УДК 513.88: 517.948.3

Г.С. ПОЛЕТАЕВ
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ - I

Рассмотрено существование и связь между решениями абстрактных парных интегральных уравнений типа свёртки с произвольной и равной дельта-функции Дирака правыми частями. При сделанных предположениях сформулирована теорема – критерий с необходимым и достаточным условием такой связи. Процедура свободна от аппарата теории интеграла типа Коши, гёльдеровости функций.

Ключевые слова: интеграл, уравнение, парное, свёртка, банахова, алгебра, факторизация, проектор.

Г.С. ПОЛЄТАЄВ
Одеська державна академія будівництва та архітектури

НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВА ЗВ'ЯЗКУ РІШЕНЬ ПАРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ ЗГОРТКИ - I

Розглянуте існування та зв'язок між рішеннями абстрактних парних інтегральних рівнянь типу згортки з довільною та тією, що дорівнює дельта функції Дірака, правими частинами. При деяких припущеннях, сформульовано теорема – критерій з необхідною та достатньою умовою такого зв'язку. Процедура вільна від апарату теорії інтеграла типу Коші, умови Гельдера.

Ключові слова: інтеграл, рівняння, парне, згортка, банахова, алгебра, факторизація, проектор.

G.S. POLETAEV
Odessa State Academy of Buildings and Architecture

A NECESSARY AND SAFFICIENT CONDITION FOR CONNECTION SOLUTIONS PAIRED INTEGRAL EQUATIONS OF CONVOLUTION TYPE - I

The connection between the solutions of the abstract convolution type paired integral equations is considered. Right-hand side of the equations can be arbitrary and equal Dirac's delta-function. The theorem - criterion for such a connection is formulated.Procedure is a free from the theory of Cauchy integral, Holder requirements.

Keywords: integral, equation, paired, convolution, Banach, algebra, factorization, projection.

Актуальность, постановка проблемы

Известна важная роль теории интегральных уравнений типа свёртки, в частности, парных, с ядрами от разности аргументов, а также круга проблем, связанных с их исследованием, для фундаментальных теоретических и прикладных вопросов. В том числе, в математике, механике, теории некоторых видов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, теории упругости, в расчётах строительных элементов, в математической и теоретической физике [1-14]. Общие элементы этой тематики связываются положениями строящейся автором теории уравнений в кольцах с факторизационными парами. Решение такого рода уравнений и смежных задач, в существенном, сопряжено с необходимостью преодоления серьёзных аналитических барьеров. Выяснением самого факта существования решений, разработкой неизвестных, при соответствующих предположениях, подходов к решению и исследованию. Поэтому получение новых общих результатов о разрешимости таких уравнений, возможных путях построения решений, формул их представления через известные величины, изучение свойств решений, возможных связей между решениями является актуальной задачей. Актуальна и разработка элементов точных методов, минимально опирающихся на теорию функций комплексного переменного и на теорию интеграла Фурье. Причём, свободных от аппарата теории интеграла типа Коши, требования гёльдеровости функций.

Анализ исследований и публикаций.

В рассматриваемом виде, изучаемые ниже обобщённые парные уравнения, при сделанных ниже предположениях, впервые, появились в работах автора. Они охватывают известные парные интегральные уравнения типа свёртки [1-4, 6, 10, 12-18]. Наиболее полная теория последних, в случае порождающих ядра функций $k_{1,2}(t) \in L_1(-\infty,\infty)$, в целом классе E банаховых пространств построена в [4]. В близкой к рассматриваемой в [12] и ниже постановке, но в других пространствах, эти парные интегральные уравнения изучались Черским Ю.И.; Черским Ю.И. и Гаховым Ф.Д. (1954, 1956; см. также [6]) при дополнительных ограничениях типа гёльдеровости функций. В этих исследованиях использован аппарат задачи Римана - Гильберта, на связь с которой впервые указал И.М. Рапопорт [1]. Наряду с этим, при изучении условия разрешимости некоторых видов уравнений разных классов, можно обнаружить существование свойства связи между решениями. При весьма общих предположениях, для них оказывается возможным, зная специальные решения, построить решения, соответствующие произвольной правой части. Это имеет место для ряда известных и новых классов уравнений. В том числе, важных при моделировании теоретических и прикладных задач [12 -18, 21]. Например, обнаруживается связь между решениями, соответствующими произвольной и равной единице кольца (функций, матриц или абстрактных элементов, в котором отыскивается решение) правым частям. Для парных уравнений, в том числе типа свёртки, до работ автора вопросы связи решений оставались не поставленными в общей форме и, в достаточно полном объёме, не были разрешены. База результатов установлена в [12]. Она связана с работами [1, 2, 4] - предшествующими составляющими замечательной истории исследования парных интегральных уравнений типа свёртки. В этих, а также иных работах, имеются и фрагменты историко-мотивационного характера [6].

