

УДК 004.9

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Н.В. СТАРУН, Т.А. СЕЛУЯНОВА  
Херсонський національний технічний університет**ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДВОХ ЗАДАЧ МСЕ**

*В статті доводиться твердження про те, що задача побудови гармонічного базису для скінченного елемента і задача побудови базису, який забезпечує мінімальне значення сліду матриці жорсткості елемента, за певних умов є еквівалентними задачами і приводять до побудови одного і того ж самого базису. Доведення виконано для скінчених елементів у формі прямокутних трикутників. Також обговорюються можливості розповсюдження твердження на скінченні елементи у формі різносторонніх трикутників і прямокутників.*

*Ключові слова: слід матриці жорсткості, гармонічні функції, точність розв'язку.*

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Н.В. СТАРУН, Т.А. СЕЛУЯНОВА  
Херсонский национальный технический университет**ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ЗАДАЧ МКЭ**

*В статье доказывается утверждение о том, что задача построения гармонического базиса для конечного элемента и задача построения базиса, который обеспечивает минимальное значение следа матрицы жесткости элемента, при определенных условиях являются эквивалентными задачами и приводят к построению одного и того же базиса. Доказательство выполнено для конечных элементов в форме прямоугольных треугольников. Также обсуждаются возможности распространения утверждения на конечные элементы в форме разносторонних треугольников и прямоугольников.*

*Ключевые слова: след матрицы жесткости, гармонические функции, точность решения.*

G.Ya. TULUCHENKO, N.V. STARUN, T.A. SELUYANOVA  
Kherson National Technical University**ABOUT EQUIVALENCE OF TWO PROBLEMS BY FEM**

*In this paper we prove the statement that the task of building a harmonious basis for finite element and the task of building the base, which provides the minimum value of trace of element's stiffness matrix, are equivalent problem under certain conditions, and lead to the construction of the same basis. The proof is made for finite elements with shape of rectangular triangles. It also discusses the possibility of extending statement by finite elements with shape of scalene triangles and rectangles.*

*Keywords: trace of stiffness matrix, harmonic functions, accuracy of solution.*

**Постановка проблеми**

Знаходження критеріїв для визначення якості базисів скінчених елементів, за якими можливе достовірне прогнозування точності розв'язків граничних та крайових задач, які отримують за методом скінчених елементів (СЕ), до цього часу є остаточно нерозв'язаною проблемою. Необхідною умовою хороших апроксимаційних властивостей базисів у методі скінчених елементів вважається мінімально можливе значення сліду матриці жорсткості СЕ [1]. З іншого боку відомо, що збіжність розв'язку, отриманого за МСЕ, є оптимальною, якщо використовувані базисні функції задовольняють однорідному диференціальному рівнянню, яке відповідає диференціальному рівнянню досліджуваної задачі [2]. Зокрема, при розв'язанні крайової задачі з рівнянням Пуассона доцільно, щоб базисні функції задовольняли рівнянню Лапласа, тобто були гармонічними. Таким чином, при розв'язанні задач вказаного виду обґрунтованим є використання базисів, побудованих за двома підходами: 1) у результаті мінімізації сліду матриці жорсткості елемента; 2) у результаті знаходження гармонічних базисних функцій. Порівняння розв'язків цих задач побудови базисів не здійснювалося.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

У роботі [1, С. 126] доводиться, що для двох конформних СЕ вища точність розв'язку отримується на тому елементі, для якого слід матриці жорсткості є меншим.

У роботі [2], як відзначалося вище, показано, що тими ж властивостями володіють елементи з гармонічними базисами.

**Формулювання мети дослідження**

Показати, що базис, який отримують для трикутного або прямокутного СЕ довільного порядку серендипового виду у результаті розв'язання задачі мінімізації сліду матриці жорсткості, і базис, який

складається із гармонічних функцій, що на границях елемента співпадають із стандартними базисними функціями, є тотожними базисами.

**Викладення основного матеріалу дослідження**

Доведення твердження, яке сформульовано у меті дослідження, виконаємо на прикладі СЕ у формі прямокутного трикутника. Після цього покажемо можливості поширення доведення на СЕ у формі різносторонніх трикутників та прямокутників.

