УДК 519.6

Ю.І. ПЕРШИНА
Українська інженерно-педагогічна академія
В.О. ПАСІЧНИК
Харківська державна академія дизайну і мистецтв

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ВИЯВЛЕННЯ ТОЧОК РОЗРИВУ ПЕРШОГО РОДУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Розроблено алгоритм відновлення лінійної розривної функції однієї змінної та алгоритм знаходження точок ε-розриву першого роду лінійної функції однієї змінної за допомогою розривних інтерполяційних або апроксимаційних лінійних сплайнів. Введено поняття ε-неперервності функції однієї змінної. На його основі розроблено модифікований алгоритм виявлення розривів першого роду нелінійної функції однієї змінної, використовуючи розривний апроксимаційний лінійний сплайн. Описані чисельні експерименти, які підтверджують ефективність запропонованих алгоритмів.
Ключові слова: розривна лінійна інтерполяція, розривна лінійна апроксимація, ε-розрив.

Ю.И. ПЕРШИНА
Украинская инженерно-педагогическая академия
В.А. ПАСЕЧНИК
Харьковская государственная академия дизайна и искусств

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ВЫЯВЛЕНИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА ПЕРВОГО РОДА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Разработан алгоритм восстановления линейной разрывной функции одной переменной и алгоритм нахождения точек ε - разрыва первого рода линейной функции одной переменной с помощью разрывных интерполяционных или аппроксимационных сплайнов. Введено понятие ε-непрерывности функции одной переменной. На его основе разработан модифицированный алгоритм выявления разрывов первого рода нелинейной функции одной переменной, используя разрывный аппроксимационный линейный сплайн. Описаны численные эксперименты, которые подтверждают эффективность предложенных алгоритмов.
Ключевые слова: разрывная линейная интерполяция, разрывная линейная аппроксимация, ε-разрыв.

I.I. PERSHYNA
Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy
V.A. PASICHNIK
Kharkiv State Academy of Design and Arts

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE METHOD OF IDENTIFICATION OF THE POINTS DISCONTINUITIES OF THE FIRST KIND OF ONE VARIABLE FUNCTION

An algorithm for reconstructing a linear discontinuous function of one variable and an algorithm for finding points ε -discontinuities of the first kind of a linear one variable function by means of discontinuous interpolation or approximation splines are developed. The notion of ε-continuity of one variable function is introduced. On its basis, a modified algorithm for detecting discontinuities of the first kind of a non-linear one variable function using a discontinuous approximate linear spline is developed. Numerical experiments are described that confirm the effectiveness of the proposed algorithms.
Keywords: discontinuous linear interpolation, discontinuous linear approximation, ε-discontinuity.

Постановка проблеми

Протягом багатьох століть розвитку людства історія відмічає нерівномірність як природних, так і соціальних явищ, які супроводжували цей розвиток (землетруси, війни, економічні кризи, засухи, повені, падіння метеоритів тощо належать до явищ, процесів, які описуються розривними функціями). Також існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об’єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об’єкти часто виникають в задачах, які використовують дистанційні методи і, зокрема, в задачах томографії. В багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування границь, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, направлених на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. В комп’ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь).

Для багатьох промислових підприємств наявність засобів неруйнівного контролю якості продукції на різних етапах її виробництва є актуальним завданням. Рентгенівські засоби неруйнівного контролю не мають альтернативи в тих випадках, де параметрами контролю якості виробів можуть бути внутрішні геометричні розміри складових частин виробів, просторове розташування внутрішніх деталей, структура матеріалів і наповнювачів, наявність домішок, раковин або тріщин. Необхідно відзначити, що при неруйнівному контролі великогабаритних виробів (з радіаційної товщиною > 1000 мм) не можуть бути застосовані традиційні методи плівкової рентгенографії через високу вартість витратних матеріалів і тривалого часу контролю. Найбільш перспективними, в даному випадку, є методи цифрової радіографії, особливо обчислювальна томографія. Обчислювальні томографічні системи неруйнівного контролю на сьогодні є єдиними технічними засобами, які дозволяють визначити місце розташування і геометричні розміри прихованих дефектів в контрольованому виробі, а також контроль виробу в реальному масштабі часу його технологічного виготовлення.

Той факт, що на сьогоднішній день не існує загальної теорії описів вказаних явищ та процесів, говорить про актуальність створення теорії наближення розривних функцій розривними конструкціями та розробки методів виявлення точок або ліній розриву функції, оскільки вказані явища відіграють величезну роль в житті людства. Тому кожний крок, направлений на створення теоретичного підґрунтя опису вказаних явищ та процесів без сумніву може значно змінити подальший розвиток людства і всієї планети в цілому.

