
ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

УДК 519.615.5

О.Ю. КИМСТАЧ

Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, г. Николаев

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ

Предложен метод функциональной сходимости для решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Рассмотрено его применение для точного решения систем малой размерности и приближенного решения систем большой размерности совместно с методом квазиконстант. Основным преимуществом предложенного подхода для решения систем нелинейных алгебраических уравнений на основе методов функциональной сходимости и квазиконстант является абсолютная сходимость. Использование итерационного приближения обеспечивает возможность достижения любой точности решения.

Ключевые слова: метод квазиконстант, метод функциональной сходимости, итерация, численное решение, система нелинейных алгебраических уравнений, погрешность.

О.Ю. КИМСТАЧ

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Николаїв

МЕТОД ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗБІЖНОСТІ

Запропоновано метод функціональної збіжності для розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянуте його застосування для точного розв'язування систем малої розмірності та наближеного розв'язування систем великої розмірності разом з методом квазиконстант. Основною перевагою запропонованого підходу для розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь на основі методів функціональної збіжності та квазиконстант є абсолютна збіжність. Використання ітераційного наближення забезпечує можливість досягнення будь-якої точності рішення.

Ключові слова: метод квазиконстант, метод функціональної збіжності, ітерація, чисельне розв'язування, система нелінійних алгебраїчних рівнянь, похибка.

O.YU. KIMSTACH

Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Nikolaev

METHOD OF FUNCTIONAL CONVERGENCE

The method of functional convergence for solving of nonlinear algebraic equations systems is proposed. The method application for the exact solution of low-dimensional systems and the approximate solution of systems of large dimension together with the method quasiconstant is considered. The main advantage of the proposed way for solving of nonlinear algebraic equations systems on the basis of methods of functional convergence and quasiconstant is absolute convergence. Using iteration approximation provides the possibility of obtaining any solution accuracy.

Keywords: quasiconstant method, method of functional convergence, iteration, computational solution, system of nonlinear algebraic equations, error.

Постановка проблемы

При синтезе или анализе объектов электромеханики и других технических областей возникает задача вычисления параметров и величин, входящих в состав определенных или неопределенных систем нелинейных алгебраических уравнений. Обычно их количество весьма значительно и исчисляется десятками или сотнями, например, общее количество параметров, которые характеризуют асинхронный двигатель в статике, составляет приблизительно 698 [1]. В общем, любая задача определения искомых параметров или величин в технике при анализе статических режимов связана с решением систем уравнений, которые в подавляющем количестве случаев являются нелинейными [2-6]. Нелинейности возникают в результате наличия степенных, тригонометрических и иных функций. С физической точки зрения нелинейности являются отражением насыщения, гармоничности, гетерогенности структуры и других факторов.

Анализ последних исследований и публикаций

В редких случаях решение систем алгебраических нелинейных уравнений можно решить методом последовательного исключения, по аналогии с методом Гаусса [7-9], который широко применяется для решения линейных систем, тогда конечное решение сводится к необходимости поиска корней нелинейного уравнения одной переменной, но это скорее исключение из правил, которое встречается в системах уравнений малого порядка.

Обычно нелинейные системы уравнений невозможно решить классическими методами математики, в прикладных технических задачах используются методы последовательного приближения [3], итерации [3, 6], квазиконстант [2, 10] и другие.

В математике для решения систем нелинейных алгебраических уравнений применяются:

- метод Ньютона-Канторовича [7], основанный на разложении по Тейлору, что позволяет линеаризовать систему уравнений, но такой подход приводит к значительному росту вычислительных операций и при определенных видах нелинейностей и особенностях функций ограничивает его применение;

- метод итераций [7, 9] – наиболее простой метод, но имеет проблемы применения связанные со сходимостью;

- уточнение Чебышева [7], которое позволяет получить решения путем последовательного уточнения, но при высокой размерности системы практически неприменим.

Поэтому исследования в области поиска наиболее простого и универсального метода решения систем алгебраических нелинейных уравнений является актуальной задачей.

Цель исследований

Цель работы – разработка универсального численного метода решения систем нелинейных алгебраических уравнений, способного обеспечить точность расчетов на уровне инженерной погрешности при условии минимума вычислительных операций.

