

УДК 004.942:[519.6+519.873]

Д.О. ТОПЧИЙ, А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморский национальный университет имени Петра Могилы, г. Николаев

**КОМПЬЮТЕРНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВЕНАДЦАТЬЮ
ТЕРМОЭЛЕМЕНТАМИ. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ**

В статье представлены результаты компьютерного тестирования нестационарного температурного поля квадратной пластины с двенадцатью термоэлементами с использованием стандартного базиса бикубической интерполяции. Благодаря использованию программных комплексов MathCAD 14 и Компас 3D V11 были получены иллюстративные образы двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве нестационарного температурного поля в фиксированные моменты времени.

Ключевые слова: серендипов конечный элемент третьего порядка, базисная функция, нестационарное температурное поле, динамические термоэлементы.

Д.О. ТОПЧИЙ, А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могилы, м. Миколаїв

**КОМП'ЮТЕРНЕ ТЕСТУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
КВАДРАТНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВЕНАДЦЯТЬМА ТЕРМОЕЛЕМЕНТАМИ. ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ**

У статті надаються результати комп'ютерного тестування нестационарного температурного поля квадратної пластины з дванадцятьма термоелементами з використанням стандартного базису бікубічної інтерполяції. Завдяки використанню програмних комплексів MathCAD 14 і Компас 3D V11 були отримані ілюстративні образи двовимірних поверхонь у тривимірному евклидовому просторі нестационарного температурного поля у фіксовані моменти часу.

Ключові слова: серендипів скінченний елемент третього порядку, базисна функція, нестационарне температурне поле, динамічні термоелементи.

D.O. TOPCHYI, A.N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University, c. Nikolaev

**COMPUTER TESTING OF A NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELD OF A SQUARE PLATE
WITH TWELVE THERMOELEMENTS. REVIEW OF THE RESULTS**

In the article the results of computer testing of a non-stationary temperature field of a square plate with twelve thermoelements with the using of a standard basis of bicubic interpolation are shown. Due to use of MathCAD 14 and Компас 3D V11 software solutions the illustrative images of the two-dimensional surfaces in a three-dimensional euclidian space of a non-stationary temperature field were obtained at random points of time.

Keywords: serendipity finite element of the third order, basis function, non-stationary temperature field, dynamic thermoelements.

Введение

Компьютерная диагностика (тестирование) стационарных и нестационарных физических полей (в частном случае – температурных полей), на пластинах и брусках различных конфигураций, является актуальной задачей в инженерных расчётах, а именно: 1) визуализация формообразования поверхностей (рельефов) (не)-стационарных физических полей; 2) нахождение искомой физической величины (температуры) в произвольной точке пластины (бруска) в любой (произвольный) момент времени.

Влияние базиса на исследуемое поле элемента очень велико: некоторые базисы в отдельных точках занижают поле, а некоторые – завышают его. С помощью компьютерного тестирования удалось обнаружить явление стойкости серендиповых поверхностей по отношению к базису. Были сформулированы условия стойкости поля относительно базиса на серендиповых элементах 2-го, 3-го и 4-го порядков, как в двумерном, так и в трёхмерном пространствах. Фактически, представители конструктивной теории серендиповых аппроксимаций рассматривали аспекты стационарного температурного поля [1–11]. Рассмотрим серендипов конечный элемент (СКЭ) заданной конфигурации (треугольник, квадрат, правильный k -угольник, куб) на границе которого равномерно расположены n узлов. С геометрической и топологической точек зрения [12, 13] задача аппроксимации заключается в получении двумерного многообразия M^2 (поверхности гомеоморфной плоскости E^2) – $U(x,y)$ в трёхмерном евклидовом

пространстве E^3 (x, y, z – измерения) и, в общем случае, трёхмерного ($\max \dim(M) = 4$) многообразия $M^3 - U(x,y,z)$ в четырёхмерном евклидовом пространстве E^4 , которые проходят через точки (x_i, y_i, U_i) и (x_i, y_i, z_i, U_i) соответственно. Уравнения поверхностей в форме Лагранжа:

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot U_i, \quad U(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot U_i, \quad \text{где } \{N_i\} - \text{ базис СКЭ, } U_i - \text{ известные}$$

аппликаты (темпусаты). Полевые функции $U(x,y)$ и $U(x,y,z)$ моделируют поверхности стационарных температурных полей $T(x,y)$ и $T(x,y,z)$ соответственно. Наличие серендипового конечного элемента предоставляет возможность сформулировать краевую задачу с дискретными условиями Дирихле на границе. Температуры $T(x,y)$ или $T(x,y,z)$ в произвольной точке пластины (бруска), заданной геометрической формы, определяются через набор (множество) граничных температур $\{T_i\}$ с помощью следующих

$$\text{интерполяционных полиномов: } T(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot T_i, \quad T(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot T_i. \text{ В каждом граничном}$$

узле i функционирует термоэлемент, который поддерживает постоянную температуру. В конце 20-го века была создана информационная технология на языке Turbo Pascal [14] для компьютерной диагностики скалярных физических полей.

