УДК 631.3:528.8:681.518

О.О. БРОВАРЕЦЬ
Київський кооперативний інститут бізнесу і права

МЕТОДИКА ПОТРІЙНОЇ ТРИЛАТЕРАЦІЇ ВИЗНАЧЕННЯ НАДТОЧНИХ КООРДИНАТ МІСЦЕЗНАХОДЖЕННЯ ОБ'ЄКТА

Методика потрійної трилатерації визначення надточних координат місцезнаходження об'єкта відноситься до галузі фізики, геодезичних і навігаційних вимірів та може бути використана в авіації, космонавтиці, машинобудуванні, будівництві та інших галузях техніки, системах пошуку об'єктів, транспортних засобів, навігації та контролю автоперевезень, для визначення прямокутних координат, способів і пристроїв по визначенню кутових координат цілі, координат точок на земній поверхні, плоских прямокутних координат контурних точок місцевості, географічних координат об'єктів, транспортних засобів відносно базових станцій, геодезичного забезпечення вишукувань у містах, селищах, при різних вишукуваннях, на площадках промислового і житлового будівництва, при будівництві підземних комунікацій, у маркшейдерських роботах, при землевпорядженні, меліорації земель, земельному кадастрі, при виконанні господарських робіт на щільно забудованих територіях, при побудови систем цілеуказання.

Ключові слова: трилатерації, координати, місцезнаходження об'єкта.

А.А. БРОВАРЕЦ
Киевский кооперативный институт бизнеса и права

МЕТОДИКА ТРОЙНОЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕРХТОЧНЫХ КООРДИНАТ МЕСТОНАХОЖДЕНИЯ ОБЪЕКТА

Методика тройной трилатерации определения сверхточных координат местонахождения объекта относится к отрасли физики, геодезических и навигационных измерений и может быть использована в авиации, космонавтике, машиностроении, строительстве и других отраслях техники, системах поиска объектов, транспортных средств, навигации и контроля автоперевозок, для определения прямоугольных координат, способов и устройств по определению угловых координат цели, координат точек на земной поверхности, плоских прямоугольных координат контурных точек местности, географических координат объектов, транспортных средств относительно базовых станций, геодезического обеспечения изысканий в городах, поселках, при разных изысканиях, на площадках промышленного и жилищного строительства, при строительстве подземных коммуникаций, в маркшейдерских работах, при землеустройстве, мелиорации земель, земельном кадастре, при выполнении хозяйственных работ на плотно застроенных территориях, при построения систем целеуказания.

Ключевые слова: трилатерации, координаты, местонахождение объекта.

O. BROVARETS
Kyiv cooperative institute of business and right

METHOD OF TRIPLE THREELATERACII OF DETERMINATION OF OVER EXACT COORDINATES OF LOCATION OF OBJECT

The method of triple whole pointing determination of надточних co-ordinates of location of object behaves to industry of physics, geodesic and navigation measurings and can be utillized in an aviation, cosmonautics, engineer, building and other industries of technique, systems of search of objects, transport vehicles, navigation and control of autotransportations, for determination of rectangular coordinates, methods built on aims on determination of angular coordinates, coordinates of points on an earthly surface, flat rectangular co-ordinates of contour points of locality, geographical coordinates of objects, transport vehicles in relation to the base stations, geodesic providing of pretentious novelties in cities, settlements, at different pretentious novelties, on the grounds of industrial and housing building, at building of underground communications, in surveyor works, at organization of the the use of land, land-reclamation of earths, landed cadastre, at implementation of economic works on densely builtup territories, at constructions of the systems of whole pointing.

Keywords: threelateracii , coordinates, locations of object.

Постановка проблеми

Космічна навігація стає невід'ємною складовою функціонування багатьох систем людської діяльності. Визначення місцеположення, прокладання курсу, водіння агрегатів заданим курсом з мінімальним відхиленням – далеко неповний перелік застосування GPS-навігації. Велике значення має точність визначення місцезнаходження GPS-приймача. Координати приймача не можуть бути визначені абсолютно точно, але похибка має бути мінімальною. Вона може бути зменшена, якщо відомі точні координати певної наземної станції або, принаймні, вони визначені достатньо точно. В роботі розглядаються різні підходи визначення координат базової станції на основі визначених із похибками координат декількох точок.

Система наземних станцій траєкторних вимірів для навігаційно-балістичного забезпечення космічних апаратів має обмежені можливості по зоні дії і точнісним характеристикам.

Останнім часом актуальними стали завдання створення бортових навігаційних систем з використання супутникової навігації. Успіхи технологій супутникової навігації дозволили, окрім завдання, визначення координат і швидкості носія навігаційного приймача реалізувати такі задачі, як визначення кутової орієнтації власної системи координат об'єкта відносно топоцентричної (локальної) системи координат [1] завдяки використанню допоміжних пристроїв та алгоритмів. Але успішне вирішення перелічених задач можливо, якщо навігаційний приймач прийме сигналів не менш ніж від 4 супутників. В той же час при русі космічного апарата по високоеліптичній орбіті ці умови часто не виконуються.