Цель статьи

Целью статьи - первой части сообщения является формулировка теоремы - критерия связи решений абстрактных обобщённых парных интегральных уравнений типа свёртки относительно неизвестной функции φ(t) вида:

$$\begin{cases} \varphi(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)ds = \alpha\delta + f(t), \ t<0; \\ \varphi(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)ds = \beta\delta + g(t), \ t>0. \end{cases} \tag{1}$$

Уравнения (1) при α=β=0; $\alpha, \beta \in C$ являются известными парными интегральными уравнениями типа свёртки [1, 2, 4, 6, 10, 12, 13]. Предполагается, что: $k_1(t), k_2(t)\exp\{ct\} \in L_1(-\infty,\infty); c \in \mathbf{R}, c \geq 0;$

$$[1-K_1(\lambda)][1-K_2(\lambda - ic)] \neq 0, -\infty<\lambda<\infty; K_j(\zeta) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_j(\zeta)e^{i\zeta t}dt; \ j=1,2.$$

Основной материал и результаты

Следуя [12], напомним используемые далее обозначения и положения. Для любой функции $k(t), -\infty<t<\infty,$ положим: $k_{\mp}(t) = k(t), \mp t \geq 0, \ k_{\mp}(t) = 0, \pm t < 0.$ Символом $L_{(c)} = L_{(c)}(-\infty,\infty),$ $c \in \mathbf{R},$ будем обозначать банахову алгебру всех комплекснозначных измеримых функций $k(t), -\infty<t<\infty,$ таких, что $e^{ct}k(t) \in L_1(-\infty,\infty) \equiv L.$ Норма в $L_{\langle c\rangle}$ вводится по формуле: $\|k\|_{L_{\langle c\rangle}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |k(t)| e^{ct}dt \prec \infty; \ k \in L_{\langle c\rangle}$, а роль умножения играет свертка. Она обозначается символом $*$.

Если a и b два любых вещественных числа, то через $L_{a\cap b}$ обозначим пересечение $L_{\langle a\rangle}$ и $L_{\langle b\rangle}$: $L_{a\cap b} := L_{\langle a\rangle} \cap L_{\langle b\rangle}$. Устанавливается, что $L_{a\cap b}$ - банахова алгебра относительно нормы: $\|k\|_{L_{a\cap b}} := \|k_+\|_{L_{(\max(a,b))}} + \|k_-\|_{L_{(\min(a,b))}}$ и свертки в качестве умножения при обычном смысле сходимости интегралов. Через $L^{\mp}, L^{\mp}_{(c)}, L^{\mp}_{a\cap b}$ обозначим подалгебры функций из $L, L_{(c)}, L_{(a\cap b)},$ соответственно, которые обращаются в нуль при $\pm t > 0.$

