

УДК 531.39

С.В. ТАРАСОВ, А.С. ТАРАСОВ

Институт транспортних систем і технологій НАН України

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОНСОЛЬНЫХ ФРАГМЕНТОВ УПРУГИХ
ЛОПАСТЕЙ Н-РОТОРОВ ДАРЬЕ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА**

Получена модель динамики консольных лопастей и их фрагментов Н-ротора Дарье для исследования колебательных процессов в потоке воздуха под действием активных аэродинамических сил и консервативных силовых факторов. Предложена методика учета аэродинамических сил, действующих на балки, поперечные сечения которых представляют симметричные аэродинамические профили. Расчетная схема модели позволяет учитывать упругость консольной заделки, реальный разнос мест расположения на хорде центров изгиба, центров масс и давления. Учтена нелинейность распределенных аэродинамических нагрузок. Модель позволяет учитывать изменение координат на хорде центра давления в зависимости от угла атаки. Получена упрощенная линейная математическая модель, которая описывает малые возмущения угловых координат элемента лопасти в её движении вокруг точки подвеса.

Ключевые слова: модель динамики, Н-ротор Дарье, консольные лопасти и их фрагменты, аэродинамические силы, линейная модель

С.В. ТАРАСОВ, А.С. ТАРАСОВ

Институт транспортних систем і технологій НАН України

**МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ КОНСОЛЬНИХ ФРАГМЕНТІВ ПРУЖНИХ ЛОПАТЕЙ Н-РОТОРІВ
ДАР'Є В СТРУМІ ПОВІТРЯ**

Отримана модель динаміки консольних лопатей та їх фрагментів Н-ротору Дар'є для дослідження коливальних процесів в струмі повітря під дією активних аеродинамічних сил та консервативних силових факторів. Запропонована методика врахування аеродинамічних сил, діючих на балки, поперечні перерізи яких є симетричні аеродинамічні профілі. Розрахункова схема моделі дозволяє враховувати пружність консольного закріплення, реальний рознос місць розташування на хорді центрів вигину, центрів мас і тиснення. Врахована нелінійність розподілених аеродинамічних навантажень. Модель дозволяє враховувати зміну координат на хорді центру тиснення в залежності від кута атаки. Отримана спрощена лінійна математична модель, яка описує малі збурення куткових координат елементу лопаті в її русі коло точки підвісу.

Ключові слова: модель динаміки, Н-ротор Дар'є, консольні лопаті та їх фрагменти, аеродинамічні сили, лінійна модель

S.V. TARASOV, A.S. TARASOV

Institute of Transport Systems and Technologies of Ukrainian National Academy of Science

**MODELING THE DYNAMICS OF CONSOLE FRAGMENTS OF ELASTIC DARRIEUS ROTOR'S
BLADES IN THE AIRFLOW**

A model of the dynamics of cantilever blades and their fragments of Darrieus rotor is obtained for the study of oscillatory processes in the airflow under the action of the active aerodynamic forces and conservative force factors. Proposed an accounting method of the aerodynamic forces acting on the beam which cross-sections are symmetrical airfoils. Design model takes into account the elasticity of the cantilever seal (cap), a real location positions on the chord of bending centers, mass centers and pressure. Noted nonlinearity of distributed aerodynamic loads. The model takes into account the change of coordinates on the chord of the pressure center depending on the angle of attack. We obtain a linear mathematical model that describes the small perturbations of the angular coordinates of the blade element in its movement around the point of suspension.