Відомий спосіб коректування вишукувань за допомогою супутникової навігаційної системи [2], що складається з визначення координат шуканої точки згущення, яка вставляється в опорну мережу відомих точок відносно координат цих відомих точок, а координати шуканої точки визначаються за допомогою супутникової навігаційної системи. На шуканій точці мережі згущення закладаються пункти, виміряються кути. Координати відомих точок і виміряні кути на шуканій точці дозволяють визначити координати шуканої точки.

Аналог не дозволяє виключити спотворювання сигналів від супутників навігаційної системи через наявність високих будівель, ліній електропередач, дерев.

Відомий спосіб коректування вимірів при детальних розподільних роботах на високих монтажних горизонтах [3], що полягає у визначенні електронним тахеометром місць розташування характерних точок спорудження, тільки по їхніх координатах, що визначають прокладкою тахеометричного ходу, при уведенні поправок у координати точок.

Найбільш близький аналог не дозволяє скорочувати витрати при виключенні спотворювань сигналів від супутникової навігаційної системи.

Відомий спосіб визначення просторових координат центра проекції знімальної камери полягає у тому, що на земній поверхні в районі аерофотознімання встановлюють GPS-приймач; на борту рухомого об'єкта встановлюють знімальну камеру і бортовий GPS-приймач, з'єднують їх між собою, приймають сигнали з бортового GPS-приймача і керують знімальною камерою [4].

Однак відомий спосіб не завжди забезпечує точність визначення просторових координат, необхідну для складання карт великих масштабів. Знімальна камера, яку встановлюють на борту рухомого об'єкта, наприклад, літаку виконує знімання земної поверхні у деякі проміжки часу з інтервалами, які пов'язані з технічною необхідністю підготовки камери до знімання. Координати центра проекції знімальної камери визначають бортовим GPS-приймачем, який встановлюють на борту цього ж рухомого об'єкта.

Відомий спосіб коректування вимірів при детальних розподільних роботах на високих монтажних горизонтах [5], що включає визначення тахеометричним ходом координат шуканих характерних точок спорудження, розташованих на проміжних поверхах і дахах, від координат найближчих відомих пунктів.

Аналог не визначає координати шуканих характерних точок спорудження за допомогою спостережень сигналів супутників навігаційної системи.

Відомий спосіб визначення координат шуканих точок при виконанні вишукувань за допомогою супутникової системи [6], що включає рекогносцировку найближчих відомих пунктів геодезичної мережі і об'єкта зйомки, розташування шуканих точок на верхніх частинах конструкцій і зовнішніх частинах фасадів будинків і на земній поверхні, визначення необхідної точності характерних і вихідної шуканих точок, прийом сигналів супутникової навігаційної системи у характерних точках, виконання вимірів.

Найбільш близький аналог становить значну небезпеку при прийомі сигналів супутникової навігаційної системи у характерних шуканих точках безпосередньо на краю даху висотної будівлі.

Відомий спосіб визначення координат точок на земній поверхні полягає у тому, що проводять польове рекогносцирування місцевості, позначають на місцевості точки геодезичної мережі, визначають оптимальну схему вимірів максимальної інформативності, формують оптимально необхідні сесії вимірів, встановлюють системи GPS у точках мережі, виконують виміри і визначають положення точок на земній поверхні [7].

Однак, на точність визначення планових координат точок на земній поверхні системами GPS впливають різноманітні фактори, зокрема, інструментальні похибки GPS-приймачів. Результати високоточних вимірів, виконаних GPS-приймачами, спотворюються у результаті того, що фазовий центр супутникової антени не збігається з її віссю обертання. Величина розбіжності може сягати кількох міліметрів. Тому у прецизійних GPS-вимірюваннях субміліметрової точності такі величини спотворень необхідно враховувати. Дані вимірів опрацьовують програмними пакетами фірм виробників GPS-апаратури і з обов'язковим суміщенням початкової та кінцевої точок.

Відомі GPS - способи визначення координат статичного тіла, що забезпечують високу точність визначення координат при умові тривалих за часом вимірів на нерухомій основі [8].

Також відомі GPS-способи, що дозволяють виконувати визначення координат в режимі руху з короткими зупинками в необхідних точках [9].

Недоліком запропонованих способів є низька їх точність та статичне вимірювання для точного визначення координат, що унеможливлює їх використання на рухомих об’єктах.

Відомі навігаційні GPS-способи, що працюють в умовах динаміки рухомих об'єктів [9, 10].

