УДК 514.18

А.І. ЛІТВІНОВ, А.В. НАЙДИШ, І.Г. БАЛЮБА
Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Б. Хмельницького

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТОРСОВИХ ПОВЕРХОНЬ ІЗ ДВОМА ПАРАБОЛІЧНИМИ НАПРЯМНИМИ, В РАМКАХ АПАРАТУ БН-ЧИСЛЕННЯ

Засобами апарату БН-числення досліджено спосіб геометричного моделювання торсових поверхонь із двома параболічними напрямними, що належать площинам, які перетинаються. Також отримано точкові рівняння, які визначають торсові поверхні з наперед заданими властивостями.

Ключові слова: торсова поверхня, парабола, напрямна, дуга кривої, апарат БН-числення, паралельні вісі.

А.И. ЛИТВИНОВ, А.В. НАЙДЫШ, І.Г. БАЛЮБА
Мелитопольский государственный педагогический университет им. Б.Хмельницкого

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОРСОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ДВУМЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ НАПРАВЛЯЮЩИМИ, В РАМКАХ АППАРАТА БН-ИСЧИСЛЕНИЯ

Средствами аппарата БН-исчисления, исследован способ геометрического моделирования торсовых поверхностей с двумя параболическими направляющими, которые принадлежат пересекающимся плоскостям. Также получены точечные уравнения, которые определяют торсовые поверхности с наперед заданными свойствами.

Ключевые слова: торсовая поверхность, парабола, направляющая, дуга кривой, аппарат БН-исчисления, параллельные оси.

A.I. LITVINOV, A.V. NAYDYSH, I.G. BALUBA
Melitopol State Pedagogical University named after Bohdan Khmelnitsky

GEOMETRIC MODELING OF THE TORSION SURFACES WITH TWO PARABOLIC GUIDES BY THE BN-CALCULUS APPARATUS

The method of geometric modeling of the torsion surfaces with two parabolic guides, which lie in intersecting planes, is investigation by means of the BN-calculus apparatus. The points equations, that define the torsion surface with predetermined conditions, are obtained also.

Keywords: torsion surface, parabola, guide, arc curve, BN-calculus, parallel axis.

Постановка проблеми

Завдяки властивостям, які дають можливість розгорнення на поверхню без складок та розривів, торсові поверхні добре зарекомендували себе у різних галузях промисловості. Для проведення досліджень та інженерних розрахунків необхідно мати інструментарій, що дозволяє швидко та точно змоделювати поверхню.

На поточному рівні розвитку апарату БН-числення актуальною проблемою є отримання способів та методів аналітичного опису торсових поверхонь і їх систематизація. Знайдені рішення дозволять значно розширити інструментарій апарату, по-новому розглянути прикладні задачі моделювання торсів та розширити можливості для їх використання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Питаннями геометричного моделювання торсових поверхонь займались видатні вчені, зокрема Обухова В.С., Підгорний О.Л., Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М., Кривошапко С.Ф., Балюба І.Г. та ін..

Найбільш повно та систематично питання алгоритмів конструювання, аналітичного опису і класифікації торсових поверхонь виклав у своїй роботі "Энциклопедия аналитических поверхностей" [1] професор Кривошапко. У роботі надано практично всі можливі види торсових поверхонь, їх векторні та параметричні форми задання. Однак, конструювання поверхонь таким чином призводить до формування складних систем із тригонометричних рівнянь, що, у свою чергу, потребує значних витрат розрахункових ресурсів.

Важливо відзначити дисертаційні дослідження Балюби І.Г. [2], які дозволили створити апарат БН-числення, що відкрив нові можливості у геометричному моделюванні об'єктів. Його учнями, а саме Конопацьким Є.В. та Давиденко І.П. у працях [3, 4] було суттєво розширено інструментарій апарату. Їх наукові здобутки надали можливість аналітичного опису кривих, які є основою побудови різноманітних торсових поверхонь.

Близькими до теми статті є дослідження Несвідоміна В.М. [5] в області побудови складних геометричних моделей, зокрема торсових поверхонь. У цій роботі було визначено перелік недоліків методів синтетичної геометрії, таких як велика трудомісткість процесу, ручне виконання графічних побудов та недостатня точність, що в загалом сповільнює конструювання моделей. Усунення цих недоліків можливо тільки із використанням сучасних інформаційних технологій.