Уравнения нестационарных поверхностей $U(x,y,t)$ (в строгом смысле – трёхмерное ($\max \dim(M) = 4$) многообразие в четырёхмерном евклидовом пространстве E^4) и $U(x,y,z,t)$ ((четырёх)-трёхмерное ($\max \dim(M) = 5$) многообразие в пятимерном евклидовом пространстве E^5), которые проходят через точки $(x_i, y_i, U_i(t))$ и $(x_i, y_i, z_i, U_i(t))$ соответственно, в форме Лагранжа имеют следующий вид:

$$U(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot U_i(t), \quad U(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot U_i(t), \quad \text{где } \{N_i\} - \text{ базис СКЭ, } U_i(t) - \text{ функции}$$

изменения аппликат (темпусат). Полевые функции $U(x,y,t)$ и $U(x,y,z,t)$ моделируют поверхности нестационарных температурных полей $T(x,y,t)$ и $T(x,y,z,t)$ соответственно. Очевидно, что наличие серендипового конечного элемента даёт возможность сформулировать "нестандартную" краевую задачу с дискретными условиями Дирихле на границе. Температуры $T(x,y,t)$ или $T(x,y,z,t)$ в произвольной точке пластины (бруска) в любой момент времени определяются через набор (множество) граничных температур

$$\{T_i(t)\} \quad \text{с помощью интерполяционных полиномов: } T(x, y, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot T_i(t),$$

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot T_i(t). \text{ В каждом граничном узле } i \text{ функционирует динамический термоэлемент}$$

(который имеет собственный температурный режим). Вышеуказанная формулировка "нестандартной" краевой задачи является тривиальным следствием (расширением) аналогичной задачи для стационарного поля.

Иллюстративный образ $U(x,y,z)$ в трёхмерном евклидовом пространстве E^3 (x, y, z – измерения) является отображением (проекцией) трёхмерного ($\max \dim(M) = 4$) многообразия M^3 на E^3 . Иллюстративный образ $U(x,y,t)$ в трёхмерном евклидовом пространстве E^3 (x, y, z – измерения) является отображением (проекцией) трёхмерного ($\max \dim(M) = 4$) многообразия M^3 на E^3 . Иллюстративный образ $U(x,y,z,t)$ в трёхмерном евклидовом пространстве E^3 (x, y, z – измерения) является отображением (проекцией) четырёх-трёхмерного ($\max \dim(M) = 5$) многообразия на E^3 . А ргіогі, обладая множеством фиксированных значений времени ($t = \text{fix}$), получение иллюстративного образа $U(x,y,t)$ в трёхмерном евклидовом пространстве E^3 , автоматически сводится к получению двумерного многообразия $M^2 - U(x,y)$ (имеет место процедура отображения $E^2 \rightarrow E^3$).

С помощью программных пакетов Компас 3D V11, MathCAD 14, Maple 17 было осуществлено тестирование (визуализация) нестационарных температурных полей $U(x,y,t)$ и $U(x,y,z,t)$ на следующих серендиповых конфигурациях: **1**) квадрат с четырьмя термоэлементами (билинейная интерполяция) [15];

2) квадрат с восемью термоэлементами (биквадратическая интерполяция) с использованием стандартного и альтернативного базисов [16]; 3) квадрат с двенадцатью термоэлементами (бикубическая интерполяция) с использованием альтернативного базиса [17]; 4) гексагон с шестью термоэлементами [18]; 5) треугольник с шестью термоэлементами [19]; 6) куб с тридцатью двумя термоэлементами с использованием стандартного и альтернативного базисов [16].