Відомим аналогом до винаходу, що заявляється, є спосіб визначення координат точок на земній поверхні полягає у тому, що встановлюють пристрій для закріплення антени GPS-приймача з можливістю переміщення її заданою траєкторією із центром на прямовисній лінії, що проходить через точку, координати якої визначають, виконують вимірювання із визначенням положення центра антени [11].

Найбільш близьким аналогом запропонованого способу, що можна прийняти за прототип, є спосіб GPS-визначення координат на рухомому об'єкті [10], що основану на визначенні координат одночасно групою GPS-приймачів.

Недоліком запропонованого способу є відсутність чіткої методики визначення координат групою GPS-приймачів із врахуванням їх взаємного розміщення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Координати точки, в якій знаходиться GPS-приймач, будуть визначені із певною похибкою, як і інших точок. Щоб знайти уточнене значення координат певної точки на основі координат інших точок, потрібно спиратися на відомі факти. Такими фактами можуть бути відомі відстані між GPS-приймачами, кути між лініями, що їх з’єднують тощо. Один із варіантів – розміщення приймачів на прямих лініях, що перетинаються в точці, координати якої уточняємо. Після обробки прийнятих сигналів і отриманні координат точок розміщення приймачів побудовані точки за отриманими координатами не будуть лежать на цих лініях, а будуть знаходитися біля них (можливий варіант, що якась точка попаде на пряму). За масивом цих точок маємо провести якусь усереднену пряму, яка в ідеальному випадку має збігатися із відомою. На перетині двох усереднених прямих буде знаходитися точка із уточненими координатами. Чим більше точок на прямій буде обрано для експерименту, тим точніше буде визначено положення усередненої прямої.

Мета досліджень

Розробити методику потрійної трилатерації визначення надточних координат місцезнаходження об’єкта.

Викладення основного матеріалу досліджень

Для знаходження усередненої прямої за заданим масивом експериментальних точок використовується метод найменших квадратів. Його суть полягає в тому, що оцінюється сумарна величина відхилень ординат кожної точки від розшукуваної прямої і знаходиться така пряма, для якої ця сума буде мінімальною. Щоб додатні і від’ємні відрізки не взаємопогашалися, вони беруться у квадрати, звідки і пішла назва методу.

Нехай пряма буде задана параметричними рівняннями:

$$x = u\cos\alpha + x_0; \qquad y = u\sin\alpha + y_0, \tag{1}$$

де u – довжина відрізка на прямій, відлік якого починається із точки з координатами x_0, y_0;

α – кут нахилу прямої до осі OY.

Візьмемо дві прямі, нахилені до осі X під кутом $\pm 60^0$ (вони будуть симетричні відносно осі Y). На цих прямих знайдемо по дві точки на відстані 100 і 200 лінійних одиниць в обидві сторони від точки перетину прямих. Нехай це буде точка $x_0=5,\ y_0=10$. Підставляючи ці дані в рівняння (1), отримаємо координати чотирьох точок на кожній із двох прямих. Одна точка № 0 ($x_0=5,\ y_0=10$) буде спільною (табл. 1).

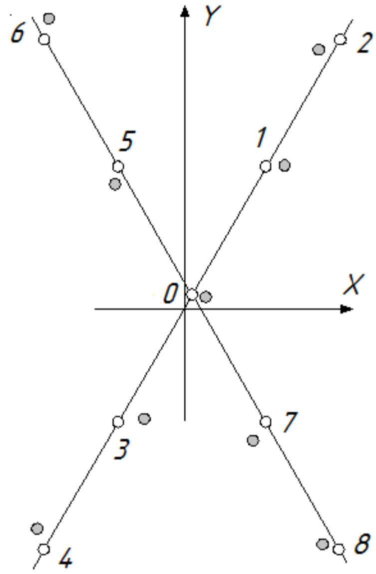


Рис.1. Координати точок розташування GPS-приймачів (світлий колір) та обчислені за їх сигналами (сірий колір)

Таблиця 1

Координати точок, що належать двом прямим, які перетинаються

	Пряма для $\alpha=60^0$				Пряма для $\alpha=-60^0$				Спільна точка 0
№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	
x	55	105	-45	-95	-45	-95	55	105	5
y	96,6	183,2	-76,6	-163,2	96,6	183,2	-76,6	-163,2	10

На рис. 1 побудовані прямі із точками, що до них належать. У кожній із цих точок знаходиться GPS-приймач, який показав своє місцезнаходження із певною похибкою (точки неточного місцезнаходження зафарбовані в сірий колір). Координати цих точок, обчислені після надходження сигналу на GPS-приймач, наведені в табл. 2 (їх нумерація така ж сама, а для відмінності над цифрою стоїть риска).