Тобто актуальною є задача розробки та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних сплайнів та розробка методів виявлення точок або ліній розриву функції для більш точного уявлення про структуру досліджуваного об’єкта. Її чисельному розв’язанню присвячена дана стаття.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах, наприклад, [1]. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов’язково є гладкою, іноді допустима її розривність – лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв’язання такого типу задач, які працюють для частинних випадків. В своїх роботах Петухов О.П. [2] досліджує наближення розривних функцій в метриці Хаусдорфа. Існують методи розв’язання крайових задач з розривними розв’язками, в розвиток яких внесли значний вклад такі вчені, як Сергієнко І.В., Дейнека В.С., Скопецький В.В., Литвин О.М. та інші [3]. В роботі О.Л. Агеєва, Т.В. Антонової [4] запропонований метод визначення числа точок розриву та їх положення на основі використання явища Гіббса. Але для цього потрібна додаткова інформація: найменша та найбільша величини стрибків наближуючої функції. Крім того, припускається, що інтервали, в яких знаходяться явища Гіббса, не перетинаються, тобто неможливо відділити точки розриву, що знаходяться близько один від одного.

Якщо наближувати розривну функцію неперервними тригонометричними функціями, виникає явище Гіббса. Для боротьби із згаданим явищем були розроблені різні фільтри [5]. В останні кілька десятиліть були розроблені методи, які пом'якшують явище Гіббса в розкладанні Фур'є від розривних функцій. Але повного видалення явища Гібса ні фільтри, ні згадані методи не дають. В роботі [6] розроблені методи відновлення ліній розриву за допомогою вейвлетів. Ці методи відновлення використовують полігармонічні вейвлети, які мають нескінчений носій. Такого типу конструкції, в загалі кажучи, можуть привести до згладжування сигналу, який досліджується, і вимагати додаткового аналізу отриманих результатів.

В роботі [7] авторами запропонований, обґрунтований та досліджений метод відновлення розривної лінійної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок ε-розриву. В даній статті представляється чисельна реалізація запропонованого алгоритму, та наводиться модифікований алгоритм виявлення точок розриву нелінійної функції однієї змінної.

Мета дослідження

Постановка задачі. Нехай задана лінійна функція однієї змінної $f(x)$ на інтервалі [0;1] з можливими розривами першого роду в точках x_k, $k=\overline{1,n}$. Задані вузли розбивають інтервал [0;1] на $n-1$ частин. Треба побудувати та дослідити метод відновлення розривної функції $f(x)$ та виявити точки ε-розриву.

Викладення основного матеріалу дослідження

Метод виявлення точок ε-розриву.

Визначення 1. Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ функцію $S(x)\in C^{-1}[a,b]$, яка визначається наступним чином:

$$S(x)=C_k^{+}\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+C_{k+1}^{-}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ \ k=\overline{1,n-1}, \qquad (1)$$

де C_k^{+}, C_{k+1}^{-}, $k=\overline{1,n-1}$ – параметри сплайна $S(x)$, що визначаються у вигляді односторонніх границь

$C_k^+ = \lim\limits_{x \to x_k+0} f(x), \quad C_{k+1}^- = \lim\limits_{x \to x_{k+1}-0} f(x)$.

Теорема 2. Якщо $f(x) \in C^{-1}[a,b]$, яка є r раз диференційованою на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{1, n-1}$, $r = 1,2$, то залишок $Rf(x) = f(x) - S(x)$ наближення розривним інтерполяційним сплайном вигляду (1) на кожному інтервалі розбиття буде мати вигляд

$$R_k f(x) = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f^{(r)}(\xi) G(x,\xi) d\xi,\ x \in [x_k, x_{k+1}],\ G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \dfrac{(x_k - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k \le \xi \le x \\ -\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \dfrac{(x_{k+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x \le \xi \le x_{k+1} \end{cases},\ k = \overline{1, n-1}.$$

Далі пропонується алгоритм виявлення розривів функції однієї змінної та алгоритм оптимального визначення вузлів наближуючого сплайна, який сформулюємо по кроках.

Визначення 2 Розривним апроксимаційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k-1}],\ k = \overline{1, n-1}$ будемо називати розривну функцію, визначену формулою (1), де коефіцієнти C_k^+, C_{k+1}^- сплайна знаходяться методом найменших квадратів в інтегральній формі:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - S(t))^2 dt \to \min_C \qquad (2)$$

Оптимальним набором вузлів будемо називати таку найменшу кількість вузлів, серед яких є точки ε-розриву функції, та таку, що розривний сплайн, побудований на їх основі, наближує функцію із заданою точністю.