Пусть $\delta(=\delta(t))$ формальный элемент (δ- функция Дирака [2]) такой, что $\delta*\delta=\delta, \delta*k = k*\delta = k, \ k \in L^{+}_{(-|c|)} \oplus L^{-}_{(|c|)},$ а A - любая из алгебр $L, L^{\mp}, L_{(c)}, L^{\pm}_{(c)}, L_{a\cap b}, L^{\mp}_{a\cap b}.$ Элемент δ играет роль мультипликативной единицы алгебры $A,$ при этом $\delta \notin A.$ Формальным присоединением этой единицы к A, образуем банахову алгебру $\tilde{A}.$ Норма в $\tilde{A}$ вводится по формуле: $\|g\|_{\tilde{A}} = |\alpha| + \|g\|_A, g = \alpha\delta + k; \alpha \in \mathbf{C}, k \in A.$ Алгебра $\tilde{L}(-\tilde{L}_{\langle c\rangle})$ не имеет радикала и, следовательно, изоморфна некоторому кольцу непрерывных функций [19, 12]. Поэтому элементы рассматриваемых множеств часто будем называть функциями. Обратный для обратимого в $\tilde{A}$ элемента $g \in \tilde{A}$ будем обозначать

g'. Возможен случай, когда элемент $g \in \tilde{A}$, обратимый в $\tilde{A}$ или нет, имеет обратный в некоторой другой алгебре. Тогда, чтобы уточнить, какой именно обратный для g рассматривается, будем применять индексы, ассоциированные с алгеброй, содержащей этой обратный. Например, для $g^+ \in \tilde{L}^+_{0\cap c}$ символ $\left[g^+\right]'_{0\cap c}$ обозначает обратный, принадлежащий $\tilde{L}_{0\cap c}$.

Введем коммутирующие проекторы, $p^{\mp} : \tilde{L}^+_{(-|c|)} + \tilde{L}^-_{(|c|)} \to \tilde{L}^{\mp}_{(\pm|c|)}$, действующие по формуле: $p^{\mp}(\alpha\delta + k) = \alpha\delta + k_{\mp}, \alpha \in \mathbf{C},\ k \in (L^+_{\langle -|c|\rangle} \oplus L^-_{\langle |c|\rangle})$, а также проекторы $p^0 = p^+p^-\left(= p^-p^+\right)$, $p_{\pm} = p^{\pm} - p^0$, $p_* = p_+ + p_-$. Ради краткости полагаем [20]: $x^+ := p^+x$, $x^- := p^-x$, $x^0 := p^0x$; $x_{\pm} := p_{\pm}x$, $\left(x \in (\tilde{L}^+_{\langle -|\hbar|\rangle} \oplus \tilde{L}^-_{\langle |\hbar|\rangle})\right)$. Для любой функции $h = \alpha\delta + k, k \in A$, положим, $h^{\mp} = p^{\mp}h$. Очевидно, $h^{\mp} = \alpha\delta + k_{\mp}$. Если $k \in A$, то через $K(\zeta)$ будем обозначать интеграл, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{i\zeta t}dt$, рассматриваемый при тех ζ, , для которых он существует.

Обратимость и факторизация элементов в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$. Следующие утверждения вытекают из общих результатов [19, см.2;12] о кольцах абсолютно интегрируемых функций с весом.

Вариант теоремы Винера в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$. Для обратимости в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ элемента $\alpha\delta + k, \alpha \in \mathbf{C}, k \in L_{\langle c\rangle}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $\alpha[\alpha + K(\zeta)] \neq 0, \operatorname{Im}\zeta = -c;\ -\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty$.

Вариант теоремы Винера в $\tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}$. Для обратимости в $\tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}$ элемента $\alpha\delta + k_{\mp}, \alpha \in \mathbf{C},\ k_{\mp} \in L^{\mp}_{\langle c\rangle}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $\alpha[\alpha + K_{\mp}(\zeta)] \neq 0, \mp\operatorname{Im}\zeta \geq \pm c;$ $-\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty$.

Пусть $g = \alpha\delta + k, \alpha \in \mathbf{C}, k \in L_{a\cap b}$ такова, что при некотором $c \in [a,b]$ выполняется условие $\alpha[\alpha + K(\lambda - ic)] \neq 0, -\infty < \lambda < \infty$. Тогда, индексом g, как элемента $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ (кратко $\chi[g,c]$ либо $\operatorname{ind}[g]_c$) назовем число, равное индексу функции $\alpha + K(\lambda - ic)$ переменной λ вдоль сомкнутой вещественной оси $\{-\infty, \infty\}$, получающейся из $[-\infty, \infty]$ отождествлением концов [2], т.е.