Изложение основного материала исследований

Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений предлагается использовать метод функциональной сходимости. Суть метода заключается в создании искусственной избыточности в системе уравнений, что позволяет получить двух или более кратное выражения одной из искомым в функциях одной или нескольких иных неизвестных, а их взаимное пересечение дает искомым результат или ограничивает область его нахождения для аргументов построенных функций. Метод функциональной сходимости является продолжением развития метода введения параметра или вариации [9]. Метод может применяться для точного решения малоразмерных или относительно простых систем уравнений или для численного приближенного решения систем любой размерности и сложности.

Применение метода функциональной сходимости лучше рассматривать на примерах.

Точное решение систем. Допустим, необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1; \\ \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{23}x_3 - a_{24}x_4} = b_2; \\ \sqrt{a_{31}x_1 + a_{32}x_2} - a_{33}x_3 = a_{34}x_4; \\ \cos(a_{43}x_4) - a_{41}x_1 = a_{42}(x_2 - x_3), \end{cases} \quad (1)$$

где x_i – неизвестные величины; a_{ij} и b_i – известные коэффициенты.

Так как метод в основном предназначен для решения систем, описывающих реальные технические системы и устройства, то результат решения имеет предсказуемые качественные и количественные оценки, т.е. все решения, например, являются действительными, положительными и находятся в определенном диапазоне. Исходя из этого, две из четырех неизвестные величины x_2 и x_4 превращаются в независимые переменные формируемых функциональных зависимостей, при этом

$$x_2 \in [0,8;3] \text{ и } x_4 \in [10;20].$$

Таким образом, система (1) становится избыточной, в ней неизвестных две величины – x_1 и x_3 , а уравнений четыре. Из второго уравнения системы выражается x_1 :

$$x_1 = \frac{b_2}{a_{21}} (a_{23}x_3 - a_{24}x_4) - \frac{a_{22}x_2}{a_{21}}, \quad (2)$$

а затем подставляется в остальные три уравнения и решается относительно x_3 , что позволяет получить три функциональные зависимости для решения x_3 :

$$\begin{cases} x_{31}(x_2, x_4) = \frac{b_1 + \frac{b_2 a_{11} a_{24} x_4}{a_{21}} + \frac{a_{22} a_{11} x_2}{a_{21}} - a_{12} x_2 - a_{14} x_4}{b_2 a_{23} a_{11} / a_{21} - a_{13}}; \\ x_{32}(x_2, x_4) = \frac{-B(x_4) + \sqrt{B^2(x_4) - 4AC(x_2, x_4)}}{2A}; \\ x_{33}(x_2, x_4) = \frac{\cos(a_{43} x_4) + \frac{b_2 a_{41} a_{24} x_4}{a_{21}} + \frac{a_{22} a_{41} x_2}{a_{21}} - a_{42} x_2}{b_2 a_{23} a_{41} / a_{21} - a_{42}}, \end{cases} \quad (3)$$

где $A = a_{33}^2$, $B(x_4) = 2a_{34}a_{33}x_4 - \frac{a_{23}a_{31}b_2}{a_{21}}$ и $C(x_2, x_4) = a_{34}^2 x_4^2 + \frac{a_{31}b_2}{a_{21}} a_{24} x_4 + \frac{a_{22}a_{31}}{a_{21}} x_2 - a_{32} x_2$ – расчетные коэффициенты.

Взаимное пересечение поверхностей (3) в области действительных чисел можно представить задачей решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_{31}(x_2, x_4) - x_{32}(x_2, x_4) = 0; \\ x_{31}(x_2, x_4) - x_{33}(x_2, x_4) = 0; \\ x_{32}(x_2, x_4) - x_{33}(x_2, x_4) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решение системы (4) дает три функциональных зависимости для x_4 относительно x_2 , которые используются для получения среднеарифметической и среднефункциональной зависимостей.

Среднеарифметическая зависимость

$$x_{4ca}(x_2) = \frac{x_{41}(x_2) + x_{42}(x_2) + x_{43}(x_2)}{3}, \quad (5)$$

где $x_{41}(x_2)$, $x_{42}(x_2)$ и $x_{43}(x_2)$ – решение для каждого из уравнений системы (4) соответственно.

Кроме среднеарифметического решения рассчитывается среднефункциональное решение. Среднефункциональное значение отображает среднее значение с учетом поведения отдельной функции. Очевидно, что если функция $f(x)$ на участке поиска обладает высоким значением производной $f'(x)$, то ее малое отклонение по ординате $\Delta f(x)$ приводит к еще более малому отклонению по абсциссе Δx , т.к.

$$\Delta x \approx \frac{\Delta f(x)}{f'(x)}.$$

Следовательно, такая функция обладает более достоверным решением, чем функции с меньшим значением производной, поэтому градиентные функции должны иметь больший вес при определении среднего решения. Среднефункциональное – среднее арифметическое с коэффициентами весомости, представляющие собой значение производной в опорной точке, которой является результат по формуле (5).

