УДК 004.942

В.Ф. МИРГОРОД
Військова академія (м. Одеса)
І.М. ГВОЗДЕВА
Національний університет "Одеська морська академія"

ЧИСЕЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ З СЕПАРАБЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

Пропонується і обгрунтовується підхід до дослідження властивостей аналітичних і обчислювальних рішень систем інтегральних рівнянь Вольтерри II -го роду. Підхід заснований на знаходженні резольвентных рішень систем інтегральних рівнянь з сепарабельными ядрами і їх дискретних аналогів. Розглянуто перетворення системи інтегральних рівнянь до системи еквівалентних диференціальних або різницевих рівнянь. Встановлений взаємозв'язок резольвентных рішень інтегральних рівнянь і фундаментальних рішень еквівалентних диференціальних і різницевих рівнянь. Запропонована модифікація операційного методу рішень дискретних аналогів систем інтегральних рівнянь Вольтерри II -го роду.

Ключові слова: математична модель, система інтегральних рівнянь, еквівалентне перетворення, резольвента.

В.Ф. МИРГОРОД
Военная академия (г. Одесса)
И.М. ГВОЗДЕВА
Национальный университет "Одесская морская академия"

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ С СЕПАРАБЕЛЬНИМИ ЯДРАМИ

Предлагается и обосновывается подход к исследованию свойств аналитических и численных решений систем интегральных уравнений Вольтерры II-го рода. Подход основан на нахождении резольвентных решений систем интегральных уравнений с сепарабельными ядрами и их дискретных аналогов. Рассмотрено преобразование системы интегральных уравнений к системе эквивалентных дифференциальных либо разностных уравнений. Установлена взаимосвязь резольвентных решений интегральных уравнений и фундаментальных решений эквивалентных дифференциальных и разностных уравнений. Предложена модификация операционного метода решений дискретных аналогов систем интегральных уравнений Вольтерры II-го рода.

Ключевые слова: математическая модель, система интегральных уравнений, эквивалентное преобразование, резольвента.

V.F.MIRGOROD
Military Academy (Odessa city)
I.M.GVOZDEVA
National University "Odessa Maritime Academy"

ANALYTICAL SOLUTIONS OF SYSTEMS OF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH SEPARABLE KERNELS

The approach to investigation of properties of analytical and numerical solutions of Volterra integral equations of the second kind is offered and grounded. The approach is based on finding the resolvent solutions of systems of integral equations with separable kernels and their discrete analogous. The transformation of integral equations systems to the systems of equivalent differential or difference equations is considered. The connection of resolvent solutions of the integral equations and fundamental solutions of equivalence differential and difference equations is obtained. The modification of operating method of solutions of discrete analogous of Volterra integral equations of the second kind systems is proposed.

Keywords: mathematical model, the system of integral equations, equivalent transformation, resolvent.

Вступ

Ефективним засобом вирішення проблеми дослідження керованої зміни стану складних динамічних систем є побудова їх адекватних математичних моделей (ММ). Такі моделі створюються, як правило, у вигляді диференціальних рівнянь простору стану, що відповідають найбільшою мірою вживаним методам і засобам сучасної теорії управління. Проте далеко не усі процеси в реальних динамічних системах можуть бути описані вказаними математичними моделями простору стану (ММПС), а обчислювальна реалізація таких ММ вимагає значних обчислювальних ресурсів, що перешкоджає їх застосуванню в системах управління реального часу. Тому є актуальною проблема відшукування нових форм математичного опису процесів керованої зміни стану складних динамічних систем.

Важливе науково-прикладне завдання полягає у відшукуванні таких форм цього опису, для яких, за умови збереження високої міри адекватності реальним процесам, могла бути здійснена обчислювальна реалізація ММ в реальному часі.

Відомі переваги моделей у вигляді інтегральних операторів, інтегральних і интегро-диференціальних рівнянь, зокрема, стосовно динамічних систем, інтегральних рівнянь Вольтерри II -го роду, визначають необхідність і практичну значущість розгляду методів відшукування їх аналітичних рішень на основі рішення відповідних рівнянь, що зв'язують ядро і резольвенту.