Формулювання цілей дослідження

Побудувати геометричні моделі торсових поверхонь з двома параболічними напрямними, що належать різним площинам, які перетинаються, та отримати їх аналітичний опис у БН-численні.

Викладення основного матеріалу дослідження

1. Торсова поверхня з двома параболами, осі яких перетинаються.

Нехай задано симплекс $ABCD$ (рис. 1). Відповідно до алгоритму, представленому у роботі [1], розглянемо параболу D_1KD_2, що розташована у симплексі D_1DD_2, який належить грані BDC та параболу A_1KA_2, що розташована у симплексі A_1AA_2, яка належить грані BAC. Згідно із типом шуканої торсової поверхні осі параболічних напрямних повинні перетинатись. У нашому випадку грані BDC і BAC перетинаються у ребрі BC, а отже і осі параболічних напрямних, що знаходяться на відповідних гранях – перетинаються, що забезпечує виконання заданої умови.

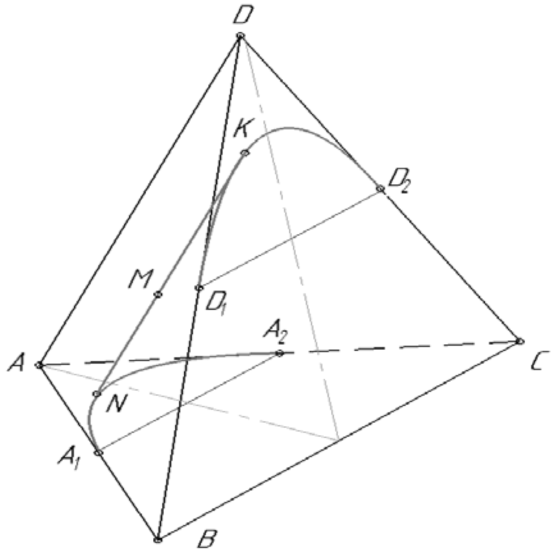

Рис. 1. Геометрична схема конструювання торса з двома параболами, осі котрих перетинаються

У симплексі D_1DD_2 визначимо дугу параболи D_1KD_2 як криву одного відношення [4] і задамо її наступним точковим рівнянням:

$$K = D_1 \cdot \bar{u}^2 + 2D \cdot u \cdot \bar{u} + D_2 \cdot u^2 . \tag{1}$$

Визначимо точки D_1 и D_2 як середини відрізків BD и DC, отже $D_1 = \dfrac{B+D}{2}$, а $D_2 = \dfrac{D+C}{2}$.

Підставимо значення точок D_1 та D_2 до рівняння (1):

$$K = \left[\frac{B+D}{2}\right]\bar{u}^2 + 2Du\bar{u} + \left[\frac{D+C}{2}\right]u^2 . \tag{2}$$

Після перетворень отримаємо:

$$K = B\frac{\bar{u}^2}{2} + D\left[\frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2}\right] + C\frac{u^2}{2} . \tag{3}$$

У симплексі A_1AA_2 точки A_1 і A_2 також визначені як середини відрізків BA і AC відповідно. Звідси, аналогічно визначимо рівняння для параболи A_1NA_2:

$$N = B\frac{\bar{u}^2}{2} + A\left[\frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2}\right] + C\frac{u^2}{2} . \tag{4}$$

Рівняння твірної торсової поверхні визначимо як точкове рівняння прямої:

$$M = K \cdot v + N \cdot \bar{v} . \tag{5}$$

Підставимо рівняння (3) и (4) до рівняння (5) та після перетворень отримаємо:

$$M = A\left[\frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2}\right]\bar{v} + B\frac{\bar{u}^2}{2} + C\frac{u^2}{2} + D\left[\frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2}\right]v . \tag{6}$$