Таблиця 2

Координати точок, отриманих із GPS-приймачів

№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	0
x	67,7	90,9	-27,2	-99,7	-47	-91,8	46,4	93,5	14,5
y	97,5	175,9	-74,3	-148,8	84,6	197	-89,1	-159,4	8,3

Застосуємо метод найменших квадратів. Він полягає в тому, що потрібно мінімізувати суму:

$$F(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2, \tag{2}$$

де $y=ax_i+b$ - рівняння прямої, яка проходить через i-ту точку. Потрібно знайти таку функцію $F=F(a,b)$, щоб сума (2) була мінімальною. Для цього візьмемо частинні похідні по a і b і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a}=0;\\ \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b}=0.\end{cases} \tag{3}$$

Беремо частинні похідні:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]x_i=0;\\ \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]=0.\end{cases} \tag{4}$$

Розкриваємо суми (4):

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i ; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i . \end{cases} \qquad (5)$$

Розв'язуємо систему (5) відносно *a* і *b*:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (6)$$

де *n* – число точок.

Знайдемо рівняння прямих у явному вигляді *y=ax+b*. Наприклад, для першої прямої, яка проходить через точки 1-2-3-4 візьмемо дві із них (наприклад, точки 1 і 2) і по черзі підставимо їх координати у рівняння прямої:
96,6y=55a+b і *183,2y=105a+b*. Розв'язуємо отриману систему і знаходимо: *a=1,732, b=1,34*. Аналогічно знаходимо ці коефіцієнти для другої кривої. Таким чином, явні рівняння прямих запишуться:
- перша крива: *y=1,732x+1,34*; - друга крива: *y=-1,732x+18,66*. (7)

Знайдемо коефіцієнти *a* і *b* для усереднених кривих за формулами (6). Для цього скористаємося середовищем «Mathematica». Нижче наведена формула для визначення коефіцієнта *a* першої прямої:

$$\begin{gathered} n = 5; x0 = 14.5; x1 = 67.7; x2 = 90.9; x3 = -27.2; x4 = -99.7; \\ y0 = 8.3; y1 = 97.5; y2 = 175.9; y3 = -74.3; y4 = -148.8; \\ N\left[\frac{\begin{gathered} n*(x0*y0 + x1*y1 + x2*y2 + x3*y3 + x4*y4) - \\ -(x0 + x1 + x2 + x3 + x4)*(y0 + y1 + y2 + y3 + y4) \end{gathered}}{n*\left(x0^2 + x1^2 + x2^2 + x3^2 + x4^2\right) - (x0 + x1 + x2 + x3 + x4)^2}\right] \end{gathered} \qquad (8)$$

Результатом виконання є *a=1,674*. Скористаємося другою формулою (6), попередньо присвоївши для *a* знайдене значення:

$$\begin{gathered} a = 1.674; n = 5; x0 = 14.5; x1 = 67.7; x2 = 90.9; x3 = -27.2; x4 = -99.7; \\ y0 = 8.3; y1 = 97.5; y2 = 175.9; y3 = -74.3; y4 = -148.8; \\ N\left[\frac{(y0 + y1 + y2 + y3 + y4) - a(x0 + x1 + x2 + x3 + x4)}{n}\right]. \end{gathered} \qquad (9)$$

В результаті обчислень (9) отримуємо: *b=-3,748*. Аналогічно знаходимо коефіцієнти для другої усередненої прямої, задавши значення координат точок 0, 5, 6, 7, 8: *a=-1,895; b=14,192*. Явні рівняння усереднених прямих запишуться:

- перша крива: *y=1,674x-3,748*; - друга крива: *y=-1,895x+14,192*. (10)

Якщо у формули (8), (9) ввести значення координат точок, що лежать на прямій, то ми отримаємо коефіцієнти, як у рівняннях (7). Отримані рівняння (10) значно відрізняються від рівнянь (7), однак це ще нічого не означає, оскільки нам потрібно порівняти точку перетину цих прямих із точкою 0 (5, 10). Для знаходження точки перетину прирівнюємо між собою рівняння (10): *1,674x-3,748=-1,895x+14,192*. Звідси знаходимо: *x=5,04*. Отже перша координата знайдена досить точно. Підставимо її в одне із рівнянь (10) і отримаємо: *y=4,66*. Отже, друга координата має значну похибку. Для наочності побудуємо усереднені прямі і порівняємо їх точку перетину із відомою точкою. На рис. 2 побудовано обмежений фрагмент точок, представлених на рис. 1, а також усереднені прямі, зображені штриховою лінією. Їх точка перетину 0_1 краще наближена до точного значення (точки *0*) в порівнянні із наближенням кожної окремої точки до свого точного розташування, однак похибка досить значна. Будемо шукати інші шляхи зменшення похибки. Можна шукати не два коефіцієнти *a* і *b* для прямих, а тільки один – *b*, оскільки точне значення коефіцієнта *a*, який визначає нахил прямих, відомий: *b=±1,732*. В цьому випадку усереднені прямі будуть перетинатися під тим же кутом, що і початкові прямі, а коефіцієнтом *b* буде знайдена така висота підйому цих прямих, котра забезпечить мінімальну величину сумарного відхилення сірих точок (на рисунках) від них. В цьому випадку оптимізація по *a* не проводиться, тобто перша частинна похідна в (4) не береться, а використовується тільки друге рівняння