На основе результатов конструктивной теории серендиповых аппроксимаций с использованием компоненты из "the theory of plafales" [20–22] была создана информационная технология на С# [23] для тестирования нестационарных физических (температурных) полей. Ключевое назначение указанной информационной технологии – рендеринг в режиме реального времени (обработка результатов "на лету") процедуры визуализации полевых функций $U(x, y, t)$.

Анализ последних достижений и публикаций

В основе работы лежат публикации [15–19].

Формулирование цели исследования

Основная цель статьи – визуализация двумерных поверхностей нестационарного температурного поля в фиксированные моменты времени с использованием стандартного базиса СКЭ третьего порядка.

Изложение основного материала исследования

Зададим температурные режимы термоэлементов в двенадцати узлах серендипового конечного элемента третьего порядка (рис. 1):

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \cos t; T_2(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right); T_3(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right); T_4(t) = \sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right); \\ T_5(t) &= \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right); T_6(t) = \sin\left(6t + \frac{\pi}{4}\right); T_7(t) = \cos\left(7t + \frac{\pi}{2}\right); T_8(t) = \sin\left(8t + \frac{\pi}{3}\right); \\ T_9(t) &= \cos\left(9t + \frac{\pi}{2}\right); T_{10}(t) = \sin\left(9t + \frac{\pi}{6}\right); T_{11}(t) = \cos\left(9t + \frac{\pi}{4}\right); T_{12}(t) = \sin\left(10t + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Температура в произвольной точке квадратной пластины и в любой момент времени определяется следующей формулой:

$$T(x, y, t) = \sum_{i=1}^{12} N_i(x, y) \cdot T_i(t), \quad (2)$$

где $N_i(x, y)$ – базисные функции бикубической интерполяции, $T_i(t)$ – температурные режимы термоэлементов.

Стандартный базис бикубической интерполяции [24]:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{32}(1+x)(1-y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{32}(1+x)(1+y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ N_4(x, y) &= \frac{1}{32}(1-x)(1+y)(-10+9(x^2+y^2)), \\ N_5(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1-3x), \quad N_6(x, y) = \frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1+3x), \\ N_7(x, y) &= \frac{9}{32}(1-y^2)(1+x)(1-3y), \quad N_8(x, y) = \frac{9}{32}(1-y^2)(1+x)(1+3y), \\ N_9(x, y) &= \frac{9}{32}(1-x^2)(1+y)(1+3x), \quad N_{10}(x, y) = \frac{9}{32}(1-x^2)(1+y)(1-3x), \\ N_{11}(x, y) &= \frac{9}{32}(1-y^2)(1-x)(1+3y), \quad N_{12}(x, y) = \frac{9}{32}(1-y^2)(1-x)(1-3y). \end{aligned} \quad (3)$$

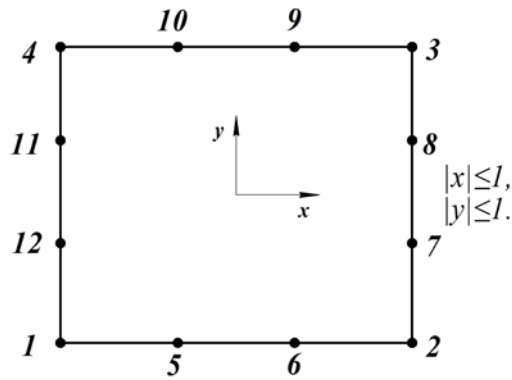


Рис. 1. Серендипов конечный элемент третьего порядка

С помощью программных комплексов MathCAD 14 и Компас 3D V11 были получены иллюстративные образы двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве нестационарного температурного поля (2). Продемонстрируем скриншоты (рис. 2, рис. 3) в следующие моменты времени: $t = 10$ с, 30 с, 50 с, 100 с.

