

УДК 539.3

Ю.С. ШУВАЛОВА

Український державний університет залізничного транспорту

Д.В. КРЮТЧЕНКО

Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України

Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА

Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ
КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКИХ РЕЗЕРВУАРАХ**

В работе предложен метод расчета свободных и вынужденных колебаний жидкости в оболочке вращения с жесткими стенками под действием силы тяжести. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение безвихревое. Метод решения основан на сведении задачи к системе сингулярных интегральных уравнений для определения потенциала скоростей. Численная реализация задачи основана на применении метода граничных элементов с применением специальных квадратур. Проведен анализ сходимости численного решения. Определены частоты и формы колебаний жидкости в жесткой цилиндрической оболочке.

Ключевые слова: свободные колебания, сила тяжести, метод граничных элементов

Ю.С. ШУВАЛОВА

Український державний університет залізничного транспорту

Д.В. КРЮТЧЕНКО

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

О.О. СТРЕЛЬНИКОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна

**ИНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ В
ЖОРСТКИХ РЕЗЕРВУАРАХ**

В роботі запропоновано метод розрахунку вільних та вимушених коливань рідини в оболонці обертання з жорсткими стінками під дією сили тяжіння. Припускається, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух є безвихоревим. Метод ґрунтується на зведенні задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь для визначення потенціалу швидкостей. Чисельна реалізація задачі використовує метод граничних елементів із застосуванням спеціальних квадратур. Проведено аналіз збіжності чисельного розв'язку. Визначені частоти і форми коливань рідини в жорсткій циліндричній оболонці.

Ключові слова: вільні коливання, сила тяжіння, метод граничних елементів

Yu. SHUVALOVA

Ukrainian State University of Railway Transport

D. KRUTCHENKO

A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems

E. STRELNIKOVA

A.N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems

V.N. Karazin Kharkiv National University

**INTEGRAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF LIQUID FREE AND FORCED VIBRATIONS IN
RIGID RESERVOIRS**

In this paper we present a method for estimating the free and forced vibrations of the liquid in a shell of revolution with rigid walls under the force of gravity. The liquid is supposed to be an ideal and incompressible one and its flow induced by vibrations of the shell is irrotational. The method is based on reduction of the problem considered to the system of singular integral equations for the velocity potential. The numerical simulation is based on the boundary element method using the special quadratures. The convergence analysis has been accomplished. The modes and frequencies of the rigid cylindrical shell were obtained.

Keywords: free vibrations, hydro –elastic interaction, finite and boundary element methods, different filling level.

Формулювання проблеми и анализ последних исследований и публикаций

Плескание можно описать как интенсивное движение свободной поверхности жидкости, находящейся в резервуаре, под действием внезапно приложенной нагрузки.

В работе [1] приведена классификация колебаний свободной поверхности жидкости в резервуарах. Выделяются три формы плесканий, а именно: а) поперечные плескания, б) вертикальные плескания, в) плескания при вращении. Плескание – это феномен, который проявляется при использовании емкостей в широком диапазоне промышленного применения: в контейнерах для хранения сжиженного газа, топливных баках ракет и самолетов, в резервуарах грузовых танкеров. Известно, что именно частично заполненные резервуары испытывают действие наиболее интенсивных плесканий, когда возникает высокое давление на стенки резервуара, что может привести к разрушению конструкции или потере устойчивости. Первые научные работы в этом направлении появились в 1960-х годах и были посвящены изучению плесканий жидкого топлива в баках ракетополетов. Очевидно, что характер поведения жидкости в топливном баке существенно влияет на динамику полета. Это стимулировало интерес к проблеме плесканий в начале 60-х годов прошлого столетия, особенно после начала космических программ СССР и NASA (Gemini and Apollo programs). К этим исследованиям относятся работы [2–3]. Анализ современных исследований, посвященных проблемам плескания жидкости в резервуарах, проведен в обзорах Р.А. Ибрагима [4–5].

В большинстве работ изучаются свободные колебания жидкости в плоской или осесимметричной постановках. Данная статья посвящена изучению свободных и вынужденных колебаний жидкости в произвольных резервуарах, имеющих вид оболочки вращения.

