50.
2. Борискина И.В., Шведов Н.В., Плотников А.А. Проектирование современных оконных систем гражданских зданий. – М.: АСВ, 2000. – 176 с.
3. Shupikov A.N. Bird dummy for investigating the bird-strike resistance of aircraft components / A.N. Shupikov, S.V. Ugrimov, N.V. Smetankina, V.G. Yareschenko, G.G. Onhirsky, V.P. Ukolov, V.F. Samoylenko, V.L. Avramenko // Journal of Aircraft.– 2013.–Vol. 50, N 3.– P. 817-826.
4. Behr R.A Dynamic strain in architectural laminated glass subjected to low velocity impact from small projectiles / R.A. Behr, P.A. Kremer, L.R. Dharani, F.S. Ji, N.D. Kaiser // Journal of Materials Science.– 1999.–Vol. 34.–P. 5746–5756.
5. Flocker F.W. Low velocity impact resistance of laminated architectural glass / F.W. Flocker, L.R. Dharani // Journal of Architectural Engineering – 1998.– Vol. 1, N 4. – P. 12–17.
6. Григолюк Э.И., Статика упругих слоистых оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. – М.: НИИ Механики МГУ, 1999. – 215 с.
7. Пискунов В.Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В.Г. Пискунов, А.О. Рассказов // Прикл. механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22–56.
8. Шупиков А.Н. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов. – Харьков: Изд-во ХНЭУ, 2004.– 252 с.
9. Ugrimov S.V. Layered orthotropic plates. Generalized theory / S.V. Ugrimov, A.N. Shupikov // Composite Structures. – 2015. – Vol. 129, N 1. – P. 224–235.
10. Ugrimov S.V. Generalized theory of multilayer plates //Int. J. Solids and Structures.– 2002.– Vol. 39, N4.– P.819-839.
11. Григолюк Э.И. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жестким наполнителем при конечных прогибах / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1964. – № 5.– С. 109–117.
12. Smetankina N.V. A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment / N.V. Smetankina, A.N. Shupikov, S.Yu. Sotrikhin, V.G. Yareschenko// Trans. ASME. J. Appl. Mechanics. – 2008.– Vol. 75, N 5. – P. 051004-1–051004-9.
13. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н.В. Сметанкина.– Харьков: Міськдрук, 2011.– 376 с.
14. Динник А.Н. Избранные труды: В 2-х т. / А.Н. Динник.– Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – Т.1. –350 с.