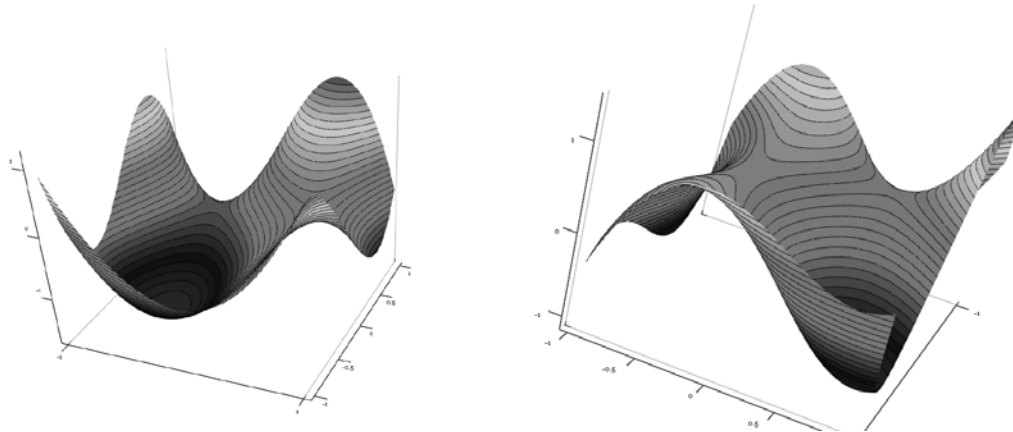


Рис. 2. Поверхности температурных полей $t = 10$ с (слева) и $t = 30$ с (справа)

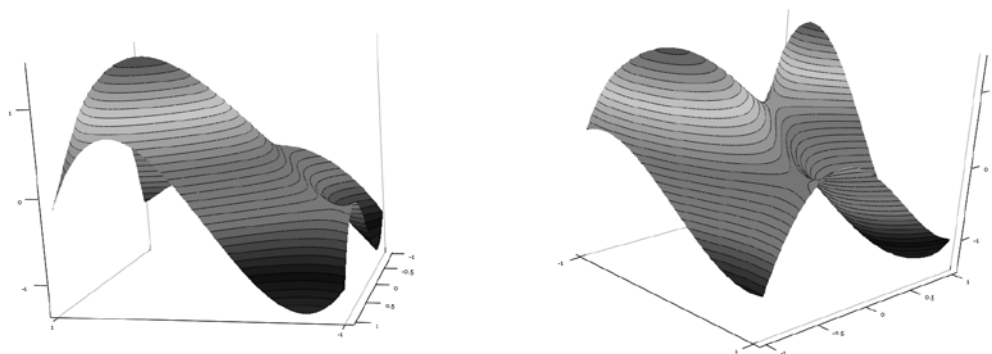


Рис. 3. Поверхности температурных полей $t = 50$ с (слева) и $t = 100$ с (справа)

Выводы

Благодаря использованию программных комплексов MathCAD 14 и Компас 3D V11 были получены иллюстративные образы двумерных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве нестационарного температурного поля в фиксированные моменты времени. Существующие программные комплексы, такие как MathCAD и Maple, при выполнении вышеописанной задачи – визуализации поверхности нестационарного физического (температурного) поля, выполняют пре-рендеринг в отвлечённом режиме. Информационная технология [23], практической реализацией которой выступает программно-технический

комплекс "Тестирование нестационарных температурных полей с динамическими термоэлементами", реализует визуализацию в режиме реального времени, обладает удобным пользовательским интерфейсом (юзабилити) и не имеет аналогов. На основании предлагаемой методики возникает интерес осуществить тестирование нестационарного температурного поля пластины квадратной формы с шестнадцатью термоэлементами и октагональной формы соответственно.