$\chi[g,c] := \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d_{\lambda}[\arg\{\alpha + K(\lambda - ic)\}]$. В частности, если $g = \delta - k, k \in L$, и

$$1 - K(\lambda) \neq 0, -\infty < \lambda < \infty, \quad \text{то} \quad \chi[g,0] := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d_{\lambda}[\arg\{1 - K(\lambda)\}].$$

Под факторизацией функции $g = \delta - k, k \in L_{(c)}$, в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ будем понимать представление её в виде:

$$g = [\delta + \gamma_+] * [\delta + \gamma_-],\ \gamma_{\mp} \in L^{\mp}_{\langle c\rangle}. \tag{2}$$

Эту факторизацию назовем «правильной в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$», если хотя бы один из $\pm$ факторов $\delta + \gamma_{\mp}$ обратим в своей подалгебре $\tilde{L}^{\mp}_{\langle c\rangle}$. Если оба фактора таковы, то (2) назовем «канонической в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$» факторизацией.

Учитывая, что банахова алгебра $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$ – полупростая, можно обнаружить, что, в силу изоморфизма соответствующих колец, из факторизационных теорем М.Г. Крейна ([2], § 2]), непосредственно, вытекают следующие факторизационные теоремы в $\tilde{L}_{\langle c\rangle}$.

Теорема 1 [12]. Для того, чтобы функция $g=\delta-k$ $(k\in L_{\langle c\rangle}, c\in\mathbf{R})$ допускала каноническую в $\widetilde{L}_{\langle c\rangle}$ факторизацию (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$1-K(\zeta)\neq 0 \ \ (\operatorname{Im}\zeta=-c; \quad -\infty<\operatorname{Re}\zeta<\infty). \ \chi[g,c]=0.$$

Если функция g допускает каноническую в $\widetilde{L}_{\langle c\rangle}$ факторизацию, то последняя является для неё единственной правильной в $\widetilde{L}_{\langle c\rangle}$ факторизацией.

Теорема 2 [12]. Пусть для функции $g=\delta-k$ $(k\in L_{\langle c\rangle}, c\in\mathbf{R})$ выполнены условия:

$$1-K(\zeta)\neq 0 \ \ (\operatorname{Im}\zeta=-c; \quad -\infty<\operatorname{Re}\zeta<\infty), \ \chi[g,c]\neq 0.$$

Если, при этом, $\chi[g,c]>0$ ($\chi[g,c]<0$), то, как бы ни были выбраны различные точки $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ ($m\leq$|æ$[g,c]$|) внутри верхней полуплоскости $\prod[-c,\infty]$ (нижней полуплоскости $\prod[-c,-\infty]$) и натуральные числа $p_1,\ldots,p_m$ такие, что $\sum_{i=1}^{m}p_i=|\chi[g,c]|$, будет существовать единственная правильная в $\widetilde{L}_{\langle c\rangle}$ факторизация (2), при которой функция

$$1+\Gamma_+(\zeta)=\left(1+\int_0^\infty\gamma_+(t)e^{i\zeta t}dt\right), \ \left(1+\Gamma_-(\zeta)=\left(1+\int_{-\infty}^0\gamma_-(t)e^{i\zeta t}dt\right)\right)$$

будет иметь внутри верхней полуплоскости $\prod[-c,\infty]$ (нижней полуплоскости $\prod[-c,-\infty]$) своими нулями кратностей $p_1,\ldots,p_m$ точки $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ и никаких других нулей иметь не будет. Указанными факторизациями исчерпываются все правильные в $\widetilde{L}_{\langle c\rangle}$ факторизации функции g в $\widetilde{L}_{\langle c\rangle}$.

Необходимое и достаточное условие - критерий связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки. Используя подготовленную базу, сформулируем условия и приведём формулы связи решений парных интегральных уравнений (1) с произвольной и равной $\delta(t)$ правыми частями, при сделанных предположениях, непосредственно.