Keywords: dynamics model, Darrieus rotor, cantilevered blade, fragments of cantilevered blade, aerodynamic forces, linear model

Постановка проблеми. Аналіз публікацій по темі досліджень

Типовим елементом Н-роторів Дар'є вертикально-осевих ВЭУ (ВОВЭУ) різного конструктивного виконання є консольні фрагменти лопатей і траверс з різними аеродинамічними профілями сечень. На рисунках 1, 2 приведені в якості типового прикладу існуючі ВОВЭУ з модифікаціями Н-ротора Дар'є малої і середньої потужності, в конструкції роторів яких присутні такі консольні фрагменти. Мало вивченим явищем,

имеющим место в некоторых рабочих режимах таких роторов, является аэроупругая неустойчивость возникающая при совместных изгибно-крутильных колебаниях указанных фрагментов конструкции. Колебательные процессы, возникающие в роторе, могут приводить к разрушению конструкции лопастей и их отрыву в результате усталостных деформаций. На рисунке 3 приведена фотография места отрыва лопасти кессонной конструкции от траверсы на ВОВЭУ мощностью 20 кВт.



Рис. 1. ВОВЭУ малого класса мощности (до 30 кВт) с Н-ротором Дарье



Рис. 2. ВОВЭУ среднего класса мощности (420 кВт) с Н-ротором Дарье

В работах [1-3], посвященных моделированию динамики некоторых режимов работы элементов роторов горизонтально-осевых ВЭУ, роторов Дарье классической конструкции с замкнутой кинематической схемой, вертолетных лопастей, рассмотрены вопросы исследования колебательных процессов ряда упругих элементов конструкции, отличающихся от рассматриваемых характером обтекания и особенностями конструктивных схем.

Формулирование цели исследования

Формирование модели динамики консольных лопастей и их фрагментов Н-ротора Дарье для исследования их колебательных процессов в потоке воздуха под действием активных аэродинамических сил и консервативных силовых факторов. Получение на ее основе уравнений малых колебаний в линейном приближении в безразмерной форме и соотношений для исследования свойств возмущенного движения.

Основная часть

Расчетная схема модели учитывает упругость консольной заделки, реальный разнос мест расположения на хорде центров изгиба, центров масс и давления, изменение координат на хорде центра давления в зависимости от угла атаки (рис.4).

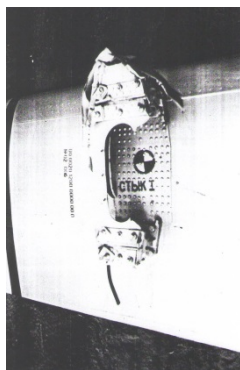


Рис. 3. Фотография места отрыва лопасти кессонной конструкции от траверсы

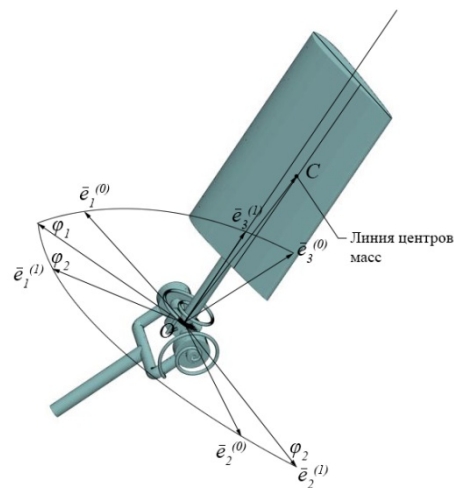


Рис. 4. Кинематическая схема механической системы и базисы отсчета

Для описания текущей конфигурации рассматриваемой механической системы введены базисы отсчета $\bar{e}^{(0)}$ и $\bar{e}^{(1)}$. Неподвижный базис $\bar{e}^{(0)}$ расположен в месте заделки упругой балки (в эквивалентном

механізмі зв'язан з неподвижною рамкою шарнира O з полюсом в точці пересічення лінії центрів изгиба и хорды торцевого сечения лопасти (рис.4). Базис $\bar{e}^{(1)}$ зв'язан з лопастью, имеет полюс в центре шарнира O , совпадающий с полюсом неподвижного базиса $\bar{e}^{(0)}$, а его базисный вектор $\bar{e}_3^{(1)}$ направлен вдоль линии центрів изгиба лопасти.