Постановка задачи и формулирование цели исследования

Рассматривается задача о колебаниях жидкости в жесткой оболочке вращения. Обозначим смоченную поверхность оболочки через S_1 , а свободную поверхность – S_0 . Пусть декартова система координат $Oxyz$ связана с оболочкой, свободная поверхность жидкости S_0 совпадает с плоскостью xOy в состоянии покоя. Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение, начавшееся из состояния покоя, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей жидкости Φ , удовлетворяющий уравнению Лапласа. Величину давления p на стенки оболочки определим из линеаризованного интеграла Коши–Лагранжа по формуле [6]:

$$p = -\rho_l \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz + a_s(t)x \right) + p_0,$$

в которой g – ускорение свободного падения, z – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении, ρ_l – плотность жидкости, p_0 – атмосферное давление, $a_s(t)$ – сейсмическое ускорение, x – горизонтальная координата точки жидкости.

На свободной поверхности жидкости потребуем выполнения следующих условий:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0,$$

где функция $\zeta(x, y, t)$ описывает форму и положение свободной поверхности.

Таким образом, для потенциала скоростей имеем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2 \Phi = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right|_{S_0} = 0.$$

Требуется определить неизвестные функции ζ и Φ . Это позволит изучить изменение уровня заполнения как функцию времени в различных точках свободной поверхности. Полученные данные дадут возможность оценить вероятность выплескивания опасного заполнителя при действии импульсных и сейсмических нагрузок.

Изложение основного материала исследования

Метод решения. Представим потенциал Φ в виде:

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k \varphi_k. \tag{1}$$

Для функций φ_k имеем следующие краевые задачи:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0. \tag{3}$$

Продифференцируем второе из соотношений (3) по t и подставим в полученное равенство выражение для $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$. Далее представим функции φ_k в виде $\varphi_k(t, x, y, z) = e^{ix_k t} \varphi_k(x, y, z)$. Приходим к проблеме собственных значений, при этом на свободной поверхности будет выполнено равенство:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k. \tag{4}$$

Для уравнения свободной поверхности получим выражение:

$$\zeta = \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}. \tag{5}$$

В цилиндрической системе координат искомые базисные функции допускают представления:

$$\varphi_k(r, z, \theta) = \varphi_k(r, z) \cos \alpha \theta. \tag{6}$$

Здесь α – номер гармоники. Таким образом, отдельно рассматриваются частоты и формы свободных колебаний для различных α .

Действуя аналогично [7], приходим к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_1; \\ \int_{\Gamma} \varphi(z) Q(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma_1; P_0 \in S_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_{\alpha}(k) - F_{\alpha}(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_{\alpha}(k) n_z \right\}; \\ \Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_{\alpha}(k). \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} E_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} (1 - 4\alpha^2)^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad F_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \\ a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2rr_0, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}. \end{aligned}$$

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (7) осуществлено методом граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности [6, 7]. Отметим, что ядра в интегральных операторах (7) имеют логарифмическую особенность. Для вычисления таких интегралов неприменимы стандартные квадратурные формулы, поскольку подынтегральные функции резко меняются внутри элемента. Для их вычисления в данной работе применен метод, описанный в [8].

Численные результаты. Рассмотрена задача о собственных колебаниях жидкости в жесткой цилиндрической оболочке – коническом баке. Параметры оболочки принимались следующими: радиус оболочки $R = 1$ м, уровень заполнения жидкостью $H = 1$ м. Аналитические значения собственных частоты и формы колебаний жидкости определяются формулами, полученными в [5]. Численно собственные частоты колебаний жидкости χ^2/g в цилиндрической оболочке определены по методике, описанной выше. Здесь рассмотрены неосесимметричные колебания, соответствующие параметру $\alpha = 1$ в формуле (6).

На рис. 1 изображены три первые формы свободных колебаний жидкости в жесткой цилиндрической оболочке.

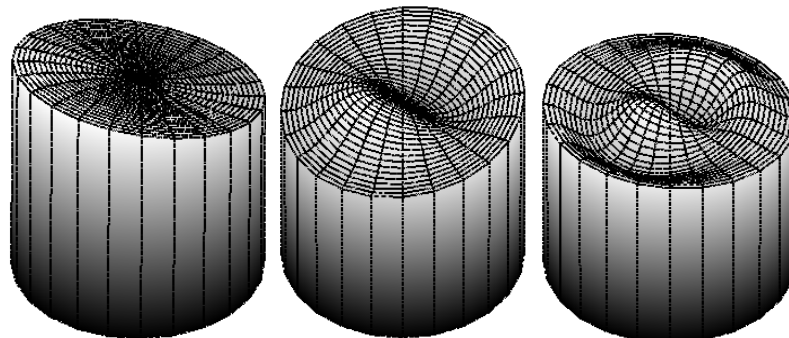


Рис. 1. Формы колебаний жидкости в цилиндрической оболочке, $\alpha = 1$

В табл. 1 приведено сопоставление частот колебаний жидкости в цилиндрической оболочке, полученных численно методом граничных элементов (МГЭ) с постоянной аппроксимацией плотности [6] и методом граничных элементов с разбиением на подобласти [9] с аналитическим решением [5].

