УДК 514.18

О.М. ГУМЕН
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"
С.Є. ЛЯСКОВСЬКА
Національний університет "Львівська політехніка"
Є.В. МАРТИН
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

БАГАТОВИМІРНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

Розглядаються задачі науки і техніки, для розв'язування яких використовується інструментарій прикладної багатовимірної геометрії із залученням багатовидів n-вимірних евклідових просторів. Представлений метод показано на прикладі створення моделі залежності п'яти змінних. Метод є універсальним і може бути поширений на подані числами різної розмірності параметрів обхоплюючі евклідові та проективні простори.

Ключові слова: *багатовимірні простори, евклідові, проективні та фазові простори, багатопараметричні залежності, багатовиди.*

Е.Н. ГУМЕН
Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт"
С.Е. ЛЯСКОВСКАЯ
Национальный университет "Львовская политехника"
Е.В. МАРТЫН
Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности

МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

Рассматриваются задачи науки и техники, для решения которых применяется инструментарий прикладной многомерной геометрии с привлечением многообразий n-мерных евклидовых пространств. Представленный метод показан на примере создания модели зависимости пяти переменных. Метод является универсальным и может быть распространен на поданные числами разной размерности параметров охватывающие евклидовые и проективные пространства.

Ключевые слова: *многомерные пространства, евклидовые, проективные и фазовые пространства, многопараметрические зависимости, многообразия.*

O.M. GUMEN
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"
S.E. LYASKOVSKA
National University "Lviv Polytechnic"
E.V. MARTYN
Lviv State University of Life Safety

MULTIDIMENSIONAL GEOMETRY IN APPLIED PROBLEMS

Addressing the challenge of science and technology, for which the tools of applied multidimensional geometry are used involving manifolds of n-dimensional Euclidean spaces. The method of creating a model shown in the example is based on five variables. The method is generic and can be extended to represented by the numbers of the different dimensions of parameters covering Euclidean and projective spaces.

Keywords: multidimensional spaces, Euclidean, projective and phase spaces, multivariate dependences, manifolds.

Постановка проблеми

Засоби прикладної багатовимірної геометрії посідають належне місце серед інструментарію розв'язування розмаїтих задач науки і техніки із змінними багатьма параметрами одночасно. Враховуючи обмежені можливості для проведення експериментальних досліджень, все більш актуальним є широке використання таких засобів.

У прикладній багатовимірній геометрії як геометричні моделі багатопараметричних залежностей різної фізичної природи використовують багатовиди. Найзручніший спосіб конструювання поверхонь передбачає виділення відповідної поверхні (багатовиду) із сімейства таких поверхонь.

Перспективним є поєднання математичних методів з наступною візуалізацією моделей, поданих гіперповерхнями та багатовидами обхоплюючих просторів на основі геометричного інструментарію їх відображення. Створення моделей нових об'єктів та систем передбачає паралельний аналіз перебігу в них багатопараметричних процесів.

Так як все затребуванішою на практиці стає візуалізація складних багатопараметричних процесів із залученням апарату багатовимірної геометрії, то побудова багатовидів як моделей цих процесів набуває особливої актуальності при вирішенні практичних задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Багатовимірна геометрія широко застосовується в математиці і фізиці для наочного представлення рівнянь з кількома невідомими, функцій декількох змінних і систем з декількома ступенями свободи. Та, звісно ж, цим не обмежується область її застосування у практиці. До безлічі завдань, що вирішуються за допомогою багатовимірної геометрії, відносяться завдання про знаходження більш вигідних варіантів перевезень, завдання про найвигідніші способи розкрою матеріалу, найбільш ефективні режими роботи підприємств, завдання про складання виробничих планів і т. п. [1]. Той факт, що ці завдання, як і більш складні прикладні технічні задачі, вирішуються геометрично (причому, як правило, в просторах, що мають розмірність більшу трьох) свідчить про важливість і своєчасність продовження досліджень у галузі багатовимірної геометрії в сучасному науковому світі. Необхідність використання n-вимірних просторів диктується також математичними завданнями фізики, хімії, біології та інших областей знання.