Вначале для функций (3) определяются частные производные

$$\begin{aligned} x'_{31}(x_2, x_4) &= \frac{\partial x_{31}(x_2, x_4)}{\partial x_4}; \\ x'_{32}(x_2, x_4) &= \frac{\partial x_{32}(x_2, x_4)}{\partial x_4}; \\ x'_{33}(x_2, x_4) &= \frac{\partial x_{33}(x_2, x_4)}{\partial x_4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Затем рассчитываются весовые коэффициенты на основе уравнений (4) с использованием (6)

$$\begin{aligned} k_1(x_2) &= |x'_{31}(x_2, x_{4ca}(x_2)) - x'_{32}(x_2, x_{4ca}(x_2))|; \\ k_2(x_2) &= |x'_{31}(x_2, x_{4ca}(x_2)) - x'_{33}(x_2, x_{4ca}(x_2))|; \\ k_3(x_2) &= |x'_{32}(x_2, x_{4ca}(x_2)) - x'_{33}(x_2, x_{4ca}(x_2))|. \end{aligned}$$

Тогда среднефункциональное значение

$$x_{4cf}(x_2) = \frac{k_1(x_2)x_{41}(x_2) + k_2(x_2)x_{42}(x_2) + k_3(x_2)x_{43}(x_2)}{k_1(x_2) + k_2(x_2) + k_3(x_2)}, \quad (7)$$

Зависимости (5) и (7) представлены на рис.1, а их совместное решение дает результат для $x_2 = 1,7$, а для $x_4 = 13$.

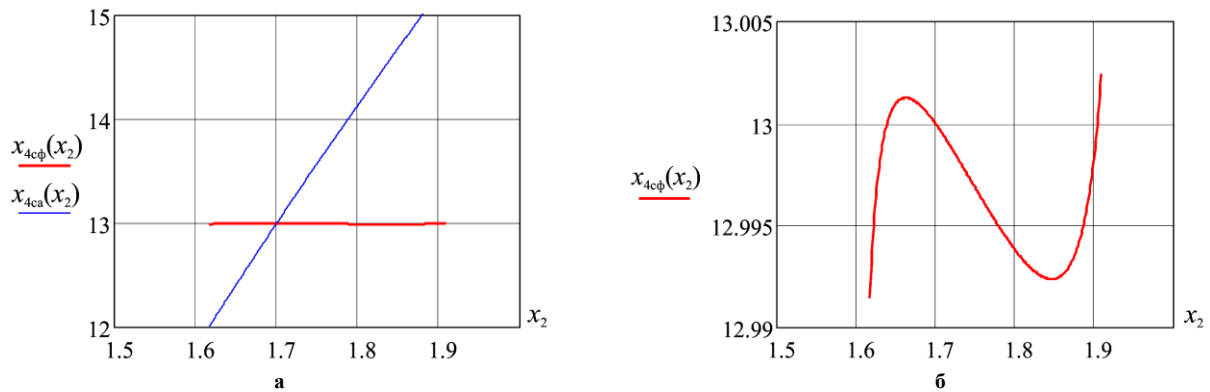


Рис. 1. Совместное решение среднеарифметического и среднефункционального значений (а) и среднефункциональная зависимость (б)

Как видно на рис.1, а, среднеарифметическое решение для x_4 меняется в достаточно большом диапазоне, который составляет десятки процентов, тогда как среднефункциональное решение (рис.1, б) обладает погрешностью в пределах доли процента. Это свойство среднефункционального решения будет в дальнейшем использовано при реализации численного алгоритма решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

Остальные два искомого параметра рассчитываются по одному из уравнений (3) $x_3 = 18$ и (2) $x_1 = 0,5$.