Для описания текущей конфигурации механизма в качестве обобщенных координат использованы углы φ_1 и φ_2 в шарнире O , реализующем вращательную кинематическую пару 4-го класса. Схема отсчета углов в шарнире приведена на рисунке 4.

Введенные базисы отсчета $\bar{e}^{(0)}$ и $\bar{e}^{(1)}$ связывает матрица направляющих косинусов A^{10} [4]

$$\bar{e}^{(1)} = A^{10} \bar{e}^{(0)}, \quad A^{10} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 & 0 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Для вычисления аэродинамических сил, действующих на механизм, необходимы текущие значения составляющих вектора скорости обтекания лопасти \bar{W} в плоскости, нормальной к линии центрів изгиба (или нормальной к плоскости проходящей через хорды) и текущие значения угла атаки лопасти. Их расчет производится с использованием проекций вектора \bar{W} в связанном с лопастью базисе $\bar{e}^{(1)}$. Этот вектор формируется из скорости потока воздуха \bar{V}_∞ и скорости собственного движения лопасти в этом потоке $\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{R}$ и имеет вид $\bar{W} = \bar{V}_\infty - \bar{V} = \bar{V}_\infty - \bar{\omega} \times \bar{R}$, где $\bar{\omega}$ - вектор мгновенной угловой скорости лопасти как тела с одной неподвижной точкой относительно базиса $\bar{e}^{(0)}$, а \bar{R} - радиус-вектор, задающий положение некоторой характерной точки в базисе $\bar{e}^{(1)}$. Матричный аналог развернутого выражения для \bar{W}

в базисе $\bar{e}^{(1)}$ имеет вид $W^1 = A^{10} V_\infty^0 - \overset{\vee}{\omega} R^1$, где $W^1, \overset{\vee}{\omega}, R^1$ - матрицы, соответствующие векторам $\bar{W}, \bar{\omega}$ и \bar{R} , сформированные из их проекций в базис $\bar{e}^{(1)}$ ($\overset{\vee}{\omega}$ - кососимметричная матрица); $V_\infty^0 = (V_1^0 \ V_2^0 \ V_3^0)^T$ - матрица проекций вектора \bar{V}_∞ в базисе $\bar{e}^{(0)}$.

В соответствии со схемой поворотов в шарнире O (рис.4) проекции вектора мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ в базисе $\bar{e}^{(1)}$ выражаются через обобщенные координаты и скорости следующим образом - $\omega_1^1 = \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2, \omega_2^1 = \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2, \omega_3^1 = \dot{\varphi}_2$. С учетом этого матрица проекций W^1 представима в виде

$$W^1 = \begin{pmatrix} V_1^0 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + V_2^0 \sin \varphi_2 - V_3^0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_1 R_3^1 \cos \varphi_2 \\ -V_1^0 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + V_2^0 \cos \varphi_2 + V_3^0 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 R_3^1 \sin \varphi_2 \\ V_1^0 \sin \varphi_1 + V_3^0 \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Такой вид имеют проекции вектора скорости обтекания \bar{W} в базисе $\bar{e}^{(1)}$ в случае, если в качестве точки приведения выбрать точку пересечения линии центрів изгиба и хорды, для которой $R_2^1 = 0$ [4].

Очевидно, что для каждой текущей конфигурации механизма, характеризуемой фиксированными значениями кинематических параметров $\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$, вектор \bar{W} для точек проведения расположенных на хорде будет иметь различную величину и направление, т.к. в этом случае $W_i^1 = W_i^1(R_3^1)$.