Список использованной литературы

1. Гучек П.И. Моделирование конечных элементов серендипова семейства для исследования температурных полей / П.И. Гучек, Е.И. Литвиненко, М.С. Буба, А.Н. Хомченко // Проблемы пожарной безопасности: сб науч. тр. – К.: МВД Украины, 1995. – С. 75 – 77.
2. Камаева С.О. Анализ стойкости поля относительно базисов пространственного серендипового элемента 2-го порядка / С.О. Камаева, А.Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. – Вып. 1 (34). – С. 13 – 16.
3. Камаева С.О. Ансамблирование конечных элементов с альтернативными базисами / С.О. Камаева // Материалы V международной научно-практической конференции "Актуальные проблемы современных наук – 2009". – Польша, 2009. – Т. 21. – С. 74 – 76.
4. Камаева С. О. Восстановление температурного поля пластины невыпуклой формы / С. О. Камаева // Материалы V международной научно-практической конференции "Эффективные инструменты современных наук – 2009". – Прага, 2009. – Т. 14. – С. 23 – 26.
5. Камаева С.О. Геометрические модели и методы конструктивного восстановления физических полей : дисс. ... кандидата техн. наук: 01.05.02 / Светлана Олеговна Камаева. – Харьков, 2010. – 218 с.
6. Камаева С.О. Исследование температурного поля в областях невыпуклой формы / С.О. Камаева // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2007. – Вып. 2 (28). – С. 137 – 141.
7. Камаева С.О. Стойкость скалярного поля относительно базисов серендипового элемента / С.О. Камаева, А.Н. Хомченко // Геометрическое и компьютерное моделирование. – Харьков, 2009. – Вып. 22. – С. 25 – 31.
8. Хомченко А.Н. Геометрическое моделирование стационарных тепловых полей в областях сложной формы / А.Н. Хомченко, С.О. Камаева // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелитополь, 2008. – Вып. 4. Прикладна геометрія, інженерна графіка. – Т. 38. – С. 34–43.
9. Хомченко А. Н. Дискретные модели температурных полей в областях сложной формы / А.Н. Хомченко, С.О. Камаева // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. – Черновцы: Изд-во Чернов. нац. ун-т им. Ю. Федьковича, 2008. – Вып. 16. – С. 293 – 311.
10. Хомченко А.Н. Конструирование серендиповых поверхностей, нечувствительных к изменению функций формы / А. Н. Хомченко, С. О. Камаева // Научные заметки. – Луцк: ЛГТУ, 2008. – Вып. 22. – С. 366 – 371.
11. Хомченко А. Н. Критерий инвариантности температурных полей серендиповых элементов относительно альтернативных функций формы / А. Н. Хомченко, С. О. Камаева // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математического моделирования, прогнозирования и оптимизации" (г. Каменец-Подольский, 5–6 июня 2008 г). – Каменец-Подольский, 2008. – Вып. 1. – С. 191 – 196.
12. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1975. – 224 с.
13. Мищенко А.С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 298 с.
14. Литвиненко Е.И. Математические модели и алгоритмы компьютерной диагностики физических полей: дисс. ... кандидата техн. наук: 05.13.06 / Елена Ивановна Литвиненко. – Херсон, 1999. – 172 с.
15. Топчий Д.О. Влияние температурных режимов термоэлементов на динамику температурного поля / Д.О. Топчий, А.Н. Хомченко // Научные работы. Серия: Компьютерные технологии. – Николаев: Изд-во Черноморского государственного университета имени П. Могила, 2014. – Вып. 225. – Т. 237. – С. 110 – 112.
16. Topchyi D. Testing of a non-stationary temperature fields with dynamic thermoelements / D. Topchyi // Electronic scientific journal "Researches of technical sciences". – 2014. – Release 3 (13). – P. 32 – 41.
17. Топчий Д.О. Тестирование нестационарного температурного поля квадратной пластины с двенадцатью термоэлементами на альтернативном базисе / Д. О. Топчий // Материалы X международной научно-практической конференции "Актуальные научные достижения – 2014". – Прага: Образование и Наука, 2014. – Вып. 13. – С. 37 – 40.
18. Топчий Д.О. Тестирование нестационарного температурного поля пластины гексагональной формы с шестью термоэлементами / Д.О. Топчий, А.Н. Хомченко // Материалы X международной научно-

- практической конференции "Динамика научных исследований – 2014". – Пшемьсль: Наука и исследования, 2014. – Вып. 8. – С. 71 – 74.
19. Топчий Д.О. Компьютерное тестирование нестационарного температурного поля треугольной пластины с шестью термоэлементами / Д.О. Топчий // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2014. – Вып. 3 (50) . – С. 499 – 501.
 20. Topchy D. The theory of plafales: the proof of P versus NP problem / D. Topchy. – Brentwood: Best Global Publishing, 2011. – 634 p.
 21. Topchy D. The theory of plafales: the proof algorithms for millennium problems [Электронный ресурс] / D. Topchy. – Brentwood: Best Global Publishing, 2013. – 695 p. – Режим доступа: <http://eleanor-cms.ru/uploads/book.pdf>
 22. Topchy D. The theory of plafales: Applications of new cryptographic algorithms and platforms in Military complex, IT, Banking system, Financial market [Электронный ресурс] / D. Topchy // XLII KONFERENCJA ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI: Тез. докл. конф. (Закопаны, 27 авг. – 3 сент. 2013 г.). – Варшава, 2013. – С. 58. – Режим доступа: <http://www.impan.pl/~zakopane/42/Topchy.pdf>
 23. Топчий Д.О. Программно-технический комплекс "Тестирование нестационарных температурных полей с динамическими термоэлементами" / Д.О. Топчий // Электронный научный журнал "Отраслевые аспекты технических наук". – Издательство ИНГН, 2015. – Выпуск 4 (46). – С. 27 – 37.
 24. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббиа. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.