Постановка проблеми і мета дослідження

Теорія інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду розглянута у ряді фундаментальних робіт [1–5,7]. Довідкова література [7,8] присвячена методам і алгоритмам їх обчислювального рішення. Рішення інтегро-диференціальних рівнянь і програмні засоби їх комп'ютерної реалізації викладені в [9,11]. Для окремих випадків інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду в [5,7] пропонуються деякі аналітичні рішення, в [11,12] запропоновані такі рішення для ряду важливих прикладних завдань.

Проте необхідність обчислювальної реалізації ММ безпосередньо у складі систем управління в реальному масштабі часу вимагає систематичного розгляду питань відшукування рішень інтегральних рівнянь і їх дискретних аналогів, вживаних в якості математичних моделей процесів в досліджуваних об'єктах. В першу чергу це стосується інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду, що мають широку сферу застосування в прикладних задачах і для яких розроблені ефективні методи обчислювального рішення [7].

Метою роботи є розробка методів аналітичного і обчислювального рішення ряду класів дискретних аналогів систем інтегральних рівнянь Вольтерры II-го роду на основі відшукування рішень відповідних рівнянь, що зв'язують ядро і резольвенту

Основні результати

У [13] розглянута система інтегральних рівнянь (ІР) Вольтерры II-го роду з сепарабельним ядром

$$\vec{y}(x)=\vec{f}(x)+\int_a^x K(x,s)\vec{y}(s)\,ds=\vec{f}(x)+C(x)\int_a^x B(s)\vec{y}(s)\,ds, \tag{1}$$

де $dim\left(\vec{y}(x)\right)=dim\left(\vec{f}(x)\right)=n,$ рядки матриці $C(x)$ і стовпці матриці $B(x)$ є системами лінійно незалежних функцій [1,3].

Як це показано авторами, еквівалентна (1) система диференціальних рівнянь встановлюється введенням вектор-функції

$$\vec{\omega}(x)=\int_a^x B(s)\vec{y}(s)\,ds, \tag{2}$$

і відповідного лінійного диференціального рівняння

$$\frac{d\vec{\omega}(x)}{dx}=B(x)\vec{y}(x), \tag{3}$$

з нульовими початковими умовами.

З (1) слідує

$$\vec{y}(x)=\vec{f}(x)+C(x)\vec{\omega}(x).$$

Згідно (3) отримано рівняння

$$\frac{d\vec{\omega}(x)}{dx}=B(x)\left[C(x)\vec{\omega}(x)+\vec{f}(x)\right]=B(x)C(x)\vec{\omega}(x)+B(x)\vec{f}(x).$$

З приведених в [9] виразів витікає, що система ІР (1) за умови (2) еквівалентно матричному диференціальному рівнянню у вигляді математичної моделі простору стану (ММПС)

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\vec{\omega}(x)}{dx}&=A(x)\vec{\omega}(x)+B(x)\vec{f}(x)\\ \vec{y}(x)&=C(x)\vec{\omega}(x)+D(x)\vec{f}(x),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

де $A(x)=B(x)C(x)$, і $D(x)=E.$

З (1) і (4) витікає, що для забезпечення існування і єдності рішення (4) матриці $C(x)$ і $B(x)$ мають бути квадратними за додаткової умови, що рядки матриці $C(x)$ і стовпці матриці $B(x)$ є системами лінійно незалежних функцій. Проведені перетворення дають основу сформулювати наступне твердження.

Згідно [9], якщо в системі інтегральних рівнянь Вольтерри ІІ-го роду (1) матричне ядро є сепарабельним виду

$$K(x,s) = C(x)B(s),$$

і, крім того, рядки матриці $C(x)$ і стовпці матриці $B(x)$ є системами лінійно незалежних функцій, то рішенням рівняння для резольвенти

$$R(x,s) = K(x,s) + \int_s^x K(x,\lambda) R(\lambda,s)\,ds, \tag{5}$$

є функція

$$R(x,s) = C(x)F(x,s)B(s),$$

де $F(x,s)$ є фундаментальною матрицею – рішенням наступного диференціального рівняння

$$\frac{dF'(s,x)}{dx} = -B(x)C(x)F(s,x) = -A(x)F(s,x) \tag{6}$$

з початковою умовою, рівною одиничній матриці.