Введемо наступні позначення:

- $\Omega$  – скінченний елемент у формі прямокутного трикутника;
- $NS$  – стандартний базис елемента  $\Omega$  (можливо отриманий в результаті операції внутрішньої конденсації);
- $NM$  – базис, який мінімізує слід матриці жорсткості для елемента  $\Omega$ ;
- $NH$  – базис, який складається із функцій гармонічних всередині елемента  $\Omega$  і таких, що співпадають на границі елемента  $\Omega$  зі стандартними базисними функціями.
- $k^{(e)}$  – матриця жорсткості/теплопровідності скінченного елемента  $\Omega$ .

Для скінченного елемента  $\Omega$  у формі прямокутного трикутника будемо шукати базисні функції зі спеціальними властивостями  $NM_p$  і  $NH_p$  у вигляді сум стандартної базисної функції  $NS_i$  і поправочної функції  $WM_p$  (або  $WH_p$  відповідно), які саме і забезпечують наявність у базису нових властивостей:

$$NM_p \approx NS_p + WM_p, \text{ де} \tag{1}$$

$$WM_p \approx g(x; y) \cdot \sum_{i=0}^Q \sum_{j=0}^{i+j=Q} a_{i,j}^{(p)} x^i y^j, \tag{2}$$

$$NH_p \approx NS_p + WH_p, \text{ де} \tag{3}$$

$$WH_p \approx g(x; y) \cdot \sum_{i=0}^Q \sum_{j=0}^{i+j=Q} b_{i,j}^{(p)} x^i y^j, \text{ де} \tag{4}$$

$Q$  – найвищий степінь полінома, що визначає кількість доданків у частинній сумі ряду;  $a_{i,j}^{(p)}, b_{i,j}^{(p)} \in R$  – шукані коефіцієнти поправочних функцій;  $n$  – кількість вузлів в СЕ;  $p = \overline{1; n}$ ;  $g(x; y)$  – функція, яка є добутком рівнянь сторін СЕ.

Зрозуміло, що рівності (1-4) виконуються точно, коли параметр  $Q$ , що визначає кількість доданків у частинних сумах рядів, прямує до нескінченності:  $Q \rightarrow \infty$ .

**Задача мінімізації матриці жорсткості.** Матриця жорсткості/теплопровідності досліджуваного скінченного елемента для граничної задачі з рівнянням Лапласа обчислюється за формулою [1]:

$$k^{(e)} = \iint_{\Omega} (B^T \cdot D \cdot B) dx dy, \tag{5}$$

де  $D_{xx}, D_{yy}$  – коефіцієнти пружності/теплопровідності середовища за напрямками координатних осей;

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 \\ 0 & D_{yy} \end{pmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів пружності/теплопровідності середовища};$$

$B$  та  $B^T$  – матриця та транспонована матриця частинних похідних базисних функцій СЕ. Слід матриці жорсткості (5) за умови одиничної матриці коефіцієнтів пружності середовища обчислюється за формулою:

$$trace(k^{(e)}) = \sum_{p=1}^n \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial NM_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial NM_p}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy, \tag{6}$$

де  $NM_p$  – базисні функції;  $p = \overline{1; n}$ ;  $n$  – кількість вузлів в СЕ.

Таким чином, для обраної структури базисних функцій (1-2) найкращим базисом для СЕ має бути той, для якого

$$trace(k^{(e)}) \rightarrow \min. \tag{7}$$

**Задача побудови гармонічних базисних функцій.** Кожна шукана гармонічна базисна функція  $NH_p$  виду (3-4) є розв'язком задачі Діріхле (всередині СЕ вона задовольняє рівнянню Лапласа)

$$\frac{\partial^2 NH_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 NH_p}{\partial y^2} = 0, \tag{8}$$