Теорема 3. Якщо $f(x) \in C^{-1}[0;1]$ є кусково-лінійною функцією і має одну точку розриву першого роду $x^* = \dfrac{m}{2^k},\ m, k \in N,\ m < 2^k$, тоді можна її виявити не більше, ніж за k ітерацій.

Теорема 4. Якщо $f(x) \in C^{-1}[0;1]$ – кусково-лінійна функція і має одну точку розриву першого роду x^*, то виявити її можна за $k = \lceil -\log_2 2\varepsilon \rceil$ ітерацій з похибкою ε.

Визначення 4. Базисним розривним лінійним сплайном на інтервалі $[0;1]$ будемо називати сплайн $B(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$, де $h(x)$ – лінійний неперервний поліном.

Теорема 5. Довільну розривну лінійну функцію $f(x)$ зі скінченною кількістю розривів першого роду можна представити у вигляді суми базисних розривних сплайнів.

Дійсно завжди, знайдуться такі $M \in N$ і параметри $C_k^\pm$, що лінійну розривну функцію можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=1}^{M} B(Mx - k; C_k^\pm),\quad C_k^\pm = f\left(\frac{k}{M} \pm 0\right).$$

В роботі [7] був наведений алгоритм виявлення точок розриву для лінійної функції однієї змінної. Цей алгоритм можна модифікувати і для нелінійної функції. Наведемо спочатку приклад.

Приклад. Нехай в області $D = [0,1]$ задана функція (рис. 1):

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \in (0, 0.4] \\ 2x^2, & x \in (0.4, 1] \end{cases}.$$

Тобто ця функція має один розрив першого роду в точці $x = 0.4$. Задамо $\varepsilon = 0.01$. Оскільки задана функція нелінійна, а наближувати будемо лінійними розривними сплайнами, то потрібно задавати точність наближення δ, наприклад $\delta = 0.01$. Адаптуємо алгоритм, наведений в роботі [7].

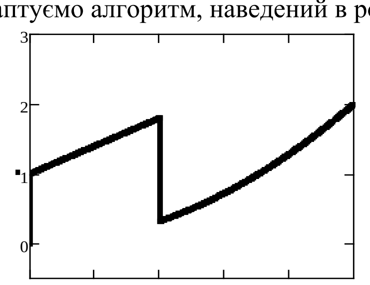

Рис. 1. Графік функції.

На першому кроці будуємо розривний апроксимаційний сплайн $S(x)$ з вузлами $x_k,\ k=\overline{1,n}$ за формулою (1) з невідомими коефіцієнтами $C_k^+, C_{k+1}^-,\ k=\overline{1,n-1}$. Знаходимо вектор C з умови (2).

Далі на другому кроці на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$ обчислюємо значення $J_k^* = \max\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} J_k(x)$, $J_k(x) = \left| f(x) - Sp_k(x) \right|$. І крок 3 зводиться до перевірки умов: 1) $J_q < \delta,\ J_{q+1} < \delta$, де δ – задана точність наближення; 2) $S(x)$ є ε-неперервною в точці x_{q+1}. Якщо ці умови виконані, то вузол x_{q+1} видаляємо з розгляду. З усіх J_k^* обираємо максимальне значення $M = \max\limits_{1\le k\le n}(J_k^*)$ та ділимо інтервал, в якому це максимальне значення отримується, навпіл.

На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн за формулою (1) та за формулою (2) знаходимо вектор коефіцієнтів C.

Перевіряємо виконання умови $\max\limits_{x\in[a,b]} \left| f(x) - S(x) \right| < \delta$, де δ – задана точність наближення. Якщо умова виконана, то отримали набір оптимальних вузлів наближуючого сплайна, серед яких знаходяться і розриви заданої функції. Якщо вказана умова не виконана, то повертаємося до кроку 3.