Представимо точкове рівняння (6) у параметричному вигляді:

$$x_M = x_A\left[\frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2}\right]\bar{v} + x_B\frac{\bar{u}^2}{2} + x_C\frac{u^2}{2} + x_D\left[\frac{\bar{u}^2}{2} + 2u\bar{u} + \frac{u^2}{2}\right]v , \tag{7}$$

$$y_M = y_A\left[\frac{\overline{u}^2}{2} + 2u\overline{u} + \frac{u^2}{2}\right]\overline{v} + y_B\frac{\overline{u}^2}{2} + y_C\frac{u^2}{2} + y_D\left[\frac{\overline{u}^2}{2} + 2u\overline{u} + \frac{u^2}{2}\right]v,$$

$$z_M = z_A\left[\frac{\overline{u}^2}{2} + 2u\overline{u} + \frac{u^2}{2}\right]\overline{v} + z_B\frac{\overline{u}^2}{2} + z_C\frac{u^2}{2} + z_D\left[\frac{\overline{u}^2}{2} + 2u\overline{u} + \frac{u^2}{2}\right]v.$$

Результат роботи рівняння (6) зображено на рис. 2.

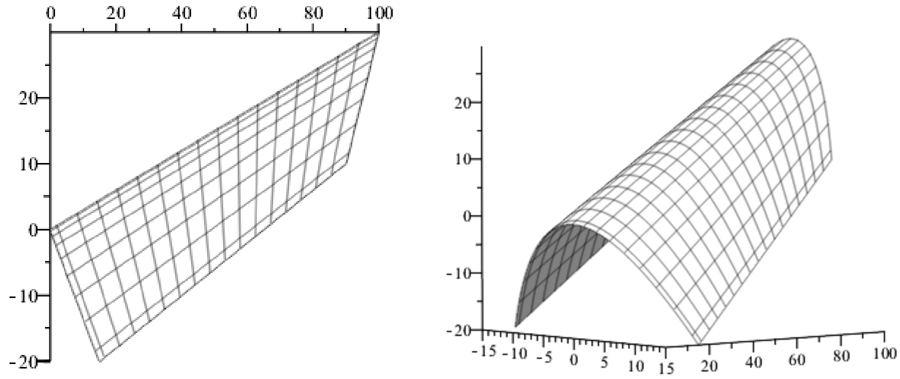

Рис. 2. Торсова поверхня із двома параболами, осі яких перетинаються

2. Торсова поверхня з двома параболами, що належать площинам, які перетинаються, але з паралельними осями.

Нехай задано симплекс $ABCD$ (рис. 3.). Відповідно до алгоритму, наданому у роботі [1], розглянемо відрізок E_1E, що належить грані DCB, і відрізок A_1C_1, що належить грані ACB. Точки E_1 і E визначені як середини ребер DB и DC, утворюючи середню лінію трикутника DCB, звідси випливає, що $E_1E \parallel BC$. Точки A_1 и C_1 визначені як середини ребер AB и AC, утворюючи середню лінію трикутника ACB, звідси випливає, що відрізок $A_1C_1 \parallel BC$. Згідно із властивістю паралельності прямих, якщо $E_1E \parallel BC$ і $A_1C_1 \parallel BC$, то $E_1E \parallel A_1C_1$, а отже вісі E_1E та A_1C_1 парабол D_1KB_1 и ANB паралельні. Перша необхідна умова існування поверхні виконана.

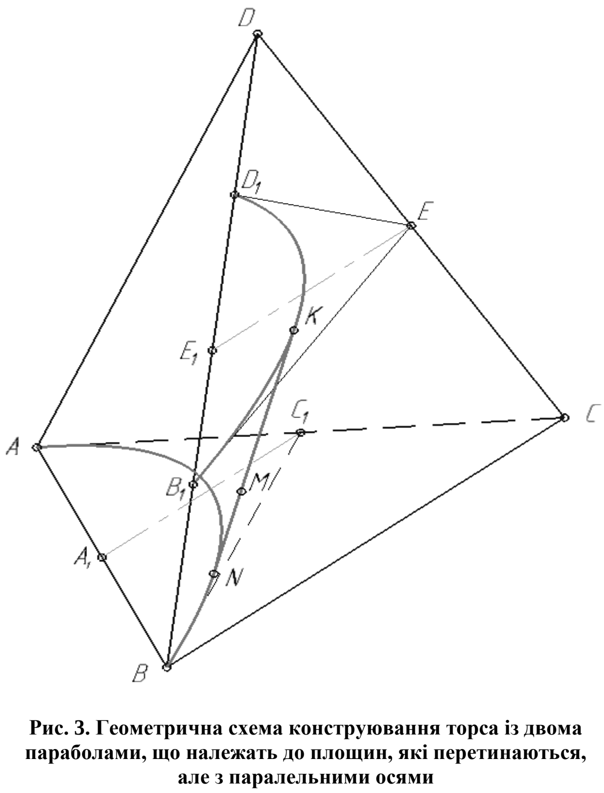

Рис. 3. Геометрична схема конструювання торса із двома параболами, що належать до площин, які перетинаються, але з паралельними осями