а на границі елемента співпадає із стандартною базисною функцією:

$$NH_p \Big|_{\Gamma} = NS_p. \tag{9}$$

Підставимо вираз (3) базисної функції  $NH_p$  у рівняння (8) і граничні умови (9). Після підстановки отримаємо задачу Діріхле для рівняння Пуассона з нульовими граничними умовами відносно шуканої функції  $WH_p$ :

$$\frac{\partial^2 WH_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 WH_p}{\partial y^2} = - \left( \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} \right), \tag{10}$$

$$WH_p \Big|_{\Gamma} = 0 \tag{11}$$

В. Рігцем із співробітниками доведено, що розв'язання граничної задачі (10-11) еквівалентне розв'язанню задачі мінімізації функціонала:

$$\Phi_p = \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial WH_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial WH_p}{\partial y} \right)^2 + 2 \cdot f_p \cdot WH_p \right) dx dy \rightarrow \min, \tag{12}$$

де  $f_p = - \left( \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} \right)$ ,  $p = \overline{1;n}$ .

Напишемо функціонал (12) у більш зручній для аналізу формі:

$$\Phi_p = \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial WH_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial WH_p}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy + 2 \cdot \iint_{\Omega} f_p \cdot WH_p dx dy \rightarrow \min, \quad p = \overline{1;n}. \tag{13}$$

**Визначення геометричної форми СЕ.** Із формул (6) і (12, 13) видно, що для визначення виразів функціоналів необхідно обчислювати подвійні інтеграли по області СЕ, що потребує підстановки границь інтегрування в отримувані вирази. Доведення виконаємо для СЕ у формі прямокутного трикутника. Локальну систему координат в СЕ визначимо як на рис. 1.

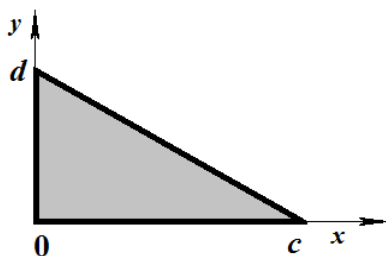


Рис. 1. Локальна система координат у трикутному СЕ

Функція  $g(x; y)$ , яка є добутком рівнянь сторін СЕ, для трикутника з рис. 1 має вигляд:

$$g(x; y) = xy \cdot (dx + cy - cd)$$

Введемо ще дві функції:

$$\varphi(x) = -\frac{d}{c} \cdot (x - c);$$

$$\psi(y) = -\frac{c}{d} \cdot (y - d).$$

Звернемо увагу на те, що

$$g(x; y) \Big|_{y = \varphi(x)} = x \cdot \left( -\frac{d}{c} \cdot (x - c) \right) \cdot \left( dx + c \cdot \left( -\frac{d}{c} \cdot (x - c) \right) - cd \right) = 0;$$

$$g(x; y) \Big|_{x=\psi(y)} = \left( -\frac{c}{d} \cdot (y-d) \right) \cdot y \cdot \left( d \cdot \left( -\frac{c}{d} \cdot (y-d) \right) + cy - cd \right) = 0.$$

Отже,

$$WH_p \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{і} \quad WH_p \Big|_{y=\varphi(x)} = 0; \tag{14}$$

$$WH_p \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{і} \quad WH_p \Big|_{x=\psi(y)} = 0. \tag{15}$$

Доведемо, що задача мінімізації функціонала (6) є тотожною до задачі мінімізації функціоналів (13).

Відзначимо, що функціонал (6) є сумою додатних доданків, тому його мінімальне значення складається із суми мінімальних значень кожного окремого доданка, тобто задача мінімізації сліду матриці жорсткості розпадається на  $n$  незалежних задач мінімізації для кожної окремої базисної функції  $NM_p$ ,  $p = \overline{1; n}$ :

$$T_p = \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial NM_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial NM_p}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \rightarrow \min, \quad p = \overline{1; n}. \tag{16}$$

Для їх розв'язання підставимо вирази для шуканих базисних функцій  $NM_p$  (1-2) у функціонали виду (16):

$$\begin{aligned} T_p &= \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial NM_p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial NM_p}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p + \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p + \frac{\partial}{\partial y} WM_p \right)^2 \right) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p \right)^2 \right) dx dy + \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} WM_p \right)^2 \right) dx dy + \\ &+ 2 \cdot \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \cdot \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right) dx dy + 2 \cdot \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p \cdot \frac{\partial}{\partial y} WM_p \right) dx dy. \end{aligned} \tag{17}$$

Обчислимо подвійні інтеграли із двох останніх доданків формули (17) за допомогою методу інтегрування частинами.