Застосуємо цей алгоритм до заданої функції. Оберемо вузли сплайна: $x_1 = 0,\ x_2 = 0.3,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 1$. Побудуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн у вигляді формули (1). Наведемо деякі проміжні результати наближення

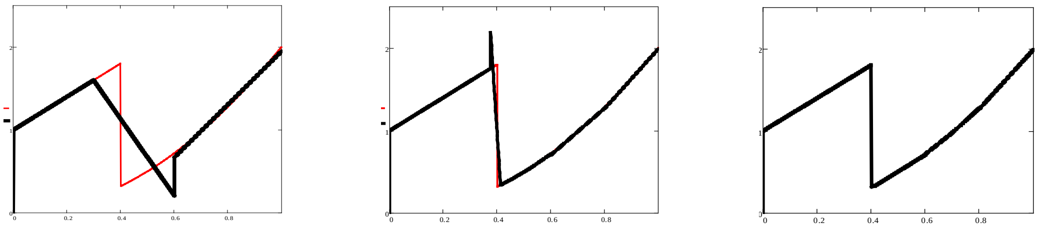

Рис. 2. Проміжні результати алгоритму виявлення точок розриву розривної функції шляхом наближення її розривним лінійним сплайном

При цьому оптимально обрали вузли сплайна, які дорівнюють

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.5065, x_4 = 0.6,\ x_5 = 0.7,\ x_6 = 0.8, x_7 = 0.9, x_8 = 1.$$

Наведемо модифікований алгоритм наближення розривної нелінійної функції .

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн $S(x)$ на заданих вузлах $x_k,\ k=\overline{1,n}$ за формулою (1) з невідомими коефіцієнтами $C_k^+, C_{k+1}^-,\ k=\overline{1,n-1}$. Причому на першій ітерації вважаємо, що односторонні значення функції в заданих вузлах збігаються. Знаходимо вектор $C = (C_1^+, C_2^-, C_2^+, C_3^-, ..., C_{n-1}^+, C_n^-)$ з умови (2). Після підстановки знайдених коефіцієнтів у сплайн (1) отримаємо сплайн $S_k(x) = S_k(x, C^I),\ x\in[x_k, x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$.

Крок 2. На кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$ обчислюємо значення $J_k^* = \max\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} J_k(x)$, $J_k(x) = \left| f(x) - S_k(x) \right|$.

Крок 3. Якщо виконуються умови: 1) $J_q < \delta,\ J_{q+1} < \delta$, де δ – задана точність наближення; 2) $S(x)$ є ε-неперервною в точці x_{q+1}, то вузол x_{q+1}, то видаляємо з розгляду.

Крок 4. З усіх J_k^* обираємо максимальне значення $M = \max\limits_{1\le k\le n}(J_k^*)$ та ділимо інтервал, в якому це максимальне значення отримується, навпіл.

Крок 5. На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн за формулою (1) та за формулою (2) знаходимо вектор коефіцієнтів C.

Перевіряємо виконання умови $\max\limits_{x\in[a,b]} \left| f(x) - Sp(x) \right| < \delta$, де δ – задана точність наближення. Якщо умова виконана, то ми отримали набір оптимальних вузлів наближуючого сплайна, серед яких знаходяться і розриви заданої функції. Якщо вказана умова не виконана, то повертаємося до кроку 3.

Висновки

В роботі пропонується алгоритм відновлення розривної лінійної функції однієї змінної за допомогою апроксимації розривним лінійним сплайном та модифікований алгоритм виявлення точок розриву першого роду у випадку, коли розривна функція не обов'язково є лінійною. Інформацією про функцію є її значення, які можна отримати на довільній скінченній множині точок з інтервалу $[0;1]$. Також в роботі запропонована чисельна реалізація модифікованого алгоритму. Наведений тестовий приклад.

Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають досить часто. Наступним кроком автори планують обґрунтувати метод відновлення розривних функцій двох змінних та метод виявлення ліній та точок ε-розриву, використовуючи розбиття області визначення функції двох змінних на прямокутні елементи, з метою оптимізації кількості обчислень.

Список використаної літератури

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. Петухов А.П. О приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа / А.П. Петухов // Математические заметки. – 1985. – Т. 32, № 1. – С. 25-40.
3. Дейнека В.С. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 2007. – 703 с.
4. Агеев А.Л. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных / А.Л. Агеев, Т.В. Антонова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т.15, № 1(49). – С. 3-13.
5. Gottlieb D. On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a non-periodic analytic function / D. Gottlieb, C.W. Shu, A. Solomonoff, H. Vandeven // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1992. – № 43. – P. 81-98.
6. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid / M. Rossini // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics.– 2007. – Vol. 1, № 1. – P. 1-13.
7. Литвин О.М. Дослідження методу знаходження точок розриву першого роду функції однієї змінної / О.М. Литвин, Ю.І. Першина, В.О. Пасічник // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2015.– № 6(1115) – С.67-76.