Вектор нормальной составляющей скорости обтекания лопасти \bar{W}_n (составляющей вектора \bar{W} в плоскости нормальной к линии центрів изгиба) для каждого поперечного сечения лопасти параллелен плоскости базисных векторов $\bar{e}_1^{(1)}, \bar{e}_2^{(1)}$, поэтому $\bar{W}_n = W_1^1 \bar{e}_1^{(1)} + W_2^1 \bar{e}_2^{(1)}$. Модуль этого вектора

$W_n = \sqrt{(W_1^1)^2 + (W_2^1)^2}$. Текущий угол атаки для каждого поперечного сечения

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_1^0 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + V_2^0 \sin \varphi_2 - V_3^0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_1 R_3^1 \cos \varphi_2}{-V_1^0 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + V_2^0 \cos \varphi_2 + V_3^0 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 R_3^1 \sin \varphi_2} \quad (3)$$

при предположении, что точка приведения вектора \bar{W} расположена на линии центров изгиба, т.е. $W_i^1 = W_i^1(R_3^1)$, $\theta = \theta(R_3^1)$ в каждой текущей конфигурации.

В соответствии с теорией балок, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, на лопасть действуют распределенные сила лобового сопротивления и подъемная сила с векторными компонентами в каждом сечении соответственно. Эти силы действуют в плоскостях, перпендикулярных линии центров изгиба, и зависят от нормальной составляющей \bar{W}_n скорости обтекания лопасти. Векторная компонента \bar{q}_n в каждом поперечном сечении лопасти совпадает по направлению с вектором нормальной составляющей \bar{W}_n вектора скорости обтекания лопасти $\bar{q}_n = \frac{1}{2} \rho W_n^2 C_n b \bar{e}_n$, а векторная компонента распределенной подъемной силы $\bar{q}_L = \frac{1}{2} \rho W_n^2 C_L b \bar{e}_L$ и перпендикулярна \bar{q}_n . Здесь \bar{e}_n - базисный вектор, сонаправленный с нормальной составляющей вектора скорости обтекания \bar{W} ; \bar{e}_L - базисный вектор, направленный перпендикулярно \bar{e}_n вверх (для каждого поперечного сечения); $C_n = C_n(\theta)$, $C_L = C_L(\theta)$ - аэродинамические коэффициенты, зависящие от угла атаки; вид этих функциональных зависимостей определяется экспериментальным путем; b - характерный размер, например, длина хорды.

Полагается, что рассчитанные таким образом силы приложены в центре давления каждого конкретного сечения. Они в силу зависимости от \bar{W}_n , C_n и C_L в каждой текущей конфигурации в соответствии со сделанным ранее предположением о точке приведения \bar{W} являются функциями координаты сечения R_3^1 в базисе $\bar{e}^{(1)}$, т.е. $\bar{q}_n = \bar{q}_n(R_3^1)$, $\bar{q}_L = \bar{q}_L(R_3^1)$.

Величины нормальной и продольной по отношению к плоскости хорд поперечных сечений результирующих распределенных аэродинамических сил находятся путем интегрирования выражений

$$N = \int_0^L q_1^1 dR_3^1, \quad T = \int_0^L q_2^1 dR_3^1. \quad \text{Здесь} \quad q_1^1 = q_n \sin \theta + q_L \cos \theta \quad \text{и} \quad q_2^1 = q_n \cos \theta - q_L \sin \theta - \text{проекции}$$

равнодействующих векторных компонент \bar{q}_n и \bar{q}_L в каждом сечении лопасти в базисе $\bar{e}^{(1)}$. Матрицы проекций векторов \bar{N} и \bar{T} в базисе $\bar{e}^{(1)}$ имеют вид $N^1 = \begin{pmatrix} N_1^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $T^1 = \begin{pmatrix} 0 & T_2^1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Аэродинамические силы \bar{q}_n и \bar{q}_L , будучи приложенными в центрах давления сечений лопасти, создают распределенный скручивающий аэродинамический момент относительно линии центров изгиба. В каждом сечении составляющая этого момента будут определяться функцией $\mu = -[q_n(\tau_d - \tau_0) \sin \theta + q_L(\tau_d - \tau_0) \cos \theta]$, а величина равнодействующего скручивающего момента

$$\text{определяется интегралом} \quad M = \int_0^L \mu dR_3^1. \quad \text{Его направление совпадает с базисным вектором} \quad \bar{e}_3^{(1)}, \quad \text{а матрица}$$

$$\text{проекций в базисе} \quad \bar{e}^{(1)} \quad \text{имеет вид} \quad M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_3^1 \end{pmatrix}^T.$$