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \cdot \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right) dx dy = \int_0^d dy \int_{x=0}^{x=\psi(y)} \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \cdot \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right) dx = \\ &= \left\| \begin{array}{l} u = \frac{\partial NS_p}{\partial x} \\ dv = \frac{\partial WM_p}{\partial x} dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} dx \\ v = WM_p \end{array} \right\| = \int_0^d \left( \frac{\partial NS_p}{\partial x} \cdot WM_p \Big|_{x=0}^{x=\psi(y)} - \int_{x=0}^{x=\psi(y)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} dx \right) dy = \\ &= \left\| \text{за формулами (15)} \right\| = \int_0^d \left( 0 - 0 - \int_{x=0}^{x=\psi(y)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} dx \right) dy = - \int_0^d \left( \int_{x=0}^{x=\psi(y)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} dx \right) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} \cdot WM_p dx dy . \\
 I_2 &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p \cdot \frac{\partial}{\partial y} WM_p \right) dx dy = \int_0^c dx \int_{y=0}^{y=\varphi(x)} \left( \frac{\partial NS_p}{\partial y} \cdot \frac{\partial WM_p}{\partial y} \right) dy = \\
 &= \left\| \begin{array}{l} u = \frac{\partial NS_p}{\partial y} \quad du = \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} dy \\ dv = \frac{\partial WM_p}{\partial y} dy \quad v = WM_p \end{array} \right\| = \int_0^c \left( \frac{\partial NS_p}{\partial y} \cdot WM_p \Big|_{y=0}^{y=\varphi(x)} - \int_{y=0}^{y=\varphi(x)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} dy \right) dx = \\
 &= \left\| \text{за формулами (14)} \right\| = \int_0^c \left( 0 - 0 - \int_{y=0}^{y=\varphi(x)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} dy \right) dx = - \int_0^c \left( \int_{y=0}^{y=\varphi(x)} WM_p \cdot \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} dy \right) dx = \\
 &= -\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} \cdot WM_p dx dy .
 \end{aligned}$$

Отже, сума подвійних інтегралів  $I_1 + I_2$  у формулі (17) набуває значення:

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 &= -\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} \cdot WM_p dx dy - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} \cdot WM_p dx dy = \\
 &= -\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 NS_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 NS_p}{\partial y^2} \right) \cdot WM_p dx dy = \iint_{\Omega} f_p \cdot WM_p dx dy .
 \end{aligned} \tag{18}$$

Таким чином, функціонали з формули (17) остаточно мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 T_p &= \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p \right)^2 \right) dx dy + \\
 &+ \iint_S \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} WM_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} WM_p \right)^2 \right) dx dy + 2 \cdot \iint_{\Omega} f_p \cdot WM_p dx dy .
 \end{aligned} \tag{19}$$

Функціонали  $T_p$  (19) і  $\Phi_p$  (13) відрізняються наявністю у виразі функціонала (13) подвійного інтеграла  $\iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} NS_p \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} NS_p \right)^2 \right) dx dy$ .

Нагадаємо, що у функціоналах  $T_p$  (19) шуканими є функції  $WM_p$ , а у функціоналах  $\Phi_p$  (13) шуканими є функції  $WH_p$ . Задачі мінімізації функціоналів розв'язуються за допомогою систем рівнянь, в яких частинні похідні від функціоналів за невідомими коефіцієнтами  $a_{i,j}^{(p)}$  функцій  $WM_p$  (або за невідомими коефіцієнтами  $b_{i,j}^{(p)}$  функцій  $WH_p$ ) дорівнюють нулю. Доданок, на який відрізняються функціонали  $T_p$  (19) і  $\Phi_p$  (13), не містить невідомих коефіцієнтів  $b_{i,j}^{(p)}$ . Отже, частинні похідні від нього

за невідомими коефіцієнтами  $b_{i,j}^{(p)}$  дорівнюють нулю. Таким чином, при розв'язанні обох задач мінімізації функціоналів  $T_p$  (19) і  $\Phi_p$  (13) ми отримуємо одну і ту саму систему лінійних алгебраїчних рівнянь (з точністю до позначень), яка має єдиний розв'язок.