Прикладні завдання багатовимірної геометрії стосовно методів побудови багатовимірних просторів і геометричних образів у цих просторах ефективно вирішуються за допомогою n-вимірного моделювання. Розв'язання поставлених задач здійснюється за універсальним алгоритмом, що підходить для будь-якого числа вимірів, причому у вирішенні навіть найскладніших проблем отримується наочний результат.

Багато вчених зосереджувались на вивченні і розвитку багатовимірної геометрії. Великий вклад у поширення і розроблення положень прикладної багатовимірної геометрії зробили наші вчені: Гумен М.С., Ковальов С.М., Корчинський В.М., Найдиш В.М., Мартин Є.В., Гумен О.М., Лясковська С.Є. та інші [2-12].

Так, професор М.С. Гумен розробив геометричні основи теорії багатовидів n-вимірного евклідового простору E^n, запропонувавши системний підхід до їх досліджень [2, 3, 6]. Результатом створених підходів до конструювання моделей складних багатопараметричних залежностей стали методи геометричного розв'язування технічних задач, зокрема, багатокритеріальних по кількох критеріях оптимізації одночасно.

Професором Найдишем В.М. використано засоби ортогонального і аксонометричного зображення геометричних об'єктів багатовимірних евклідових просторів при конструюванні сільськогосподарських механізмів [10]. Зокрема, запропоновано оригінальне розв'язання задачі зображення багатовимірної характеристики привідного двигуна такого механізму. Професор Ковальов С.М. розробив засади нової геометричної теорії формування багатовимірних дискретних геометричних об'єктів за допомогою геометричної інтерпретації математичного апарату числових послідовностей [5,12]. Професором Корчинським В.М. створено геометричні моделі та виконано дослідження багатопараметричних процесів формування просторових розподілів яскравості видових даних дистанційного зондування Землі [11]. Проф. Гумен О.М. показала можливість проекціювання геометричних образів багатовимірного простору у підпростори нижчої розмірності при моделюванні проективних n-просторів стосовно дослідження перебігу нестаціонарних процесів у багатопараметричних системах візуалізацією гіперповерхонь фазових просторів [7,8]. Професор Мартин Є.В. приділив увагу дослідженню геометрії комплексного простору стосовно формування областей стійкості та оптимізації параметрів регульованих систем [4,6]. К.т.н. Лясковська С.Є. дослідила геометричне моделювання багатопараметричних систем способом епюра n-простору [9].

Їх теоретичні напрацювання все ширше знаходять своє практичне застосування у конкретних прикладних задачах, що свідчить про тісний зв'язок науки з практикою. У сучасному баченні науковців багатовимірна геометрія тісно взаємодіє з іншими галузями науки. Моделювання перебігу різних процесів, створення моделей явищ і систем дозволяють унаочнити досліджувані багатопараметричні залежності, встановити певні закони впливу і механізми взаємодії між параметрами. А це необхідна передумова успішного розв'язання цілого ряду прикладних задач.

Формулювання цілі дослідження

Використання методів геометричного моделювання, особливо наочної візуалізації, стає необхідним для практичної роботи. Тому ціллю даної статті є розгляд таких задач науки і техніки, для розв'язування яких застосовується інструментарій прикладної багатовимірної геометрії.

Виклад основного матеріалу дослідження

Дослідження багатопараметричних технічних систем супроводжуються геометричними уявленнями багатовидів n-вимірних евклідових просторів, поширеними на утворені числами вищої розмірності евклідові та проективні простори. Геометричні інтерпретації особливо ефективні, якщо при проведенні досліджень враховувати постійність одного з параметрів, що дозволяє трактувати його значення як слід гіперплощини відповідного фазового простору.