Теорема 3. Пусть $k_1(t), k_2(t)\exp(ct)\in L_1(-\infty,+\infty); c\geq 0$, т.е. $k_1\in L,\ k_2\in L_{<c>};\ c\geq 0$, и выполнено условие:

$$[1-K_1(\lambda)]\cdot[1-K_2(\lambda-ic)]\neq 0, \ \ -\infty<\lambda<+\infty, \tag{3}$$

а парное интегральное уравнение с (1) с правой частью равной δ (т.е. при αδ=βδ=δ; $f(t)=g(t)=0$) имеет решение $\varphi_\delta\in\widetilde{L}_{0\cap c}$, причём, $\varphi_\delta\equiv\varphi_\delta(t)=\delta+x_1$; $x_1(t)\in L_{0\cap c}$ и

$$\left[1+X_1(\lambda)\right]\bullet\left[1+X_1(\lambda-ic)\neq 0, \quad -\infty<\lambda<+\infty. \tag{4}$$

Тогда для существования решений $\varphi(t)\in\widetilde{L}_{0\cap c}$ парного интегрального уравнения (1) с произвольной из всевозможных правых частей αδ+$f(t)$, -∞<t<0; βδ+$g(t)$, 0<t<∞; где α,β∈C; $f,g\in L_{o\cap c}$, c≥0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\alpha = \beta. \tag{5}$$

При его выполнении, решение $\varphi(t)\in\widetilde{L}_{0\cap c}$ обобщённого парного интегрального уравнения типа свёртки (1) с произвольной правой частью αδ+ $f(t)$, -∞<t<0; αδ+g(t), 0<t<∞; α∈C; f,g∈$L_{0\cap c}$; $c\geq 0$ в $\widetilde{L}_{0\cap c}$ можно определить по формуле:

$$\varphi(t)=\varphi_\delta*\{p_-([\varphi_\delta]_0'*[\delta+k_1^1]*[\alpha\delta+f_-])+p^+([\varphi_\delta]_c'*[\delta+k_2^1]*[\alpha\delta+g_+])\}(t), \qquad (6)$$

где $\left[\varphi_\delta\right]_0^{'},\delta+k_1^1\left(:=\left[\delta-k_1\right]_0^{'}\right)\in\tilde{L};\ \left[\varphi_\delta\right]_c^{'},\delta+k_2^1\left(:=\left[\delta-k_2\right]_c^{'}\right)\in\tilde{L}_{<c>}$ - обратные в $\tilde{L},\ \tilde{L}_{<c>}$, для решения $\varphi_\delta\in\tilde{L}\cap\tilde{L}_{<c>}$ и для коэффициентов $\left[\delta-k_1(t)\right]\in\tilde{L},\ \ \left[\delta-k_2(t)\right]\in\tilde{L}_{<c>},c\ge 0$ уравнения (1) (трактуемого как реализация абстрактного парного уравнения в кольце с факторизационной парой [15]).

Результаты о парных интегральных уравнениях освещались автором, в частности, в рамках Международной конференции имени академика М. Кравчука в Киеве, КПИ-2010, 2012, а также Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», в Москве, МГТУ-2013.

Выводы и перспективы

Имеются важные положения исследований по теории интегральных уравнений типа свёртки, которые можно получать единым подходом. При нём, среди прочих, используются элементы строящейся теории уравнений в кольцах с факторизационными парами. Впервые, по сравнению с известными до работ автора элементами теории парных интегральных уравнений типа свёртки, удаётся, не опираясь на теорию задачи Римана, сократить использование преобразований Фурье, снять условие гёльдеровости функций, охарактеризовать разрешимость уравнений и связь решений соответствующих произвольным и специальным правым частям. При весьма общих условиях, без требований гёльдеровости функций, сформулирована теорема с, необходимым и достаточным, условием (- критерием) связи их решений, соответствующих произвольной и равной присоединенной единице, исходных банаховых алгебр, правым частям. Доказательство теоремы будет приведено в продолжении этой статьи. Продолжение под названием «Необходимое и достаточное условие связи решений парных интегральных уравнений типа свёртки – II» представляется для опубликования одновременно. При установлении вида формулы связи существенно использовались варианты теоремы Н. Винера и факторизационных теорем [2, 4, 12 – 14, 19, 20]. В статье–продолжении приведены также пример и дополнительные общие замечания, выводы, перспективы.