Також зауважимо, що у доведенні у явному вигляді не використовуються вирази стандартних базисних функцій  $NS_p$ , тому доведення залишається в силі для СЕ серендипового типу довільного порядку у формі прямокутних трикутників.

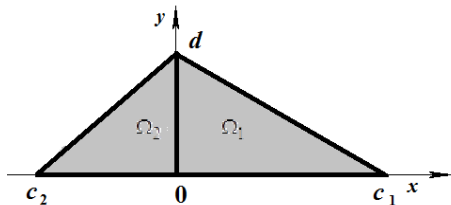


Рис. 2. СЕ у формі рівностороннього трикутника

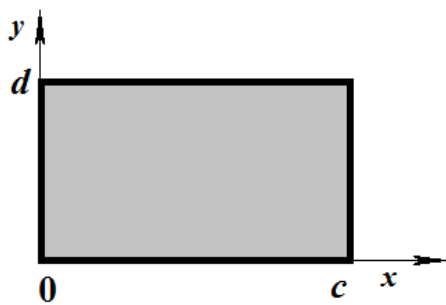


Рис. 3. СЕ у формі прямокутника

**Зауваження 1.** Оскільки подвійний інтеграл володіє властивістю адитивності відносно областей інтегрування  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  ( $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ), тому доведення може бути розповсюджене на СЕ у формі рівносторонніх трикутників, які можна подати як об'єднання двох прямокутних трикутників (рис. 2).

**Зауваження 2.** У випадку використання прямокутних скінченних елементів доведення відрізняється визначенням функцій  $g(x; y)$ ,  $\varphi(x)$  і  $\psi(y)$ . Для прямокутного СЕ ці функції дорівнюють:

$$g(x; y) = xy \cdot (x - c) \cdot (y - d);$$

$$\varphi(x) = d; \quad \psi(y) = c.$$

Виконувані у доведенні перетворення від цього не змінюються.

Таким чином нами доведено твердження.

**Твердження.** Задача побудови базису для трикутного або прямокутного СЕ довільного порядку, що складається із гармонічних функцій, які на границі скінченного елемента співпадають із стандартними базисними функціями, і задача побудови базису, при використанні якого мінімізується слід матриці жорсткості для задачі Діріхле, є еквівалентними задачами. Вони приводять до побудови одного і того самого базису.

#### Висновки та перспективи подальших досліджень.

У літературі з методу СЕ гармонічні базисні функції традиційно будують у вигляді тригонометричних рядів. Виконати доведення твердження про еквівалентність двох задач МСЕ вдається, головним чином, завдяки відмові від вказаної структури гармонічних базисних функцій і подання їх у вигляді степеневих рядів, коефіцієнти яких визначаються за методом Рітца. Суттєвою для доведення твердження є обрана авторами структура поправочних функцій, яка дозволяє виконати низку важливих перетворень. Доцільним є перенесення дослідження аналогічних задач у тривимірний простір.

#### Список використаної літератури

1. Секулович М. Метод конечных элементов / М. Секулович. — М.: Стройиздат, 1993. — 664 с.
2. Юлдашев О.И. Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации [Электронный ресурс] / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // Объединенный институт ядерных исследований. Лаборатория информационных технологий. Научный отчет 2006-2007. — Дубна: Объединенный институт ядерных исследований, 2007. — С. 317—320. — Режим доступа к отчету: [http://lit.jinr.ru/Reports/SC\\_report\\_06-07/pdfall/p317.pdf](http://lit.jinr.ru/Reports/SC_report_06-07/pdfall/p317.pdf).