(6). У вираз (9) підставляємо *a=1,732* і знаходимо: *b=-4,28*. Аналогічно знаходимо *b* для другої прямої при *a=-1,732* і координатах точок *0, 5, 6, 7,8*: *b=13,68*. Перетин знайдених кривих дає точку з координатами (*5,18; 19,41*). Без побудови точки видно, що похибка зросла.

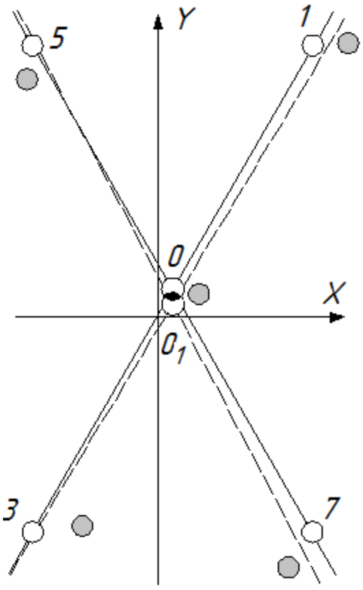


Рис. 2. Знаходження точки 0_1 на перетині усереднених прямих

Дві четвірки точок знаходяться на однаковій відстані від точки *0*: точки *1, 3, 5, 7* – на відстані 100 лін. од. і точки *2, 4, 6, 8* – на відстані 200 лін. од. Відомо, що через три точки можна провести коло. Таким чином, через кожну четвірку точок можна провести чотири кола, тобто загалом вісім, усі центри яких мають бути розташовані біля точки *0*. Знайдемо вирази для знаходження радіуса і центра кола, заданого трьома точками. Неявне рівняння радіуса *R* з координатами центра x_0, y_0 кола має вигляд:

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2. \qquad (11)$$

Підставимо в (11) по черзі координати кожної із трьох точок і отримаємо систему трьох рівнянь із трьома невідомими: x_0, y_0 і R. За допомогою програмного продукту «Mathematica» отримаємо наступний розв'язок:

$$R=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\left[\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2\right]\left[\left(x_3-x_1\right)^2+\left(y_3-y_1\right)^2\right]\left[\left(x_3-x_2\right)^2+\left(y_3-y_2\right)^2\right]}}{x_1\left(y_3-y_2\right)+x_2\left(y_1-y_3\right)+x_3\left(y_2-y_1\right)}; \qquad (12)$$

$$x_0=\frac{1}{2}\frac{\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(y_2-y_3\right)+\left(x_2^2+y_2^2\right)\left(y_3-y_1\right)+\left(x_3^2+y_3^2\right)\left(y_1-y_2\right)}{x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)}; \qquad (13)$$

$$y_0=\frac{1}{2}\frac{\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_3-x_2\right)+\left(x_2^2+y_2^2\right)\left(x_1-x_3\right)+\left(x_3^2+y_3^2\right)\left(x_2-x_1\right)}{x_1\left(y_2-y_3\right)+x_2\left(y_3-y_1\right)+x_3\left(y_1-y_2\right)}. \qquad (14)$$

За допомогою формул (12), (13), (14) було знайдено радіуси усіх восьми кіл і координати їх центрів. Ці дані наведені в табл. 3

Таблиця 3

Дані про кола, які проходять через три точки, що наближені до відомих кіл

	Кола радіуса R=100				*Кола радіуса R=200*			
Точки	*1, 3, 5*	*3, 5, 7*	*1, 3, 7*	*1, 5, 7*	*2, 4, 6*	*4, 6, 8*	*2, 6, 8*	*2, 4, 8*
R	98,1	104	98,5	101,1	189,1	200,9	202,4	188,6
x_0	19,2	28,7	27,6	19,6	-19,4	6,5	-21,1	5,8
y_0	12,1	13,4	7.6	8,4	22,4	21,8	7,4	7,6

Для наочності центри усіх восьми кіл в масштабі побудовано на рис. 3. Щоб оцінити ступінь відхилення від точного значення, показана точка 0 (чорний колір) і точка 01 (сірий колір). Ці точки показані на рис. 2. Аналізуючи розташування точок, можна зробити висновок, що вони не можуть бути основою для відшукання усередненої точки, яка б максимально була наближена до точки *0*. Всі вони розташовані в хаотичному порядку на значній віддалі від точки *0* окрім однієї точки, яка добре наближена до неї.