Координаты τ_d центра давления и τ_0 центра изгиба для каждого сечения отсчитываются от носка профиля лопасти. Координата центра давления для каждого сечения является функцией его угла атаки, так как определяется с использованием графической зависимости коэффициента давления C_d от угла атаки θ по формуле $\tau_d = C_d(\theta)b$, где b - хорда профиля сечения.

Векторы нормальной и продольной результирующих аэродинамических сил создают моменты относительно центра шарнира O . Плечи этих сил равны расстояниям от полюса O до точек пересечения плоскостей их действия с осью, задаваемой базисным вектором $\bar{e}_3^{(1)}$ (осью центров изгиба в нашем случае).

Для нахождения координат точек приложения равнодействующих на оси базисного вектора $\bar{e}_3^{(1)}$ воспользуемся соотношениями для определения координаты центра тяжести эпюр, распределённых по произвольному закону сил. Координата определяется из отношения статического момента площади эпюры относительно оси координат к площади эпюры, а именно

$$z_N = \frac{\int_0^L z q_1^1(z) dz}{\int_0^L q_1^1(z) dz} = \frac{\int_0^L z (q_n \sin \theta + q_L \cos \theta) dz}{\int_0^L (q_n \sin \theta + q_L \cos \theta) dz}, \quad z_T = \frac{\int_0^L z q_2^1(z) dz}{\int_0^L q_2^1(z) dz} = \frac{\int_0^L z (q_n \cos \theta - q_L \sin \theta) dz}{\int_0^L (q_n \cos \theta - q_L \sin \theta) dz} \quad (4)$$

Таким образом, в текущем положении лопасти, приложенные к ней распределённые аэродинамические силы приводятся к векторам нормальной и продольной равнодействующим силам \bar{N} и \bar{T} с координатами их точек приложения на ней z_N и z_T , а также вектору результирующего скручивающего момента \bar{M} относительно базисного вектора $\bar{e}_3^{(1)}$ (или линии центров изгиба).

При нахождении обобщенных аэродинамических сил, приведенных к обобщенным координатам φ_1 и φ_2 , найденную систему аэродинамических сил приводим к центру шарнира O . Главный момент определяется выражением $\bar{M}_0 = \bar{M} + \bar{r}_N \times \bar{N} + \bar{r}_T \times \bar{T}$, где \bar{r}_N , \bar{r}_T - радиусы-векторы, соединяющие полюс O с точкой пересечения линий действия сил \bar{N} и \bar{T} с линией центров изгиба соответственно. Векторные проекции главного момента от совокупности аэродинамических силовых факторов, приложенных к лопасти в базисе $\bar{e}^{(1)}$, имеют вид: $\bar{M}_{01}^1 = -r_T T_2^1 \bar{e}_1^{(1)}$, $\bar{M}_{02}^1 = r_N N_1^1 \bar{e}_2^{(1)}$, $\bar{M}_{03}^1 = M_3^1 \bar{e}_3^{(1)}$.

Обобщенные силы Q_{1a} и Q_{2a} за счет действия аэродинамических силовых факторов находим как коэффициенты при виртуальных перемещениях $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ в выражении элементарной работы главного момента аэродинамических сил $\delta w = -r_T T_2^1 \sin \varphi_2 \delta\varphi_1 + r_N N_1^1 \cos \varphi_2 \delta\varphi_1 + M_3^1 \delta\varphi_2$. Таким образом $Q_{1a} = -r_T T_2^1 \sin \varphi_2 + r_N N_1^1 \cos \varphi_2$, $Q_{2a} = M_3^1$.