В общем виде применение метода функциональной сходимости для точного решения выглядит следующим образом:

- исходная система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2 \dots x_n) = f_1(x_1, x_2 \dots x_n); \\ F_2(x_1, x_2 \dots x_n) = f_2(x_1, x_2 \dots x_n); \\ \dots \dots \dots \\ F_n(x_1, x_2 \dots x_n) = f_n(x_1, x_2 \dots x_n); \end{cases}$$

- принимаются две независимые переменные x_p и x_q , при $1 \leq p \leq n$ и $1 \leq q \leq n$;

- исходная система преобразуется путем исключения неизвестных к виду

$$\begin{cases} x_{m1}(x_p, x_q) = G_1(x_p, x_q); \\ \dots \dots \dots \\ x_{mk}(x_p, x_q) = G_k(x_p, x_q); \end{cases}$$

причем $1 \leq m \leq n$, $m \neq p$ и $m \neq q$;

- графически или аналитически решается система

$$\begin{cases} x_{m1}(x_p, x_q) - x_{m2}(x_p, x_q) = 0; \\ x_{m1}(x_p, x_q) - x_{m3}(x_p, x_q) = 0; \\ x_{m2}(x_p, x_q) - x_{m3}(x_p, x_q) = 0; \end{cases}$$

ее решение: $x_{q1}(x_p) \dots x_{qv}(x_p)$;

- определяется среднеарифметическое решение

$$x_{qca}(x_p) = \frac{1}{v} \sum_{j=1}^v x_{qj}(x_p);$$

- рассчитываются весовые коэффициенты

$$\begin{aligned} k_1(x_p) &= \left| \frac{\partial x_{m1}(x_p, x_{qca}(x_p))}{\partial x_q} - \frac{\partial x_{m2}(x_p, x_{qca}(x_p))}{\partial x_q} \right|; \\ k_2(x_p) &= \left| \frac{\partial x_{m1}(x_p, x_{qca}(x_p))}{\partial x_q} - \frac{\partial x_{m3}(x_p, x_{qca}(x_p))}{\partial x_q} \right|; \\ k_3(x_p) &= \left| \frac{\partial x_{m2}(x_p, x_{qca}(x_p))}{\partial x_q} - \frac{\partial x_{m3}(x_p, x_{qca}(x_p))}{\partial x_q} \right|; \end{aligned}$$

- среднефункциональное решение

$$x_{qc\phi}(x_p) = \frac{\sum_{j=1}^v k_j(x_p) x_{qj}(x_p)}{\sum_{j=1}^v k_j(x_p)};$$

- решается графически или аналитически

$$x_{qca}(x_p) = x_{qc\phi}(x_p),$$

корень x_p дает значение x_q ;

- последовательно вычисляются остальные корни системы.

Точно с помощью представленного алгоритма решить систему уравнений не всегда представляется возможным, так для систем более высокого порядка избавиться от лишних величин (как делалось для x_1) иногда практически невозможно из-за сложности вида нелинейных уравнений, тогда для решения системы приходится использовать численный вариант метода функциональной сходимости.

Численное решение систем. Применение и особенности численного варианта метода функциональной сходимости также рассматриваются на примере решения системы уравнений (1), более того наличие уже точного решения в итоге позволит оценить погрешности приближенного результата.

Предположим, что в результате применения метода квазиконстант [2, 10] удалось оценить приблизительно решение для квазиконстанты $x_2 = 1,4$. Такое достаточно большое отклонение приблизительно 21 % от реального значения выбрано намеренно, чтобы показать эффективность численного варианта метода функциональной сходимости. В реальности квазиконстанты рассчитываются с погрешностью менее 10 %.

Искомая величина x_4 принимается за независимую переменную, которая изменяется в диапазоне от 0 до 25, при этом область допустимых значений сознательно рассматривается шире, чем для точного варианта решения, чтобы продемонстрировать особенности численного подхода.