Аналізуємо 3-вимірний багатовид 5-простору (n = 5; k = 3). Визначається системою із двох (n – k =2) своїх проекцій на координатних 2-, 3- або 4-вимірних підпросторах. Розмірність координатних підпросторів при цьому визначається кількістю змінних, між якими накладається зв'язок. Кількість проекцій завжди дорівнює кількості (n - k) зв'язків, що накладаються між змінними. У даному випадку повинні бути задані два такі зв'язки (два рівняння) між двома, трьома, чотирма (в одному з можливих сполучень) або змішано: двома і трьома, двома і чотирма, трьома і чотирма змінними. Нехай цей зв'язок заданий, наприклад, між двома парами змінних у вигляді:

$$\begin{cases} x_5 = f(x_1); \\ x_5 = f(x_2). \end{cases}$$

Тоді ці рівняння визначають у 5-вимірному просторі пару проектуючих гіперциліндрів, взаємний перетин яких дає 3-вимірний багатовид.

Аналогічно визначається 3-багатовид перетином відповідних пар гіперциліндрів при зв'язках між змінними в інших можливих сполученнях подібно розглянутому прикладу з чотирма змінними. На практиці частіше доводиться розв'язувати обернені задачі – для деякого 3-вимірного багатовиду знаходять систему описуючих його рівнянь або одержують графічне його зображення на епюрі. Для розв'язання цієї задачі скористаємося приведеними вище положеннями. Відносимо 3-багатовид до деякої натуральної системи координат $Ox_1x_2x_3x_4x_5$ 5-вимірного простору (рис. 1).

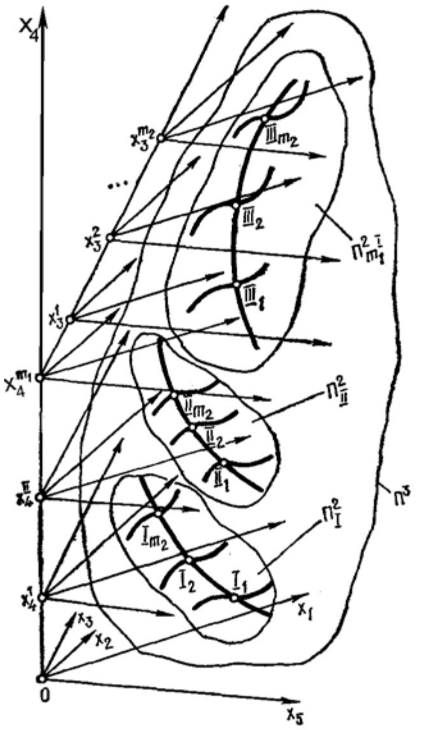

Рис. 1. Схема утворення 3-просторових каркасних ліній 3-вимірного багатовидуП^3 5-вимірного простору

Виділимо каркас багатовиду у гіперплощинах рівня $x_4 = x_4^I, x_4^{II}, \ldots, x_4^{m_1}$. Елементами цього каркасу являються 2-вимірні багатовиди $\Pi_I^2, \Pi_{II}^2, \ldots, \Pi_{m_1}^2$ знайдені в січних гіперплощинах рівня. Для кожного з одержаних 2-багатовидів у утримуючих їх 4-вимірних гіперплощинах виділяються каркаси в 3-вимірних підпросторах рівня $x_3 = x_3^1, x_3^2, \ldots, x_3^{m^2}$. Елементами каркасів 2-багатовидів є лінії I_1, I_2, I_{m^2}; II_1, II_2, II_{m^2}; m_{111}, m_{112}, m_{1m^2}, відповідно, для 2-багатовидів $\Pi_I^2, \Pi_{II}^2, \ldots, \Pi_{m_1}^2$. Отже, лінії належать 3-вимірним підпросторам рівня, паралельним $Ox_1x_2x_5$.