При использовании метода [6] меридиан оболочки разбивался на 120 граничных элементов (ГЭ), днище – также на 120 ГЭ, радиус свободной поверхности – на 100 ГЭ. При использовании метода [9] расчетная область делилась на две подобласти, каждая из которых содержала по 260 ГЭ. В обоих вариантах МГЭ использовались граничные элементы с постоянной аппроксимацией плотности. Дальнейшее увеличение числа элементов не приводило к существенному изменению результатов.

Таблица 1

Аналитические и численные значения частот колебаний жидкости

Номер гармоники	Метод решения	Номер частоты				
		<i>n</i> =1	<i>n</i> =2	<i>n</i> =3	<i>n</i> =4	<i>n</i> =5
$\alpha=1$	[6]	1.657	5.332	8.538	11.709	14.868
	[9]	1.657	5.332	8.540	11.711	14.889
	[5]	1.657	5.329	8.536	11.706	14.864

Оба варианта метода граничных элементов показывают практически одинаковую точность, но при использовании метода граничных элементов с разбиением на подобласти матрица разрешающей системы уравнений имеет меньшую размерность. На рис. 2 представлены аналитические и численные данные для первых трех форм колебаний жидкости при $\alpha=1$. Цифры 1, 2, 3 отвечают первой, второй и третьей формам. Сплошными линиями показаны аналитические решения, точками, квадратиками и кружочками помечены численные результаты.

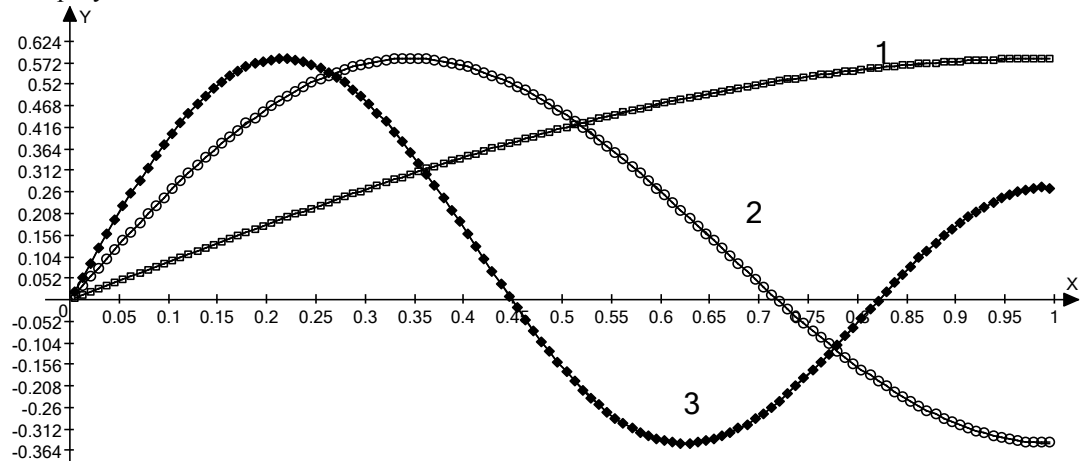


Рис. 2. Сравнение аналитических и численных данных для собственных форм колебаний

Полученные результаты позволили рассмотреть задачу о вынужденных колебаниях жидкости в цилиндрической оболочке под действием сейсмической нагрузки.

Рассматривалась сейсмическая нагрузка, которая описывается функцией:

$$a_s(t) = 0.02 \sin(\pi / 5) \cos(2\pi t), \quad 0 \leq t \leq 5$$

$$a_s(t) = 0, \quad t \geq 5$$

График этой функции показан на рис. 3а).