Список использованной литературы

1. Рапопорт И.М. О некоторых «парных» интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях // Сборник трудов института математики АН УССР. - Киев: Институт математики АН УССР. -1949. -12. - С. 102-118.
2. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / М.Г. Крейн // Успехи мат. наук. — 1958. — № 13, Вып. 5(83). — С. 3—120.
3. Попов Г.Я. О спаренных интегро-дифференциальных уравнениях изгиба лежащей на упругом основании неограниченной плиты кусочн-постоянной жесткости// Изв. высш. учебн. завед., Матем. - №1, 1957. – С. 195-209.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. О парном интегральном уравнении и его транспонированном I // Теорет. и прикл. математика. – Изд.-во Львовского ун.-та, 1958. - Вып. 1. - С. 58-81.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Наука, 1968. — 512 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1963. — 640 с.
7. Попов Г.Я. Метод факторизации и его численная реализация. Учебное пособие / Г.Я. Попов, П.В. Керекеша, В.Е. Круглов; под ред. проф. Г.Я. Попова. — Одесса: Одесский гос. университет, 1976. — 82 с.
8. Учебное пособие. Редактор: проф. Попов Г.Я. - Одесса: Одесский гос. университет, 1976. - 82 с.
9. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г.Я. Попов. — Киев-Одесса: ВШ, 1982. —168 с.
10. Мхитарян С.М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учётом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях / С.М. Мхитарян // Изв. АН Армянской ССР. Серия: Механика. — 1968. — № XXI. — №5—6. — С. 3—20.
11. Черский Ю.И. Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. — Одесса: Астропринт, 2010. — 552 с.
12. Акопян В.Н. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом / В.Н. Акопян, Л.Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тезисы докладов международной научной конференции (Одесса, 2013 г.). — Одесса, 2013. — С. 12.
13. Полетаев Г.С. Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр // Укр. матем. журн. — 1991. — 43, № 6. — С. 803—813.
14. Полетаев Г.С. Парні рівняння типу згортки з ядрами з різних банахових алгебр абсолютно інтегрованих з вагою функцій// НАУКОВІ ВІСТІ Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – №4(24) , 2002. - С. 143-148.

15. Полетаев Г.С. Парные уравнения типа свёртки с ядрами из разных банаховых алгебр абсолютно интегрируемых по весу функций// Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 16 – 19 травня 2002 р., Київ. Матеріали конференції. – Київ, 2002. - С. 349.
16. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой // Укр. матем. журн. — 1991. — 43, № 9. — С. 1201—1213.
17. Poletaev G.S. Connection of solutions of the abstract paired equations in the rings with factorization pairs// Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 191. - 2009. - P. 479 - 484.
18. Полетаев Г.С. Критерий связи решений абстракт. парного уравнения в кольце с факторизационной парой// XIII МНК ім. акад. М. Кравчука.- НТУУ (КПІ) травень 2010 р., Київ. Матеріали конф. – Київ, 2010. - С.-220.
19. Полетаев Г.С. Связь решений парных интегральных уравнений типа свёртки// XIY МНК ім. академіка М. Кравчука. - НТУУ (КПІ) квітень 2012 р., Київ. Матеріали конференції II. – Київ, 2012. - С.-193.
20. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. Коммутативные нормир. кольца. - М.: Физматгиз, 1960. — 316 с.
21. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators - I: Algebraic Theory and Examples// J. Funct. Anal. - 1972. - Vol. 9, №3. - P. 262-295.
22. Полетаев Г.С. Критерий связи решений парных матричных уравнений с проекторами// ВІСНИК ОДАБА. – Одеса, 2013. – вип. 50, ч. 1. – С. 229 - 244.