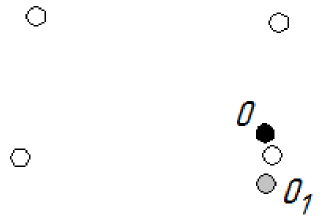


Рис. 3. Центри кіл за табл. 3

Застосуємо метод найменших квадратів до точок, які розташовані біля кола заданого радіуса. Ці точки ми одержимо, якщо GPS-приймачі розмістимо на колі у точках з відомими координатами. Координати цих приймачів після обробки сигналу будуть вказувати на точку, яка з певною похибкою буде знаходитися поруч з приймачем, тобто недалеко від кола. Для обробки масиву таких точок потрібно скласти цільову функцію, подібну до (2). Із (11) знаходимо:

$$y = \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + y_0 . \tag{15}$$

За аналогією із (2) можна записати:

$$F(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(\sqrt{R^2 - (x_i - x_0)^2} + y_0 \right) \right]^2 . \tag{16}$$

Далі потрібно брати частинні похідні по x_0 *і* y_0, прирівнювати їх до нуля і розв’язувати систему рівнянь відносно x_0 *і* y_0. Пошук у цьому напрямі показав, що система не має аналітичного розв’язку і навіть чисельними методами сучасні математичні пакети її не розв’язують, не дивлячись на невелику кількість задіяних точок. Можна піти по іншому шляху – мінімізувати не різницю ординат, а різницю відстаней від точок до кола, відрізки яких будуть приблизно перпендикулярні до нього. В такому випадку відстань від центра кола до точки на ньому запишеться:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} . \tag{17}$$

Знак рівності в (17) справедливий для точок, які належать колу. Якщо точки будуть за межами кола, виникне певна різниця у відстані, і суму цих різниць потрібно мінімізувати. Отже, можемо записати:

$$F(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} - R \right)^2 . \tag{18}$$

Мінімізація виразу (18) має такі ж само проблеми, як і мінімізація виразу (16). Ці проблеми виникають через наявність у цільовій функції підкореневого виразу. Проте цьому можна зарадити. Будемо мінімізувати не різницю відстаней, а квадрат цієї різниці, причому мінімізацію будемо проводити не тільки по x_0 *і* y_0, а ще і по R. Отже, запишемо:

$$F(x_0, y_0, R) = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right]^2 . \tag{19}$$

Візьмемо частинні похідні по x_0, y_0, і R:

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, R)}{\partial x_0} = -4 \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] (x_i - x_0). \tag{20}$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, R)}{\partial y_0} = -4 \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] (y_i - y_0). \tag{21}$$

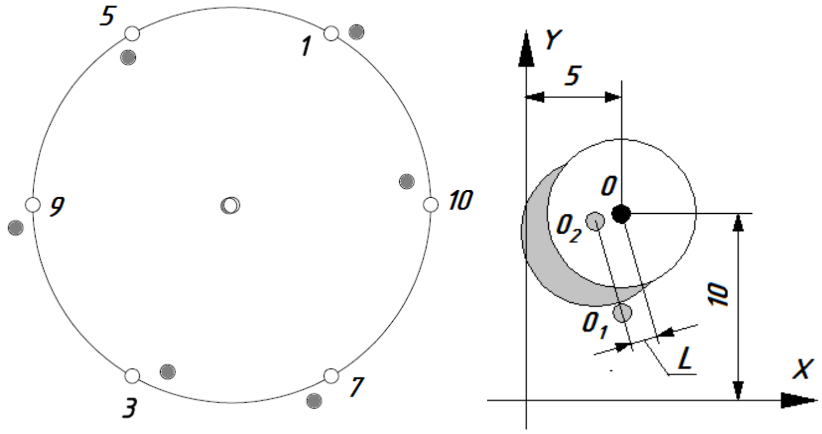
$$\frac{\partial F(x_0, y_0, R)}{\partial R} = -4 \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] R. \tag{22}$$

Прирівняємо похідні (20), (21), (22) до нуля і отримаємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими x_0, y_0 і R:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] (x_i - x_0) = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] (y_i - y_0) = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - R^2 \right] = 0. \end{cases} \qquad (23)$$

При складанні системи (23) ми вилучили із рівнянь (20), (21), (22) сталий множник «-4», а також із рівняння (22) $R \neq 0$, оскільки вони не впливають на розв'язок, а наявність R в останньому рівнянні дає декілька зайвих розв'язків із $R=0$. Взагалі система (23) розв'язується чисельними методами і має багато розв'язків, серед яких є і уявні. Серед них потрібно вибрати дійсний, який дає найкраще наближення до відомого радіуса R. Можна розв'язувати систему із двох останніх рівнянь (23), оскільки величина радіуса R нам відома. Тоді серед запропонованих розв'язків потрібно вибрати реальні значення x_0 *і* y_0.