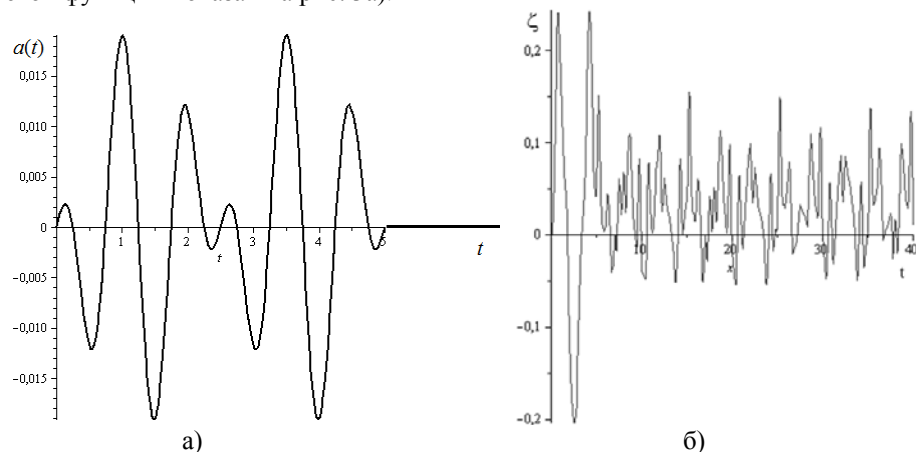


Рис. 3. Сейсмическая нагрузка и уровень подъема свободной поверхности.

Для определения неизвестных функций ζ и Φ в случае действия вынуждающей силы имеем следующее дифференциальное соотношение:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz + a_s(t)x = \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k \varphi_k + g \sum_{k=1}^M d_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} + a_s(t)x = 0. \quad (8)$$

Поскольку $x = \rho \cos \theta$, то для решения задачи в линейном приближении достаточно рассматривать только собственные формы, отвечающие первой гармонике. Воспользовавшись ортогональностью собственных форм колебаний жидкости в цилиндрическом резервуаре и граничным условием на свободной поверхности (4), получим после скалярного произведения соотношения (8) на φ_m ($m = 1, \dots, M$) следующую систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{d}_m(t) + \chi_m^2 d_m(t) + a_s(t) \int_0^R \rho \varphi_m(\rho, H) d\rho = 0, \quad m = 1, \dots, M$$

Данная система дифференциальных уравнений была решена операционным методом. На рис. 3 б) приведен график изменения уровня подъема свободной поверхности в ее центральной точке в зависимости от времени на интервале $[0, 40]$.

Выводы

Построена математическая модель и разработаны теоретические основы численного метода анализа свободных и вынужденных колебаний жидкости в жестком резервуаре, имеющем форму оболочки вращения. Метод основан на применении интегральных уравнений для определения потенциала скоростей жидкости. При численной реализации использован метод граничных элементов. В дальнейшем предполагается обобщение результатов на случай резервуаров с упругими стенками.

Список использованной литературы

1. Olsen H. What is sloshing? / H. Olsen // Seminar on Liquid Sloshing. — Det Norske Veritas, 1976.
2. Abramson H.N. Liquid sloshing in spherical tanks / H.N. Abramson // AIAA/ — 1963. — J. 1. — P. 384—389.
3. Abramson H.N. Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers / H.N. Abramson // Applied Mechanics Reviews. — 1963. — I. 16. — P. 501—506.
4. Ibrahim R.A. Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics. / R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuck, T. Ikeda // Applied Mechanics Reviews. — 2001. — Vol. 54. — № 2. — P. 133—199.
5. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. — New York: Cambridge University Press, 2005. — 948 p.
6. Gnitko V. Forced vibrations of tanks partially filled with liquid under seismic load / V. Gnitko, U. Marchenko, V. Naumenko, E. Strelnikova // Proc. of XXXIII Conference "Boundary elements and other mesh reduction methods" (New Forest, UK, 28-30 June 2011). — Ashurst Lodge: WIT Press, 2011. — Vol. 52. WIT Transactions on Modeling and Simulation. — P. 285—296.
7. Глушич П.А. Собственные колебания жидкости в жестких оболочках вращения / П.А. Глушич, В.И. Гнитко, В.В. Науменко, Е.А. Стрельникова // Вестник Херсонского Национального технического университета. — 2015. — №3(54). — С. 103—107.
8. Naumenko V.V. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods / V.V. Naumenko, H.A. Strelnikova // Engineering analysis with boundary elements. — 2002. — №26. — PP. 95—98.
9. Gnitko V. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles / Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. // Journal of Basic and Applied Research International. — 2016. — №17(1) — PP.75-87