Обобщенные силы, обусловленные потенциальными силовыми факторами, – силами реакции пружин в шарнире O и слой веса лопасти - находятся с использованием выражения потенциальной энергии системы $\Pi = \Pi_{II} + \Pi_P = \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \varphi_2^2 + mg \left(\frac{L}{2} \cos \varphi_1 + r_C \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \right)$ следующим образом:

$$Q_{1II} = \partial \Pi / \partial \varphi_1 = c_1 \varphi_1, \quad Q_{2II} = \partial \Pi / \partial \varphi_2 = c_2 \varphi_2, \quad Q_{1P} = -\partial \Pi / \partial \varphi_1 = mg \left(\frac{L}{2} \sin \varphi_1 - r_C \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \right),$$

$Q_{2P} = -\partial \Pi / \partial \varphi_2 = -mg (r_C \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)$. При определении обобщенной консервативной силы, обусловленной силой веса, полагается, что центры масс всех поперечных сечений лопасти в силу их симметричности лежат на их хордах. Так как лопасть по предположению имеет постоянное по длине поперечное сечение, а ее масса равномерно распределена по длине, то центры масс всех сечений лежат на одной линии – линии центров масс – отстоящей от линии центров изгиба на расстоянии r_C . В этом случае центр масс лопасти расположен в ее срединном сечении на расстоянии r_C от линии центров изгиба, а его положение в базисе $\bar{e}^{(1)}$ задается радиус-вектором \bar{R}_C (рис.4).

При выводе уравнений динамики механизма использовался формализм уравнений Лагранжа 2-го рода. Шарнирно закрепленная лопасть представляет собой вращающееся тело с одной неподвижной точкой.

Ее кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \Theta^0 \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(I_{11}^0 \sin^2 \varphi_2 + I_{22}^0 \cos^2 \varphi_2 \right) \dot{\varphi}_1^2 + I_{33}^0 \dot{\varphi}_2^2 + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 I_{23}^0 \cos \varphi_2 \right]$.

При получении развернутой записи выражения кинетической энергии использовался тензор инерции лопасти в точке O в виде

$$\Theta^0 = \Theta^C + m \left(E r_C^2 - \bar{r}_C \bar{r}_C \right) = \begin{pmatrix} I_{11}^C + m(y_C^2 + z_C^2) & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^C + m z_C^2 & -m y_C z_C \\ 0 & -m y_C z_C & I_{33}^C + m y_C^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где m - масса лопасти; \bar{r}_C - радиус-вектор центра масс по отношению к точке O . В соответствии с лагранжевым формализмом уравнения динамики имеют вид

$$\begin{cases} (I_{11}^0 \sin^2 \varphi_2 + I_{22}^0 \cos^2 \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + I_{23}^0 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + \\ + 2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (I_{11}^0 + I_{22}^0) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - I_{23}^0 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 = Q_1 \\ I_{23}^0 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_1 + I_{33}^0 \ddot{\varphi}_2 - (I_{11}^0 + I_{22}^0) \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1^2 = Q_2 \end{cases} \quad (6)$$

Стоящие в правой части обобщенные силы формируются из обобщенных сил, обусловленных аэродинамическими силовыми факторами, и группы обобщенных сил, обусловленных потенциальной энергией сил гравитации и упругости.

Исследование устойчивости движения консольных фрагментов лопастей и траверс для выяснения условий возникновения флаттера проведены на основе уравнений малых колебаний в линейном приближении в безразмерной форме. Они получены из нелинейных дифференциальных уравнений (6) [4]. В рамках теории малых возмущений система (6) запишется следующим образом

$$\begin{aligned} I_{22}^0 \ddot{\varphi}_1 + I_{23}^0 \ddot{\varphi}_2 &= Q_1, \\ I_{23}^0 \ddot{\varphi}_1 + I_{33}^0 \ddot{\varphi}_2 &= Q_2. \end{aligned} \quad (7)$$

