

УДК 539.3

Л.А. ФИЛЬШТИНСЬКИЙ, Д.Н. НОСОВ, А.А. ЕРЕМЕНКО
Сумський державний університет, Україна**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ НОВЫХ
МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ, ОСЛАБЛЕННЫХ ТРЕЩИНАМИ**

В работе методом сингулярных интегральных уравнений рассмотрена краевая задача магнитоэластичности для плоской анизотропной среды, ослабленной трещинами достаточно произвольных конфигураций. Построено точное решение для случая произвольно ориентированной прямолинейной трещины в пластинке. Получены асимптотические представления полевых величин в окрестности вершин разрезов, с использованием которых выведены формулы для коэффициентов интенсивности механических, электрических и магнитных величин, а также потоков энергии в вершинах трещин.

Ключевые слова: магнитоэластичная (МЭУ) среда, трещина, интегральные представления полевых величин, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты интенсивности механических, электрических и магнитных величин, потоки энергии в вершинах.

Л.А. ФИЛЬШТИНСЬКИЙ, Д.М. НОСОВ, Г.А. ЕРЕМЕНКО
Сумський державний університет, Україна**КРАЙОВА ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РУЙНУВАННЯ НОВИХ МАГНИТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ
МАТЕРІАЛІВ, ПОСЛАБЛЕНИХ ТРІЩИНАМИ**

В роботі методом сингулярних інтегральних рівнянь розглянуто крайову задачу магнитоелектропружності для плоского анізотропного середовища, ослабленого тріщинами досить довільних конфігурацій. Побудовано точний розв'язок для випадку довільно орієнтованої прямолінійної тріщини в пластині. Отримані асимптотичні подання польових величин в околі вершин розривів, з використанням яких виведені формули для коефіцієнтів інтенсивності механічних, електричних і магнітних величин, а також потоків енергії в вершинах тріщин.

Ключові слова: магнитоелектропружне середовище, тріщина, інтегральні подання польових величин, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності механічних, електричних і магнітних величин, потоки енергії у вершинах.

L.A. FILSHTINSKII, D.M. NOSOV, H.A. EREMENKO
Sumy State University, Ukraine**THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF FRACTURE MECHANICS OF NEW
MAGNETOELECTROELASTIC MATERIALS WEAKENED BY CRACKS**

In the paper the boundary-value problem of magnetoelasticity for plain anisotropic medium weakened by cracks of rather arbitrary configurations is considered by the method of singular integral equations. Exact solution was constructed for the example of arbitrarily oriented rectilinear crack in the plate. The asymptotic representations of the field quantities in the vicinity of crack tips were obtained. Then using the latter formulae for intensity factors of mechanical, electrical, and magnetic magnitudes and crack tip energy fluxes were derived.

Keywords: the magnetoelastic medium, crack, integral representations of the field quantities, singular integral equations, intensity factors of mechanical electrical and magnetic values, energy fluxes in tips.

Постановка проблеми

В связи с созданием новых керамических, в частности магнитоэластичных материалов, полученных спеканием редкоземельных элементов (Terfenol-D), в начале XXI века возникло новое направление в механике – электромагнитоупругость. Полученные новые материалы обладают многими замечательными свойствами, в частности гигантской магнитострикцией, однако страдают значительным трещинообразованием в процессе эксплуатации. В связи с этим возникает необходимость в разработке механики разрушения таких материалов, ослабленных трещинами.

Рассмотрим отнесенную к декартовой системе координат Ox_1x_2 бесконечную МЭУ пластинку ослабленную трещинами $\Gamma_j (j = \overline{1, n})$. Будем считать, что Γ_j ляпуновские дуги и $(\bigcap \Gamma_j = \emptyset)$. На бесконечности зададим равномерные поля механических напряжений σ_{ij} , а также компоненты

электрической и магнитной индукций D_1, D_2 и B_1, B_2 , а на берегах трещин равномерное распирающее давление p_j (рис.1).

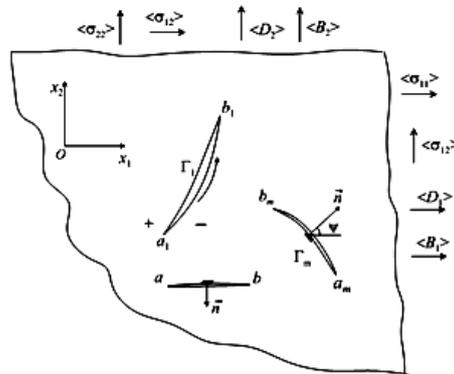


Рис. 1. Пластина с трещинами под действием равномерных физических полей на бесконечности

Задача заключается в построении алгоритма, позволяющего определить поля в пластине и характеристики разрушения в вершинах трещин.