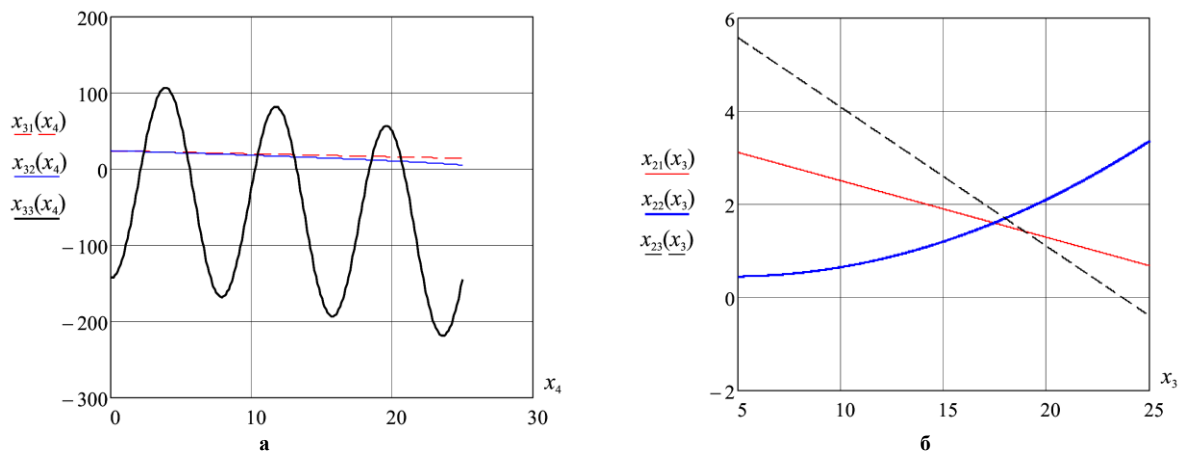
Аналогично (3) получаются выражения

$$\left\{ \begin{aligned} x_{31}(x_4) &= \frac{b_1 + \frac{b_2 a_{11} a_{24} x_4}{a_{21}} + \frac{a_{22} a_{11} x_2}{a_{21}} - a_{12} x_2 - a_{14} x_4}{\frac{b_2 a_{23} a_{11}}{a_{21}} - a_{13}}; \\ x_{32}(x_4) &= \frac{-B(x_4) + \sqrt{B^2(x_4) - 4AC(x_4)}}{2A}; \\ x_{33}(x_4) &= \frac{\cos(a_{43} x_4) + \frac{b_2 a_{41} a_{24} x_4}{a_{21}} + \frac{a_{22} a_{41} x_2}{a_{21}} - a_{42} x_2}{\frac{b_2 a_{23} a_{41}}{a_{21}} - a_{42}}, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

где $C(x_4) = a_{34}^2 x_4^2 + \frac{a_{31} b_2}{a_{21}} a_{24} x_4 + \frac{a_{22} a_{31}}{a_{21}} x_2 - a_{32} x_2$ – расчетный коэффициент.

Построение функций (8) дает решения для x_4 (рис.2, а). Для пересечений $x_{31}(x_4)$ и $x_{32}(x_4)$ решение однозначное, хотя имеет огромную ошибку, а для $x_{31}(x_4)$, $x_{33}(x_4)$ и $x_{32}(x_4)$, $x_{33}(x_4)$ из-за гармоничного вида функции $x_{33}(x_4)$ нет однозначного решения, присутствуют для каждой пары функций шесть решений. Необходимо отбросить решения, выпадающие за пределы существующих ограничений, которые обычно формируются на основе анализа математической модели физического объекта. Если этого не сделать, конечное решение будет иметь максимально объективный функциональный результат, но со значительной погрешностью. Будем считать, что имеются соответствующие ограничения, которые фиксируют однозначный результат в районе $x_4 = 13$. Тогда определяется среднее арифметическое решение

$$x_{4ca} = \frac{x_{41} + x_{42} + x_{43}}{3} = \frac{1,497 + 13,016 + 13,046}{3} = 9,187. \quad (9)$$

Рис. 2. Графики функциональной сходимости для x_3 (а) и x_2 (б)

Как видно, решение по (9) имеет значительную погрешность, составляющую около 30 %, что объясняется выпадением первого частного решения вследствие начальной ошибки x_2 и высокой функциональной зависимости первого частного решения от x_2 . Это недопустимо много в большинстве инженерных расчетов. Поэтому следует рассчитать среднефункциональное решение

$$x_{4\text{сф}} = \frac{k_{41}x_{41} + k_{42}x_{42} + k_{43}x_{43}}{k_{41} + k_{42} + k_{43}} = \frac{0,251 \cdot 1,497 + 89,069 \cdot 13,016 + 89,321 \cdot 13,046}{0,251 + 89,069 + 89,321} = 13,013, \quad (10)$$

где $k_{41} = \left| \frac{dx_{31}(x_{4\text{св}})}{dx_4} - \frac{dx_{32}(x_{4\text{св}})}{dx_4} \right|$, $k_{42} = \left| \frac{dx_{31}(x_{4\text{св}})}{dx_4} - \frac{dx_{33}(x_{4\text{св}})}{dx_4} \right|$ и $k_{43} = \left| \frac{dx_{32}(x_{4\text{св}})}{dx_4} - \frac{dx_{33}(x_{4\text{св}})}{dx_4} \right|$ – весовые коэффициенты.