Згідно із типом шуканої торсової поверхні параболічні напрямні мають належати площинам, які перетинаються. У нашому випадку парабола D_1KB_1 належить грані DCB, а парабола ANB належить грані ACB, які в свою чергу перетинаються у ребрі BC, що забезпечує виконання другої необхідної умови існування поверхні.

У симплексі D_1EB_1 визначимо дугу параболи D_1KB_1 як криву одного відношення [4] і задамо її наступним точковим рівнянням:

$$K = D_1 \cdot \overline{u}^2 + 2E \cdot u \cdot \overline{u} + B_1 \cdot u^2. \tag{8}$$

Точки E_1 і E визначені як середини ребер DB и DC, отже $E_1 = \dfrac{D+B}{2}$ та $E = \dfrac{D+C}{2}$. Точки D_1 і B_1 визначені як середини відрізків DE_1 и E_1B відповідно. Звідси:

$D_1 = \dfrac{D+E_1}{2} = (D + \dfrac{D+B}{2})/2 = \dfrac{3D+B}{4}$, $B_1 = \dfrac{E_1+B}{2} = (\dfrac{D+B}{2} + B)/2 = \dfrac{D+3B}{4}$. Підставимо значення точок D_1, E и B_1 до рівняння (8):

$$K = \left[\frac{3D+B}{4}\right]\cdot \overline{u}^2 + 2\left[\frac{D+C}{2}\right]\cdot u \cdot \overline{u} + \left[\frac{D+3B}{4}\right]\cdot u^2. \tag{9}$$

Після перетворень отримаємо:

$$K = D\left[\frac{3\overline{u}^2}{4} + u\overline{u} + \frac{u^2}{4}\right] + Cu\overline{u} + B\left[\frac{3u^2}{4} + \frac{\overline{u}^2}{4}\right]. \tag{10}$$

У симплексі AC_1B точки A_1 и C_1 визначимо як середини відрізків AB и AC, а отже, $A_1 = \dfrac{A+B}{2}$ і $C_1 = \dfrac{A+C}{2}$. Визначимо дугу параболи ANB як криву одного відношення [4] і задамо точковим рівнянням, підставив значення точок A_1 и C_1.

$$N = A\cdot \overline{u}^2 + 2\left[\frac{A+C}{2}\right]\cdot u \cdot \overline{u} + B\cdot u^2. \tag{11}$$

Після перетворень отримаємо:

$$N = A\overline{u} + Cu\overline{u} + Bu^2. \tag{12}$$

Рівняння твірної торсової поверхні визначимо як точкове рівняння прямої:

$$M = K \cdot v + N \cdot \overline{v}. \tag{13}$$

Підставимо рівняння (10) и (13) до рівняння (13) та після перетворень отримаємо:

$$M = A\overline{u}\overline{v} + B\left[u^2\overline{v} + \left(\frac{3u^2}{4} + \frac{\overline{u}^2}{4}\right)v\right] + Cu\overline{u} + D\left[\frac{3u^2}{4} + u\overline{u} + \frac{\overline{u}^2}{4}\right]v. \tag{14}$$

Представимо точкове рівняння (14) у параметричному вигляді:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A\overline{u}\overline{v} + x_B\left[u^2\overline{v} + \left(\frac{3u^2}{4} + \frac{\overline{u}^2}{4}\right)v\right] + x_C u\overline{u} + x_D\left[\frac{3u^2}{4} + u\overline{u} + \frac{\overline{u}^2}{4}\right]v, \\ x_M &= y_A\overline{u}\overline{v} + y_B\left[u^2\overline{v} + \left(\frac{3u^2}{4} + \frac{\overline{u}^2}{4}\right)v\right] + y_C u\overline{u} + y_D\left[\frac{3u^2}{4} + u\overline{u} + \frac{\overline{u}^2}{4}\right]v,. \\ x_M &= z_A\overline{u}\overline{v} + z_B\left[u^2\overline{v} + \left(\frac{3u^2}{4} + \frac{\overline{u}^2}{4}\right)v\right] + z_C u\overline{u} + z_D\left[\frac{3u^2}{4} + u\overline{u} + \frac{\overline{u}^2}{4}\right]v. \end{aligned} \tag{15}$$

Результат роботи рівняння (14) зображено на рис. 4.