В [4] найден упрощенный вид обобщенных сил $Q_i (i=1,2)$ с учетом следующего из экспериментальных данных приближения $C_{n0} \ll \dot{C}_{L0}$; полагалось, что поток воздуха направлен вдоль хорды покоящейся лопасти и имеет скорость U , т.е. $V_\infty^0 = (0 \ 0 \ U)^T$; моменты сил веса в линейном приближении не учитывались

$$Q_1 = \frac{1}{2} \dot{M}_{L0} \left(-\frac{2}{3} \frac{L}{U} \dot{\varphi}_1 + \varphi_2 \right) - c_1 \varphi_1, \quad Q_2 = -\dot{m}_{L0} \left(\varphi_2 - \frac{L}{2U} \dot{\varphi}_1 \right) - c_2 \varphi_2, \quad (8)$$

где $\dot{M}_{L0} = \frac{1}{2} \rho U^2 S L \dot{C}_{L0}$ - вращательная (по углу атаки) производная момента подъемной силы Q_L на плече, равном размаху лопасти; $\dot{m}_{L0} = \frac{1}{2} \rho U^2 S h_0 \dot{C}_{L0}$ - вращательная производная момента подъемной силы на плече h_0 , равном смещению центра давления

$$h_0 = C_{d0} b - \tau_0 > 0. \quad (9)$$

Величина h_0 представляет собой смещение центра давления относительно центра тяжести. Для статической аэродинамической устойчивости профиля необходимо, чтобы $h_0 > 0$. Результатом упрощений [4] является система двух уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} I_{22}^0 \ddot{\varphi}_1 + I_{23}^0 \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \dot{M}_{L0} \left(-\frac{2}{3} \frac{L}{U} \dot{\varphi}_1 + \varphi_2 \right) + c_1 \varphi_1 &= 0, \\ I_{23}^0 \ddot{\varphi}_1 + I_{33}^0 \ddot{\varphi}_2 + \dot{m}_{L0} \left(\varphi_2 - \frac{L}{2U} \dot{\varphi}_1 \right) + c_2 \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнениях (10) хорошо представлены слагаемые, описывающие инерционные, аэродинамические и упругие моменты, действующие на лопасть в её возмущенном движении вращения вокруг точки подвеса O . Источник возмущенного движения определяется величинами малых возмущений в начальных условиях. Нулевым значениям начальных возмущений соответствует тривиальное решение системы (состояние покоя). Масштабирование времени $t = \frac{L}{U} \bar{t}$ приводит (10) к виду (точка сверху это уже производная по безразмерному времени \bar{t})

$$\begin{aligned} J_{22}^0 \ddot{\varphi}_1 + J_{23}^0 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{3} \dot{M}_{L0} \dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \dot{M}_{L0} \varphi_2 + c_1 \varphi_1 &= 0, \\ J_{23}^0 \ddot{\varphi}_1 + J_{33}^0 \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} \dot{m}_{L0} \dot{\varphi}_1 + (\dot{m}_{L0} + c_2) \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$J_{22}^0 = I_{22}^0 \frac{U^2}{L^2}, \quad J_{23}^0 = I_{23}^0 \frac{U^2}{L^2}, \quad J_{33}^0 = I_{33}^0 \frac{U^2}{L^2}. \quad (12)$$

Матричный аналог (11) имеет вид

$$A \ddot{\Phi} + B \dot{\Phi} + C \Phi = 0, \quad (13)$$

где A, B, C – матрицы коэффициентов инерционных, аэродинамических и упругих моментов

$$A = \begin{pmatrix} J_{22}^0 & J_{23}^0 \\ J_{23}^0 & J_{33}^0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \dot{M}_{L0} & 0 \\ -\frac{1}{2} \dot{m}_{L0} & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & -\frac{1}{2} \dot{M}_{L0} \\ 0 & (\dot{m}_{L0} + c_2) \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Нетривиальные частные решения системы (13) ищутся в виде

$$\Phi = We^{kt}, W = (W_1 W_2)^T. \quad (15)$$

где W – вектор, определяемый начальными условиями.