Как видно, решение по среднефункциональному имеет погрешность всего лишь 0,1 %. Здесь возникает необходимость выбора из среднеарифметического и среднефункционального решений, очевидно, что при значительном разбросе частных решений следует воспользоваться среднефункциональным решением, а в остальных случаях можно ограничиться определением среднеарифметического решения.

Далее аналогично предыдущему алгоритму при известном x_4 и независимой переменной x_3 , которая изменяется от 5 до 23, из системы (1) выражаются x_2 при условии избавления от x_1 по (2)

$$\begin{cases} x_{21}(x_3) = \frac{\cos(a_{43}x_4) + \frac{b_2 a_{41} a_{24} x_4}{a_{21}} - \frac{b_2 a_{41} a_{23} x_3}{a_{21}} + a_{42} x_3}{a_{42} - \frac{a_{22} a_{41}}{a_{21}}}; \\ x_{22}(x_3) = \frac{(a_{34} x_4 + a_{33} x_3)^2 + \frac{b_2 a_{31} a_{24} x_4}{a_{21}} - \frac{b_2 a_{31} a_{23} x_3}{a_{21}}}{a_{32} - \frac{a_{22} a_{31}}{a_{21}}}; \\ x_{23}(x_3) = \frac{b_1 + \frac{b_2 a_{11} a_{24} x_4}{a_{21}} - \frac{b_2 a_{11} a_{23} x_3}{a_{21}} - a_{14} x_4 + a_{13} x_3}{a_{12} - \frac{a_{22} a_{11}}{a_{21}}}. \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) имеет три однозначных решения для x_3 (рис.2, б), которые являются локализованными в пределах 9 %. Следовательно, можно говорить при расчете среднеарифметического решения о вероятной ошибке до 10 %, что также недопустимо много в большинстве инженерных расчетов, поэтому для x_3 следует ориентироваться на среднефункциональное решение.

Среднее арифметическое решение для x_3

$$x_{3\text{св}} = \frac{x_{31} + x_{32} + x_{33}}{3} = \frac{18,921 + 17,993 + 17,454}{3} = 18,123. \quad (12)$$

Решение по (12) имеет погрешность приблизительно около 0,7 %, что объясняется кучностью частных решений (рис.2, б).

Среднефункциональное решение

$$x_{3\text{сф}} = \frac{k_{31}x_{31} + k_{32}x_{32} + k_{33}x_{33}}{k_{31} + k_{32} + k_{33}} = \frac{0,177 \cdot 18,921 + 0,488 \cdot 17,993 + 0,311 \cdot 17,454}{0,251 + 89,069 + 89,321} = 17,99, \quad (13)$$

где $k_{31} = \left| \frac{dx_{21}(x_{3\text{св}})}{dx_3} - \frac{dx_{23}(x_{3\text{св}})}{dx_3} \right|$, $k_{32} = \left| \frac{dx_{22}(x_{3\text{св}})}{dx_3} - \frac{dx_{23}(x_{3\text{св}})}{dx_3} \right|$ и $k_{33} = \left| \frac{dx_{22}(x_{3\text{св}})}{dx_3} - \frac{dx_{21}(x_{3\text{св}})}{dx_3} \right|$ – весовые коэффициенты.

Решение по (13) имеет погрешность менее 0,1 %.

Аналогично предыдущему алгоритму при известном x_4 и x_3 , а также независимой переменной x_2 , которая изменяется от 0 до 3, из системы (1) выражаются x_1

$$\begin{cases} x_{11}(x_2) = \frac{\cos(a_{43}x_4) - a_{42}(x_2 - x_3)}{a_{41}}; \\ x_{12}(x_2) = \frac{(a_{34}x_4 + a_{33}x_3)^2 - a_{32}x_2}{a_{31}}; \\ x_{13}(x_2) = \frac{b_1 - a_{14}x_4 + a_{13}x_3 - a_{12}x_2}{a_{11}} \\ x_{14}(x_2) = \frac{b_2}{a_{21}}(a_{23}x_3 - a_{24}x_4) - \frac{a_{22}x_2}{a_{21}}. \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) имеет шесть однозначных решения для x_2 (рис.3, а), которые укладываются в пределах 11 %. При этом три решения практически совпадают ($x_{24} = 1,699$; $x_{25} = 1,7$ и $x_{26} = 1,701$), а три имеют существенные отклонения ($x_{21} = 1,685$; $x_{22} = 1,663$ и $x_{23} = 1,536$). При большом количестве решений как для x_2 при такой наглядной картине можно предположить с высокой долей вероятности, что решение составляет 1,7, но в общем случае необходимо как в предыдущих случаях произвести вычисление среднеарифметического решения, весовых коэффициентов и среднефункционального решения.