Таким чином, еквівалентною формою системи інтегральних рівнянь Вольтерри ІІ-го роду (1) з сепарабельними ядрами є диференціальні рівняння динамічної системи з векторним входом і векторним виходом (MIMO) в просторі стану (4), рішення яких, і, отже, рішення системи (1) має вигляд

$$\vec{y}(x) = \vec{f}(x) + \int_a^x R(x,s)\vec{f}(s)\,ds = \vec{f}(x) + C(x)\int_a^x F(x,s)B(s)\vec{y}(s)\,ds,$$

де матриця $F(x,s)$ визначається рішенням (6).

Розглянемо дискретний аналог рівняння Вольтерри ІІ-го роду

$$\vec{y}(x_n) = \vec{f}(x_n) + \sum_{s_j = x_1}^{x_n} K(x_n, s_j)\vec{y}(s_j), \tag{7}$$

де $n, j \in N,\ \ j \le n.$

Слідуючи [14,15], рівняння (7) може розглядатися, з одного боку, як наближена квадратурна реалізація рівняння (1). З іншого боку, (7) може використовуватися як математична модель процесів в системах з дискретними станами, наприклад, в цифрових системах управління, при моделюванні потоків відмов, і інших. У першому випадку знаходження аналітичного рішення (4) дозволяє уникнути відомих проблем обчислювального рішення рівнянь зі змінною верхньою межею інтегрування. У другому випадку знаходження рішень рівнянь виду (7) має важливе самостійне значення, оскільки дає можливість побудувати алгоритми, що відповідають вимогам реального часу.

Надалі змінні-аргументи опускаються і використовуються наступні позначення

$$K(x_n, s_j) = K_{nj},$$

$$\vec{y}(x_n) = \vec{y}_n, \quad \vec{f}(x_n) = \vec{f}_n.$$

Рішення рівняння (7) відшукуватимемо, по аналогії з рішенням рівняння (1), у формі

$$\vec{y}_n = \vec{f}_n + \sum_{j=1}^{n} R_{nj}\vec{f}_j. \tag{8}$$

З (4) і (8) слідує рівняння для резольвенти

$$R_{nj} = K_{nj} + \sum_{i=j-1}^{n} K_{ni} \cdot R_{ij}. \tag{9}$$

Далі вважатимемо, що справедливо наступна умова

$$\left| \sum_{x_i = x_1}^{x_n} f(x_i) \right| \le C_2,\ C_2 = const, \tag{10}$$

Розглянемо дискретний аналог рівняння (1) з ядром, що розділяється

$$\vec{y}_n = \vec{f}_n + C_n \sum_{j=1}^{n} B_j \vec{y}_j. \tag{11}$$

Позначимо

$$\vec{v}_n = \sum_{j=1}^{n} B_j \vec{y}_j, \tag{12}$$

звідси слідує еквівалентна (11) дискретна математична модель простору стану у виді

$$\begin{cases} \vec{v}_n = \left(E - B_n C_n\right)^{-1} \vec{v}_{n-1} + \left(E - B_n C_n\right)^{-1} B_n \vec{f}_n, \\ \vec{y}_n = C_n \vec{v}_n + \vec{f}_n, \end{cases} \tag{13}$$

фундаментальна матриця якої має вигляд

$$\Phi_{nj} = \left(E - B_n C_n\right)^{-1}, \quad F_{nj} = \prod_{i=j}^{n} \Phi_{ii}.$$

Рішення системи (13) визначається співвідношенням

$$\vec{y}_n = \vec{f}_n + C_n \sum_{j=1}^{n} F_{nj} B_j \vec{f}_j.$$

Через еквівалентність (11) і (13) це рішення одночасно є рішенням дискретного аналога рівняння Вольтерри II-го роду з ядром, що розділяється.