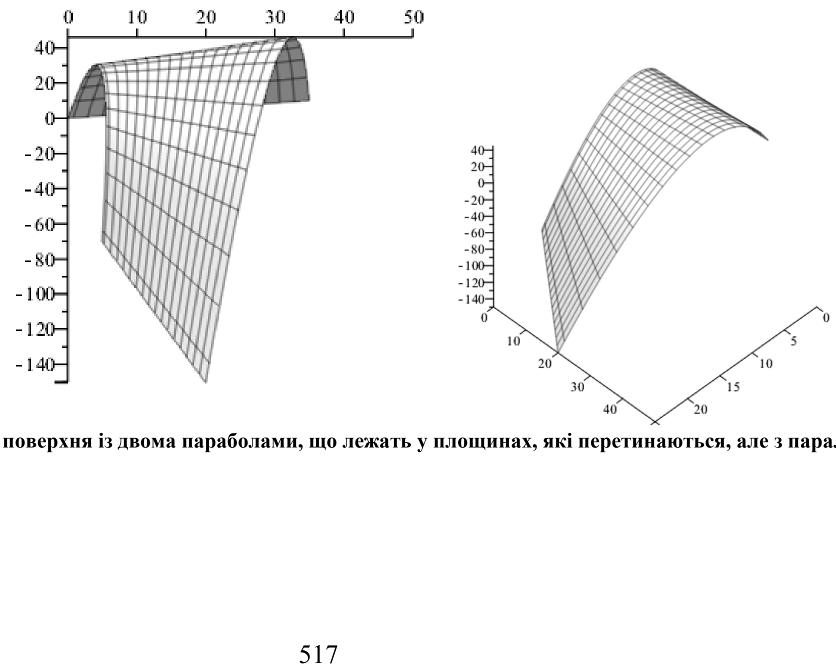

Рис. 4. Торсова поверхня із двома параболами, що лежать у площинах, які перетинаються, але з паралельними осями

Висновки

Побудовано геометричні моделі торсових поверхонь з двома параболічними напрямними, що належать різним площинам, які перетинаються та сформовано їх аналітичний опис у БН-численні. Отримані точкові рівняння розширили інструментарій апарату БН-числення та дозволяють розглядати прикладні задачі, що стосуються зазначених у статті типів торсових поверхонь. Зокрема, ці результати дозволяють використовувати у якості напрямних інші криві другого порядку.

Зменшення кількості тригонометричних функцій в аналітичному описі та його обсягу дозволило зменшити розрахункову похибку та підвищити швидкість розрахунків.

У подальшому планується досліджувати підклас торсових поверхонь із двома плоскими напрямними кривими з метою виявлення більш досконалої класифікації та розробки відповідних способів моделювання поверхонь.

Список використаної літератури

1. Кривошапко С.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей / С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2010. – 560 с.
2. Балюба И.Г Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления: автореф. дис. на соискание учен. степени доктора техн. наук : 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Іван Григорович. – К.: КГТУСА, 1995. – 36 с.
3. Конопацький Є.В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша: автореф. дис. на здоб. наук. ступеня канд. техн. наук : 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Євген Вікторович Конопацький; М-во аграрної політики та продовольства України, Таврійський держ. агротехнологічний ун-т. – Мелітополь, 2012. – 26 с.
4. Давиденко І.П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Іван Петрович Давиденко; Донбаська національна академія будівництва та архітектури. – Донецьк, 2012. – 169 с.
5. Несвідомін В.М. Комп'ютерні моделі синтетичної геометрії: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / Віктор Миколайович Несвідомін; КНУБА. – Київ, 2008. – 34 с.