Среднее арифметическое решение для x_2

$$x_{2\text{св}} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_{2i} = \frac{1,685 + 1,663 + 1,536 + 1,699 + 1,7 + 1,701}{6} = 1,664. \quad (15)$$

Решение по (15) имеет погрешность приблизительно около 2,1 %, что объясняется выпадением трех корней.

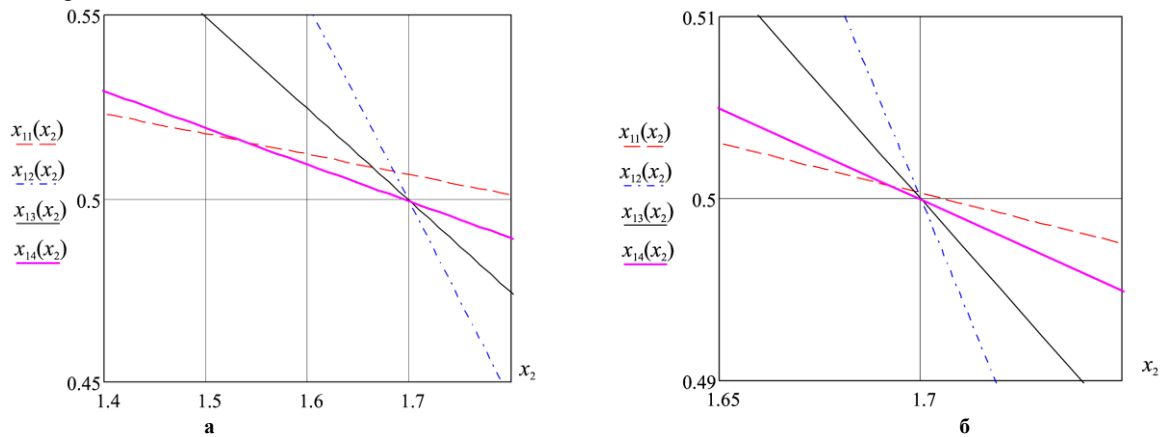


Рис. 3. Графики функциональной сходимости для x_1 при первом (а) и втором (б) прогоне алгоритма

Среднефункциональное решение

$$x_{2\text{сф}} = \frac{\sum_{i=1}^6 k_{2i} x_{2i}}{\sum_{i=1}^6 k_{2i}} = \frac{0,483 \cdot 1,685 + 0,195 \cdot 1,663 + 0,045 \cdot 1,536 + 0,288 \cdot 1,699 + 0,438 \cdot 1,7 + 0,15 \cdot 1,701}{0,483 + 0,195 + 0,045 + 0,288 + 0,438 + 0,15} = 1,686, \quad (16)$$

где $k_{2i} = \left| \frac{dx_{1k}(x_{2\text{св}})}{dx_2} - \frac{dx_{1n}(x_{2\text{св}})}{dx_2} \right|$ – весовые коэффициенты ($k \neq n$, $1 \leq k \leq 6$ и $1 \leq n \leq 6$).

Решение по (16) имеет погрешность 0,81 %.

Таким образом, численным способом с помощью методов квазиконстант и функциональной сходимости определены все корни системы (1) за один проход с погрешностью менее 1 %, что для большинства инженерных расчетов более чем достаточно. Тем не менее, если необходимо повысить точность расчетов следует прибегнуть к использованию итерационного процесса, т.е. повторно задать начальные квазиконстанты, исходя из полученного результата первого прохода. Так x_2 вместо исходных 1,4 (с погрешностью около 21 %) примет значение 1,686 (с погрешностью всего лишь 0,81 %), и повторить расчет, начиная с (8), тогда разброс всех решений становится минимальным. Для x_2 , например, при втором прогоне (рис.3, б) разброс не превышает 0,4 %, а общее решение системы будет: $x_1 = 0,5$ (погрешность приблизительно 0), $x_2 = 1,699$ (погрешность 0,036 %), $x_3 = 18$ (погрешность приблизительно 0), $x_4 = 13,001$ (погрешность 0,0053 %). При третьем проходе погрешность стремится к нулю. Таким образом, при совокупности методов квазиконстант, функциональной сходимости и итерации можно получить любую точность численного решения.