Анализ последних исследований и публикаций

Магнитоэластопругие (МЭУ) материалы впервые были обнаружены Ван Сухтеленем (1972 г.) и Ван Раном (1974 г.), которые выяснили, что феррит-сегнетоэлектрические композиты обладают как пьезоэлектрической (ПЭ), так и пьезомагнитной (ПМ) фазами, представляя магнитоэлектрический эффект сопряжения. Далее исследования в этой области были продолжены в работах [1, 2, 3].

Изложение основного материала исследования

Постановка задачи и метод решения. Математическая модель двумерной магнитоэластопругости содержит:

- материальные уравнения [4]:

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & v_{11} & v_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & v_{12} & v_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & v_{11} & v_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & v_{12} & v_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ 2\sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; \quad (1)$$

- дифференциальные уравнения равновесия, электро- и магнитостатики [5, 6]:

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} &= 0, \\ \partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} &= 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (k=1,2); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0, \quad \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \quad \partial_1 H_2 + \partial_2 H_1 = 0; \quad (3)$$

- соотношения Коши:

$$e_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \partial_2 u_2, \quad 2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1; \quad (4)$$

- условие совместности деформаций:

$$\partial_1^2 e_{22} + \partial_2^2 e_{11} = 2\partial_1 \partial_2 e_{12}. \quad (5)$$

К этим соотношениям необходимо присоединить соответствующие механические, электрические и магнитные краевые условия на границе тела.

В (1)–(5): $s_{ij} = s_{ij}^{DB}$ – коэффициенты деформации, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей, $g_{kj} = g_{kj}^{DB}$ и $p_{kj} = p_{kj}^{DB}$ – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженности, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; $\beta_{kl} = \beta_{kl}^\sigma$, $\chi_{kl} = \chi_{kl}^\sigma$ и $\nu_{kl} = \nu_{kl}^\sigma$ – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях; $u = (u_1, u_2)$ – вектор перемещения; σ_{ij} и e_{ij} – тензоры напряжения и деформации; D_i и B_i – компоненты векторов электрической и магнитной индукции; E_i и H_i – электрическая и магнитная напряженности полей.

Комплексные представления полевых величин [7]:

$$\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} A_1(1, \mu_k) \Phi_k(z_k),$$

$$\{D_1, D_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_2(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \quad (6)$$

$$\{B_1, B_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_3(1, \mu_k) \Phi_k(z_k),$$

$$\{E_1, E_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^E \Phi_k(z_k), \quad \{H_1, H_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^H \Phi_k(z_k), \quad (7)$$

$$\{u_1, u_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{p_k, q_k\} \varphi_k(z_k),$$

$$z = x_1 + ix_2, \quad z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z,$$

где $\Phi_k(z_k)$ – аналитические функции своих комплексных переменных, характеристические числа μ_k , величины A_j , α_k^H и α_k^E , p_k , q_k заданы.

Краевая задача для магнитоэластичной пластинки с трещинами

Механические, электрические и магнитные краевые условия на берегах разреза Γ_m представим в виде.

$$X_{1n}^\pm = -p \cos \psi, \quad X_{2n}^\pm = -p \sin \psi, \quad p = \{p_m \in \Gamma_m\}, \quad D_n^\pm = D_n^{0\pm}, \quad B_n^\pm = B_n^{0\pm} \quad (8)$$

Здесь верхний знак соответствует левому берегу разреза Γ_m (при движении от его начала a_m к концу b_m), ψ – угол между положительной нормалью к левому берегу и лучом Ox_1 , X_{kn}^\pm , D_n^\pm , B_n^\pm – компоненты вектора напряжения, нормальные компоненты векторов электрической и магнитной индукций на берегах разреза.

Краевые условия представим в виде:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{jk} a_k(\psi) [\Phi_k] = [F_j^0], \quad (j = \overline{1,4}), \quad a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi,$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{jk} a_k(\psi) (\Phi_k^+ + \Phi_k^-) = (F_j^+ + F_j^-), \quad (j = \overline{1,4}), \quad (9)$$

где R_{jk} – известные комбинации материальных коэффициентов, F_j – известные правые части.

Для решения краевой задачи теории функций (9) воспользуемся обобщением формализма, разработанного одним из авторов в [8]. Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ представим в виде обобщенных интегралов типа Коши

$$\Phi_k(z_k) = C_k + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - z_k} ds, \quad (10)$$

$$\zeta_k = \operatorname{Re} \zeta + \mu_k \operatorname{Im} \zeta, \quad \omega_k(\zeta) = \{\omega_k^{(m)}(\zeta), \zeta \in \Gamma_m\}.$$

Здесь ds – элемент дуги в физической плоскости, C_k – постоянные которые должны обеспечить условия на бесконечности, ω_k определяются из краевых условий на Γ и некоторых дополнительных условий.