Застосуємо отриману систему (23) до знаходження координат точки *0* за чотирма точками *1, 3, 5, 7* і *2, 4, 6, 8,* які лежать на колах. Нижче наведено систему в середовищі Mathematica із заданими координатами точок для меншого кола (для зручності вони перераховані по порядку) і результат розв'язку. Реальний розв'язок підкреслено.



а б

Рис. 4. Позначення точок на колі та біля нього із точним та усередненими центрами:
а) точки на колі та біля нього із зображенням точного і усередненого положення центрів;
б) збільшене зображення розташування точного і усереднених положення центрів

Отже, не дивлячись на досить точне значення радіуса $R=100,1$ координати точки *0 (23,3; 10,0)*, а саме координата x, мають значну похибку. Застосування системи (23) для більшого кола теж дає значну похибку.

Очевидно, що точність обчислень має зростати по мірі збільшення точок, які належать колу. Доповнимо точки *1, 3, 5, 7* ще двома *9* і *10*, які мають точні координати на колі: *9(-90, 10), 10(110, 10)*. Нехай GPS-приймачі надали наступні координати цих точок: $\overline{9}$*(-103,5, -1,5)*, $\overline{10}$*(92,9, 21,8)*. До зазначених чотирьох точок добавимо ще дві: : $\overline{9}$ і $\overline{10}$. Застосуємо систему (23) і отримаємо: $R=99,4$; $x_0=3,6$; $y_0=9,6$. Якщо взяти до уваги, що радіус відомий ($R=100$), і розв'язати систему (23) з двома останніми рівняннями, то результатом з одним знаком після коми буде такий же само. Цей результат є доволі точним. Для наочності на рис. 4,а в масштабі побудовані точки з точними координатами (світлі) і на основі обробки сигналу GPS-приймачів (сірі), а також центр кола (точне і усереднене значення). Радіус всіх кіл, якими позначено точки, рівний *4* лін. од.

Точне і усереднене положення точки *0* досить добре наближені (кола, що їх зображають, майже збігаються). Із рис. 4,а видно, що знайдені координати усередненої точки центра кола досить добре узгоджується із його точним розташуванням. На рис. 4,б в масштабі показано розташування точного *0* і наближеного 0_2 центрів кіл. Крім того, показано точку 0_1 перетину усереднених прямих (10). Точки *0* і 0_2 зображені двома колами, більші із яких мають радіус *4* лін. од.

```
In[6]:=
x1 = 67.7; x2 = -27.2; x3 = -47; x4 = 46.4; y1 = 97.5; y2 = -74.3; y3 = 84.6;
y4 = -89.1;
NSolve[
 {(-r^2 + (-a + x1)^2 + (-b + y1)^2) + (-r^2 + (-a + x2)^2 + (-b + y2)^2) +
    (-r^2 + (-a + x3)^2 + (-b + y3)^2) + (-r^2 + (-a + x4)^2 + (-b + y4)^2) +
    (-r^2 + (-a + x5)^2 + (-b + y5)^2) + (-r^2 + (-a + x6)^2 + (-b + y6)^2) == 0,
  (-b + y1) * (-100^2 + (-a + x1)^2 + (-b + y1)^2) +
    (-b + y2) * (-r^2 + (-a + x2)^2 + (-b + y2)^2) +
    (-b + y3) * (-r^2 + (-a + x3)^2 + (-b + y3)^2) +
    (-b + y4) * (-r^2 + (-a + x4)^2 + (-b + y4)^2) +
    (-b + y5) * (-r^2 + (-a + x5)^2 + (-b + y5)^2) +
    (-b + y6) * (-r^2 + (-a + x6)^2 + (-b + y6)^2) == 0,
  (-a + x1) * (-r^2 + (-a + x1)^2 + (-b + y1)^2) +
    (-a + x2) * (-r^2 + (-a + x2)^2 + (-b + y2)^2) +
    (-a + x3) * (-r^2 + (-a + x3)^2 + (-b + y3)^2) +
    (-a + x4) * (-r^2 + (-a + x4)^2 + (-b + y4)^2) +
    (-a + x5) * (-r^2 + (-a + x5)^2 + (-b + y5)^2) +
    (-a + x6) * (-r^2 + (-a + x6)^2 + (-b + y6)^2) == 0}, {r, a, b}]

Out[6]= {{r → -46.533 + 255.956 i, a → 23.4792 - 4.00999 i, b → 19.4377 - 272.206 i},
  {r → -46.533 - 255.956 i, a → 23.4792 + 4.00999 i, b → 19.4377 + 272.206 i},
  {r → -100.139, a → 23.3403, b → 10.0087},
  {r → 100.139, a → 23.3403, b → 10.0087},
  {r → 46.533 + 255.956 i, a → 23.4792 + 4.00999 i, b → 19.4377 + 272.206 i},
  {r → 46.533 - 255.956 i, a → 23.4792 - 4.00999 i, b → 19.4377 - 272.206 i}}
```