Подстановка (15) в (13) дает систему уравнений по определению вектора начальных возмущений W

$$(Ak^2 + Bk + C)W = 0. \quad (16)$$

с характеристическим уравнением [4]

$$a_0 k^4 + a_1 k^3 + a_2 k^2 + a_3 k + a_4 = 0 \quad (17)$$

и коэффициентами, определяемыми равенствами

$$a_0 = J_{22}^0 J_{33}^0 - J_{23}^0 J_{23}^0, a_1 = \frac{1}{3} \dot{M}_{L0} J_{33}^0 + \frac{1}{2} \dot{m}_{L0} J_{23}^0, a_2 = (\dot{m}_{L0} + c_2) J_{22}^0 + \frac{1}{2} \dot{M}_{L0} J_{23}^0 + c_1 J_{33}^0, \quad (18)$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \dot{M}_{L0} \left(\frac{1}{4} \dot{m}_{L0} + c_2 \right), a_4 = c_1 (\dot{m}_{L0} + c_2).$$

Все коэффициенты характеристического уравнения положительны. Их значения определяются семью параметрами. Три из них - инерционные моменты $J_{22}^0, J_{23}^0, J_{33}^0$ лопасти (приведенные к масштабу времени); два параметра $\dot{M}_{L0}, \dot{m}_{L0}$ - моменты аэродинамического воздействия на каждый вид вращения лопасти; два параметра c_1, c_2 характеризуют упругие свойства в точке подвеса.

Таким образом, исследование свойств возмущенного движения лопасти в линейном приближении свелось к определению четырех корней алгебраического уравнения (17) в зависимости от семи параметров.

Выводы

Получена модель динамики консольных лопастей и их фрагментов Н-ротора Дарье для исследования колебательных процессов в потоке воздуха под действием активных аэродинамических сил и консервативных силовых факторов – их веса и сил упругих реакций в месте консольной заделки. Предложена методика учета аэродинамических сил, действующих на балки, поперечные сечения которых представляют симметричные аэродинамические профили. Расчетная схема модели позволяет учитывать упругость консольной заделки, реальный разнос мест расположения на хорде центров изгиба, центров масс и давления. Учтена нелинейность распределенных аэродинамических нагрузок. Модель позволяет учитывать изменение координат на хорде центра давления в зависимости от угла атаки.

Модель динамики лопасти подвергнута асимптотическому анализу в рамках теории малых возмущений ее движения в окрестности положения равновесия. Получена упрощенная линейная математическая модель, которая описывает малые возмущения угловых координат элемента лопасти в её движении вокруг точки подвеса. Сформированная линейная модель движения лопасти позволила найти простые выражения для величин, описывающих инерционные, аэродинамические и упругие моменты и учесть при этом все основные внешние факторы, влияющие на характеристики возмущений.

Список использованной литературы

1. Thresher R.W. A computer analysis of wind turbine blade dynamic loads/R.W.Thresher, A.D.Wright, E.L.Hershberg//Transaction of the ASME. Journal of Solar Energy Engineering. – 1986. – Vol.108,№2. – P.17-25.
2. Popelka D. Aeroelastic Stability Analysis of a Darrieus Wind Turbine/SANDIA National Laboratory, SANDIA Report SAND82-0672, February 1982.
3. Джонсон У. Теория вертолета: Кн. 2/У. Джонсон. – М.: Мир, 1983. – 516с.
4. Разработка прикладных методов моделирования и расчета аэродинамики и динамики перспективных систем энергообеспечения: Отчет о НИР (промежуточн.)/ИТСТ НАН Украины «Трансмаг»; рук. Дзензерский В.А.; исполн. Тарасов С.В. – Днепропетровск, 2014. – 315с. – ГР 0110U006964.