С использованием представлений (10) краевые условия (8) свеем к матричному сингулярному интегральному уравнению:

$$\int_{\Gamma} K(\zeta, \zeta_0) q(\zeta) ds = \pi N(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma, \quad \text{Im } q = 0, \quad (11)$$

$$K(\zeta, \zeta_0) = \text{Re} \left\{ R G(\zeta, \zeta_0) R^{-1} \right\}, \quad q(\zeta) = \{q_1(\zeta), q_2(\zeta), q_3(\zeta), q_4(\zeta)\}^T,$$

$$q = R \omega, \quad R = \|R_{jk}\|,$$

$$G(\zeta, \zeta_0) = \text{diag} \left\{ \frac{a_1(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{01}}, \frac{a_2(\psi_0)}{\zeta_2 - \zeta_{02}}, \frac{a_3(\psi_0)}{\zeta_3 - \zeta_{03}}, \frac{a_4(\psi_0)}{\zeta_4 - \zeta_{04}} \right\},$$

$$N(\zeta_0) = \left\{ -p \cos \psi_0 - N_1(\zeta_0), -p \sin \psi_0 - N_2(\zeta_0), D_n^0 - N_3(\zeta_0), B_n^0 - N_4(\zeta_0) \right\}^T,$$

$$q = (q^{(m)}, \zeta \in \Gamma_m), \quad D_n^0 = \frac{D_n^{0+} + D_n^{0-}}{2}, \quad B_n^0 = \frac{B_n^{0+} + B_n^{0-}}{2}.$$

Для замыкания решения привлечем условие однозначности перемещений электрических и магнитных потенциалов:

$$\int_{\Gamma_m} q^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad (m = \overline{1, M}). \quad (12)$$

Асимптотика решения в вершинах трещин. Используя выражения для асимптотики интеграла типа Коши в вершинах разрезов [9], находим главные асимптотики полевых величин:

$$\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} A_{11}(1, \mu_k) \Psi_k^c + 0(1),$$

$$\{D_1, D_2\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{12}(1, \mu_k) \Psi_k^c + 0(1),$$

$$\{B_1, B_2\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{13}(1, \mu_k) \Psi_k^c + 0(1), \quad (13)$$

$$\{E_1, E_2\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^E \Psi_k^c + 0(1),$$

$$\{H_1, H_2\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^H \Psi_k^c + 0(1),$$

$$\Psi_k^c = \frac{\Omega_k(\pm 1)}{\sqrt{\zeta_k'(\pm 1)}} (\cos \theta_c + \mu_k \sin \theta_c)^{-\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

где верхний знак соответствует концу трещины $c = b$, нижний – началу $c = a$.

В механике разрушения коэффициенты интенсивности механических, электрических и магнитных величин в вершинах трещин определяются формулами [1,10]:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_n), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \tau_{ns}), \quad K_D = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} D_n), \quad K_B = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} B_n). \quad (15)$$

Окончательно эти величины получаем в виде:

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \{Q_1(\pm 1) \cos \psi_c + Q_2(\pm 1) \sin \psi_c\},$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \{-Q_1(\pm 1) \sin \psi_c + Q_2(\pm 1) \cos \psi_c\}, \quad (16)$$

$$K_D = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} Q_3(\pm 1), \quad K_B = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} Q_4(\pm 1),$$

$$\text{где } Q_j = \frac{q_j(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Пример. Прямолинейная произвольно ориентированная трещина в пластинке. Получено точное решение:

$$K_I = \sqrt{\pi l} \left\{ p + \langle \sigma_{11} \rangle \cos^2 \psi + \langle \sigma_{12} \rangle \sin 2\psi + \langle \sigma_{22} \rangle \sin^2 \psi \right\},$$

$$K_{II} = \sqrt{\pi l} \left\{ \frac{\langle \sigma_{22} \rangle - \langle \sigma_{11} \rangle}{2} \sin 2\psi + \langle \sigma_{12} \rangle \cos 2\psi \right\},$$

$$K_D = \sqrt{\pi l} \left\{ \langle D_1 \rangle \cos \psi + \langle D_2 \rangle \sin \psi \right\},$$

$$K_B = \sqrt{\pi l} \left\{ \langle B_1 \rangle \cos \psi + \langle B_2 \rangle \sin \psi \right\}.$$

Поток энергии необходимый для продвижения трещины за вершину, C , на малую величину cc' вдоль касательной определяется формулой :

$$\Delta A_{\Delta l} = \frac{1}{2} \int_{cc'} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} D_j^{(0)} n_j [\varphi_i^{(E)}] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} B_j^{(0)} n_j [\varphi_i^{(H)}] ds$$

где $\sigma_{ij}^{(0)}$, $D_j^{(0)}$, $B_j^{(0)}$ определены до продвижения трещины, а $u_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(E)}$, $\varphi_i^{(H)}$ – скачки соответствующих величин на отрезке cc' .