Для оцінки точності знайденого розв'язку можна порівняти ступінь відхилення різниці L між точним і наближеним розташуванням центрів (рис. 4,б) і середнім відхиленням $L_{сер}$ між точним і наближеним розташуванням кожної із шести ($n=6$ в даному випадку) точок. Абсолютне значення середнього відхилення знайдемо за формулою:

$$L_{сер} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(\bar{x}_i - x_i\right)^2 + \left(\bar{y}_i - y_i\right)^2}\ . \qquad (24)$$

Підставивши в (24) значення координат шести точок, отриманих із GPS-приймача, і координати відповідних точок точного розташування їх на колі, знаходимо абсолютне значення середньої похибки: $L_{сер}=16,1$ лін. од. За формулою (24) знаходимо при $n=1$ знаходимо абсолютне значення L (рис. 4,б): $L=\sqrt{(3{,}6-5)^2+(9{,}6-10)^2}=1{,}5$. Таким чином, похибка знаходження точного розташування центра кола становить 1,5*100/16,1=9,3% в порівнянні із середньою похибкою знаходження координат окремих точок. Це означає, що для нашого конкретного випадку точність вимірювання зросла приблизно в десять разів в порівнянні із окремими точками.

Висновки

Для визначення уточнених значень координат певної точки за даними наближених значень GPS-зйомки декількох точок потрібно відштовхуватися від відомого їх розташування: на прямих лініях, на колі тощо. Для цього доцільно застосовувати метод найменших квадратів. При розташуванні GPS-приймачів на прямих лініях усереднена точка перетину знайдених усереднених прямих має аналітичний вираз для знаходження координат, що пришвидшує їх знаходження. При розташуванні GPS-приймачів на колі координати усередненої точки (центра кола) потрібно шукати за допомогою чисельних методів, проте при цьому зростає точність визначення координат. Точність також зростає по мірі збільшення числа точок – місць розташування GPS-приймачів.

Список використаної літератури

1. Инструкция по фотограмметрическим работам при создании топографических карт и планов - М.: «Недра», 1974.), определение координат наблюдаемого объекта (Руководство по фототопографическим работам при топогеодезическом обеспечении войск. Часть 2. - М.:РИО, ВТС, 1981.
2. Могильний С.Г., Гавриленко Ю.М., Ахоніна Л.І., Креніда Ю.Ф. Геодезія. Частина перша: Підручник. 3-є вид., випр. та доп. / За заг. ред. Могильного С.Г. і Гавриленко Ю.М. Донецьк: 2009.-514 с.
3. Патент РФ №2269095, МПК 7, G01C07/02, E04B1/18. Хакимуллин Н.М. і ін. 19.03.2004.
4. Дорожинський О.Л., Основи фотограмметрії. - Львів, Видавництво національного університету „Львівська політехніка", 2003 р., с. 47-49.
5. Патент РФ № 2269095, МПК G01C 07/02, E04B 1/18 від 19.03.2004.
6. Патент України винаходу № 98396, МПК G01C 21/00, від 10.05.2012.
7. Спосіб визначення положення точок на земній поверхні. Деклараційний патент на винахід 42431. Україна, МПК G01C5/00/К.Третяк (Україна) - N2001021169; заявлено 19.02.2001; опубл. 15.10.2001, бюл.№9, 5ст.
8. Глобальна система визначення місцеположення (GPS). Теорія і практика / Б. Гофманн-Велленгоф, Г. Ліхтенеггер, Д. Коллінз; Пер. з англ. третього вид. під ред. Я.С. Яцківа. - Київ: Наук. Думка, 1995 - 380с.
9. Жигулін В.М., Корольов В.М., Волчко П.І., Макаревич В.Д., Липський В.Т. Місце ГІС - технологій в системах управління взаємодією у підрозділах сухопутних військ тактичної ланки \\ Інженерна геодезія. - 2003. - №49. - С.95-101.
10. Корольов В.М. До питання комплексування автономної системи навігації із супутниковою радіонавігаційною системою в інтересах навігації наземного рухомого об'єкту \\ Вісник геодезії та картографії. - 2005. - №1. - С.8-13.
11. Патент RU N2116656 G01S7/36, H01G3/02, публ. 27.07.1998 «Способ проведения геодезических измерений с использованием глобальных спутниковых радионавигационных систем и устройство для его осуществления».