В общем виде применение метода функциональной сходимости для численного решения выглядит следующим образом:

- исходная система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2 \dots x_n) = f_1(x_1, x_2 \dots x_n); \\ F_2(x_1, x_2 \dots x_n) = f_2(x_1, x_2 \dots x_n); \\ \dots \dots \dots \\ F_n(x_1, x_2 \dots x_n) = f_n(x_1, x_2 \dots x_n); \end{cases}$$

- рассчитываются квазиконстанты $x_{k1} \dots x_{kv}$;

- принимается независимая переменная x_p , при $1 \leq p \leq n$ и $p \neq k1 \dots kv$;

- исходная система преобразуется путем исключения неизвестных к виду

$$\begin{cases} x_{m1}(x_p) = G_1(x_p); \\ \dots \dots \dots \\ x_{mq}(x_p) = G_q(x_p); \end{cases}$$

причем $1 \leq q < n$, $m \neq p$ и $m \neq k1 \dots kv$;

- графически решается предыдущая система, ее решение: $x_{p1} \dots x_{pw}$;

- определяется среднеарифметическое решение

$$x_{pca} = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^w x_{pj};$$

- рассчитываются весовые коэффициенты

$$k_j = \left| \frac{dx_{my}(x_{pca})}{dx_p} - \frac{dx_{mz}(x_{pca})}{dx_p} \right|;$$

при условии, что $y \neq z$, y и z изменяются от 1 до q ;

- среднефункциональное решение, являющееся искомым корнем,

$$x_p = x_{pc\phi} = \frac{\sum_{j=1}^w k_j x_{pj}}{\sum_{j=1}^w k_j};$$

- последовательно вычисляются остальные корни системы, путем повторения алгоритма и исключения из списка возможных независимых переменных найденных корней.

Выводы

1. Предложенный метод функциональной сходимости позволяет точно решить системы нелинейных алгебраических уравнений до третьего порядка, а также системы более высокого порядка, поддающиеся последовательному исключению неизвестных до двух-трех оставшихся.

2. Совместно методы квазиконстант и функциональной сходимости позволяют решить численным образом системы нелинейных алгебраических уравнений любого порядка.

3. Использование итерационного приближения для метода функциональной сходимости обеспечивает возможность получения результата любой точности.

Список использованной литературы

1. Sesanga, B. Ranges optimization of electrical machine using component sharing [Text] / B. Sesanga, F. Wurtz, A. Foggia // Author manuscript, published in «XI-th International Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism» (OIPE 2010), Sofia: Bulgaria. 2010. – pp. 51-52.

2. Кімстач, О.Ю. Проектування асинхронних двигунів малої і середньої потужності загального призначення з короткозамкненим ротором: навчальний посібник [Текст] / О.Ю.Кімстач – Миколаїв; НУК, 2015. – 188 с.
3. Гольдберг, О.Д. Проектирование электрических машин [Текст] / О.Д. Гольдберг, И.С. Свириденко; Под ред. О.Д. Гольдберга. – М.: Высш. шк., 2006. – 430 с.
4. Гридин, В.М. Расчет параметров схемы замещения асинхронных двигателей по каталожным данным [Текст] / В.М. Гридин // Электричество. № 5, 2012. С. 40-45.
5. Визначення електромеханічних параметрів та характеристик асинхронних двигунів за табличними даними [Текст]: звіт про НДР (закл.) / НУК; кер. О.Ю. Кімстач. – Миколаїв, 2016. – 57 с. – № ДР 0116U007797.
6. Ромашихин, Ю.В. и др.. Эффективность численных методов решения систем нелинейных уравнений баланса составляющих мгновенной мощности [Текст] / Ю.В. Ромашихин, Д.А. Мосюндз, Н.А. Руденко Д.И. Родькин // Електромеханічні і енергозберігаючі системи. № 2/2012 (18) – С. 27-34.
7. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
8. Гусак, А.А. и др.. Справочник по высшей математике [Текст] / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричкова. – Мн.: ТетраСистемс. 1999. – 640 с.
9. Овчинников, П.П., Михайленко, В.М. Вища математика: Підручник [Текст]. У 2ч. Ч.2.; Пер. з рос. Є.В. Бондарчук, Ю.Ю. Костриці, Л.П. Оніщенко. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
10. Кімстач, О.Ю. Метод квазіконстант [Електронний ресурс] / О.Ю. Кімстач // Електронне видання «Вісник Національного університету кораблебудування». – Миколаїв: НУК, 2012. – № 2 – Режим доступу: <http://ev.nuos.edu.ua>.