Результаты расчетов. Рассматривалась электромагнитоупругая пластина из керамики *Terfenol-D*, поляризованная вдоль оси x_2 [6], содержащая прямолинейные трещины: $x_1 = l\beta$, $x_2 = 0$, $l = 1$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq \pi$ и $x_1 = k\beta \cos \alpha$, $x_2 = k\beta \sin \alpha + h$, $k = 0.5$, $-1 \leq \beta \leq 1$, расположенная над ней под углом α и расстоянием между центрами трещин $h = 2$.

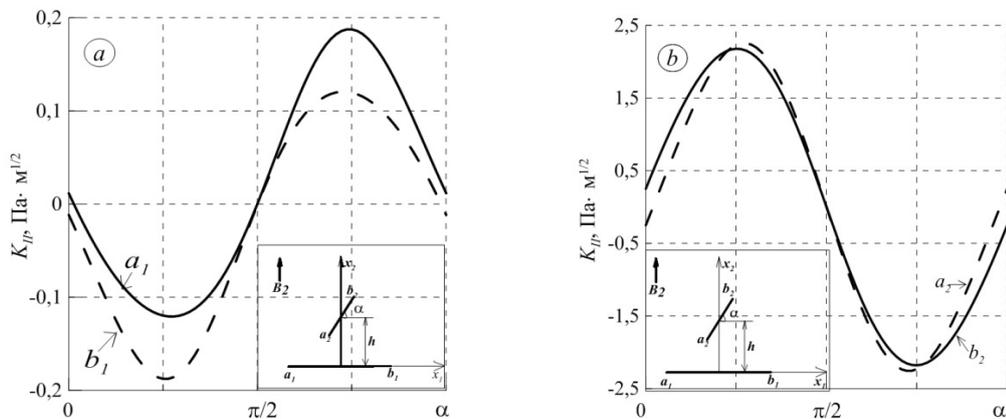


Рис. 2. K_{II} для прямолинейной трещины в зависимости от угла α , когда на бесконечности действует магнитная индукция $\langle B_2 \rangle = 1$ Тл. Сплошная линия соответствует вершине трещины a , пунктирная – вершине b .

Выводы

Из полученных результатов следует, что коэффициенты интенсивности механических напряжений могут существенно зависеть от действующих на бесконечности магнитных и электрических полей. Например, при действии на бесконечности $\langle D_2 \rangle = 1$ Кл·м⁻², K_I , из конфигураций двух трещин, где одна неподвижная горизонтальная, а вторая произвольно ориентированная прямолинейная, то для горизонтальной трещины равен 0÷80.

Список использованной литературы

1. Bao-Lin Wang, Yiu-Wing Mai. (2007). Applicability of the crack-face electromagnetic boundary conditions for fracture of magnetoelastic materials. International journal of solids and structures, 2 (44), 387-398.
2. Hua-dong Yong, You-he Zhou. (2007). Transient response of a cracked magnetoelastic strip under anti-plane impact. International Journal of Solids and Structures, 2 (44), 705-717.
3. Ke-qiang Hu, Guo-qiang Li. (2005). Electro-magneto-elastic analysis of a piezoelectromagnetic strip with a

- finite crack under longitudinal shear. *Mechanics of Materials*, 9 (37), 925-934.
4. Nan CW. (1994) Magnetoelectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases. *Phys Rev B Condens Matter*, 50(9), 6082-6088.
 5. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. — М.: Наука, 1986. — 160 с.
 6. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. — Донецк: Юго-Восток, 2011. — 232 с.
 7. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде / Л.А. Фильштинский // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1976. — № 5. — С. 91-97.
 8. Фильштинский Л.А. Плоская задача магнитоупругости для пьезомагнитной среды с трещинами / Л.А. Фильштинский, Д.Н. Носов, А.А. Еременко // Физико-химическая механика материалов. — 2015. — Т. 51. — № 2. — С. 109-115.
 9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Физматгиз, 1962. — 599 с.
 10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. — М.: Наука, 1974. — 640 с.