Спроектуємо всі лінії каркасу разом із тими підпросторами рівня, що їх містять, на координатні площини. При цьому на підпростір $Ox_1x_2x_5$ криві проектуються без змін. Для однозначного задавання 3-просторової кривої достатньо мати дві її проекції на двовимірні координатні площини (дві із трьох площин її простору). Приймемо за такі площини, наприклад, Ox_1x_5 і Ox_2x_5. Крім цих двох площин для визначеності кресленика, тобто для забезпечення однозначності завдання 3-багатовиду на епюрі, необхідно додати ще дві координатні площини, наприклад, площини Ox_3x_5 і Ox_4x_5.

Для 3-багатовиду можна також будувати перетин підпросторами рівня і згущувати каркас, якщо цього вимагає конкретна прикладна задача.

Пропонований підхід до дослідження багатовидів дозволяє візуально представити досліджувану залежність у вигляді відповідного геометричного об'єкта та дає можливість порівняння його з еталонною моделлю, розглядає з найбільш загальних позицій їхні властивості, дозволяє аналізувати зв'язки між змінними.

Висновки

У розглянутому прикладі досліджувалася залежність п'яти змінних. Аналогічно у прикладній багатовимірній геометрії працює алгоритм розв'язку задач з моделюванням залежностей будь-якого числа змінних різної фізичної природи. Таким чином, використання багатовидів як геометричних моделей досліджуваних залежностей є універсальним і дозволяє глибше уявити складний механізм взаємозв'язків та наочно представити перебіг процесів у системі *n* змінних.

Дослідженням створених геометричних моделей при розв'язуванні багатопараметричних задач науки і техніки передує розроблення та вибір належного геометричного інструментарію. За сучасного динамічного технічного розвитку існує великий запит на продовження досліджень у цьому напрямку. Тому подальший розвиток прикладної багатовимірної геометрії буде скеровано саме на пошук та розроблення новітніх засобів, зокрема геометричних, моделювання об'єктів та систем.

Список використаної літератури

1. Сиденко Л. Компьютерная графика и геометрическое моделирование / Л. Сиденко. – М.: Питер, 2009. – С.27-39.
2. Гумен Н.С. Геометрические основы теории многообразий евклидового *n*-пространства применительно к геометрическому моделированию многопараметрических систем: автореф. дис. … докт. техн. наук: 05.01.01 / Гумен Н.С. – К,,1992. – 53 с.
3. Гумен М.С. Геометрична інтерпретація моделі комплексного простору / М.С. Гумен, Є.В. Мартин // Сучасні проблеми геометричного моделювання. Ч.1. – Харків: ХІПБ, 1998. – С.139-143.
4. Мартин Є.В. Геометрія комплексного простору стосовно формування областей стійкості та оптимізації параметрів регульованих систем: дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / Є.В. Мартин. – К., 2000. – 284 с.
5. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. / Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. – Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – 256 с.
6. Гумен Н.С. Применение многомерной геометрии при решении некоторых технических задач / Н.С. Гумен // Технология и автоматизация машиностроения. – К.: Техника, 1970. – В.6. – С. 18-25.
7. Гумен О.М. Моделювання проективних *n*-просторів багатопараметричних технічних систем: автореф. дис. … докт. техн. наук: 05.01.01 / О.М. Гумен. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – 36 с.
8. Ванін В.В. Раціональні багатовиди як неевклідові проективні простори / В.В. Ванін, М.С. Гумен, О.М. Гумен // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – Вип.2. – К.: НТУУ "КПІ", 2006. – С.139-143.
9. Лясковська С.Є. Геометричне моделювання багатопараметричних систем способом епюра *n*-простору: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / С.Є. Лясковська. – К., 2011. – 284 с.
10. Найдыш В.М. Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям: автореф. дис. … докт. техн. наук: 05.01.01 / В.М. Найдыш. – М., 1983. – 33 с.
11. Корчинський В.М. Інваріантні геометричні моделі ідентифікації та аналізу проекційних зображень: автореф. дис. … докт. техн. наук: 05.01.01 / В.М. Корчинський. – К., 1999. – 32 с.
12. Ковальов С.М. Параметризація симплексів у багатовимірних просторах / С.М. Ковальов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 75. – С. 16-18.