Якщо $K_{nj} = K_{n-j}$ – різницеве ядро, то через лінійність дискретного аналога інтегрального рівняння $R_{nj} = R_{n-j}$ резольвента також є різницевою. Звідси рівняння для резольвенти має вигляд

$$R_{n-j} = K_{n-j} + \sum_{i=j-1}^{n} K_{n-i} R_{i-j}. \tag{14}$$

Вважаючи, що R_s і K_s задовольняють умовам існування їх Z-перетворень, де $s = n - j$, з (14) слідує операторне рівняння

$$R(z) = K(z) + K(z) R(z), \tag{15}$$

де $R(z), K(z)$ – Z-зображення ядра і резольвенти відповідно. Звідси слідує аналітичне рішення рівняння для резольвенти у виді

$$R_s = Z^{-1}\left\{R(z)\right\}, \tag{16}$$

де

$$R(z) = \left(1 - K(z)\right)^{-1} K(z). \tag{17}$$

Рішення (16) і (17) узагальнюють операційний метод рішення інтегрального рівняння Вольтерри II-го роду з різницевим ядром на відповідні дискретні аналоги.

Висновок

Пропонований підхід до встановлення рішень деяких типів систем інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду на основі відшукування рішень відповідних рівнянь, що зв'язують ядро і резольвенту, дає можливість досліджувати нові класи рішень таких рівнянь з різною правою частиною і спростити алгоритми обчислювальної реалізації при таблично заданих вихідних даних, що визначає істотні переваги пропонованих моделей при рішенні прикладних завдань.

Висновки і перспективи подальших досліджень

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розширенням класу можливих типів систем інтегральних рівнянь Вольтерри II-го роду, і їх дискретних аналогів, для яких можуть бути отримані аналітичні рішення рівнянь, що зв'язують ядро і резольвенту.

Список використаної літератури

1. Whittaker, E. T. and Watson, G. N., A Course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996. – 616 p.
2. Gorenflo, R. and Vessella, S., Abel Integral Equations: Analysis and Applications, SpringerVerlag, Berlin–New York, 1991. – 215 p.
3. Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I., Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon & Breach Sci. Publ., New York, 1993. – 1006 p.
4. Polyanin, A. D. and Manzhirov, A. V. Handbook of Integral Equations, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2008. – 1108 p.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т.4. – Ч.1. – 336 с.

6. Забрейко П.П. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
7. Верлань А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Техника, 1986. –700 с.
8. Методы вычислений на ЭВМ / В.В. Иванов. – К.: Наук. Мысль, 1986. – 584 с.
9. Верлань А.Ф. Моделирование систем автоматического управления с реальными обратными связями на основе интегро-дифференциальных уравнений Вольтера / А.Ф. Верлань, В.Ф. Миргород, Д.Э. Контрерас // Тр. Одесск. Гос. Политехн. Ин-та. – 2000, – Вып. 3(12). – С. 120–123.
10. Миргород В.Ф. Квадратурно-разностные алгоритмы моделирования нелинейных динамических объектов / В.Ф. Миргород, Д.Э. Контрерас, А.Б. Волощенко // Моделирование и информационные технологии. – К. – 2000. – Вып. 6. – С. 152–156.
11. Миргород В.Ф. Обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра второго рода / В.Ф. Миргород // Искусственный интеллект. – 2009. – №3. – С. 68–80.
12. Миргород В.Ф. Эквивалентные преобразования интегральных и дифференциальных математических моделей / В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева // Материалы международной научной конференции “Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта” (18-22 мая 2009 г.). – Евпатория. – 2009. – Т. 1. – С. 88–91.
13. Миргород В.Ф. Аналитическое решение систем интегральных уравнений Вольтерры с сепарабельным ядром / В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева, Е.В. Деренг // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон. – 2016.– Вип. 3(58).– С. 380–383.
14. Миргород В.Ф. Методы решения дискретных аналогов интегральных уравнений Вольтерры II рода / В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева // Вестник Херсонского национального технического университета – 2(45). – 2012. – С. 232–238
15. Myrhorod, V. On One Solution of Volterra Integral Equations of Second Kind / V. Myrhorod, I. Hvozdeva, // 8th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences - AMiTaNS’16, AIP Conference Proceedings; 2016, Vol. 1773, Issue 1, pp. 1–8.