УДК 519.816

Н.К. ТИМОФІЄВА
Міжнародний науково-навчальний центр
інформаційних технологій та систем НАН та МОН України

ВЛАСТИВІСТЬ ПОДІБНОСТІ В КОМБІНАТОРИЦІ ТА КОМБІНАТОРНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ

Описано властивість подібності, яка характерна для генерування комбінаторних множин та задач комбінаторної оптимізації. Показано, що задачі подібні, якщо вони розв'язуються одним методом або модифікацією одного і того ж алгоритму. Ця властивість показана на прикладі статичних та динамічних задач комбінаторної оптимізації.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, комбінаторна конфігурація, комбінаторна множина, подібність задач комбінаторної оптимізації, цільова функція,

Н.К. ТИМОФЕЕВА
Международный научно-учебный центр
информационных технологий и систем НАН и МОН Украины

СВОЙСТВО ПОДОБИЯ В КОМБИНАТОРИКЕ И КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Описано свойство подобия, которое характерно для генерирования комбинаторных множеств и задач комбинаторной оптимизации. Показано, что задачи подобны, если они решаются одним методом или модификацией одного и того же алгоритма. Это свойство показано на примере статических и динамических задач комбинаторной оптимизации.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, комбинаторная конфигурация, комбинаторное множественное число, подобие задач комбинаторной оптимизации, целевая функция

.

N.K. TIMOFEEVA
International Scientific Training Cente
for Information Technologses and Systems

PROPERTY OF SIMILARITY IS IN COMBINATORIC AND COMBINATORIAL OPTIMIZATION

Property of similarity is described, what characteristic for the generation of combinatorial sets and problem of combinatorial optimization. It is shown that problem are similar, if they are solved by one method or modification of the same algorithm. This property is illustrated by the example of static and dynamic combinatorial optimization problems.

Keywords: combinatorial optimization, combinatorial configuration, combinatorial sets, similarity of problems of combinatorial optimization, objective function.

Постановка задачі

В літературі розглядають подібність різноманітних фізичних явищ, що є узагальненим поняттям геометричної подібності. В комбінаторній оптимізації також має місце подібність, яка пов'язана з тим, що для розв'язання задач різних класів використовують універсальні методи та алгоритми. Ця властивість відрізняється від геометричної та описаної в теорії подібності. Для встановлення подібності задач комбінаторної оптимізації необхідно провести їхній аналіз з метою виявлення ознак, за якими вони розв'язуються за однією і тією ж обчислювальною схемою.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

В комбінаториці та комбінаторній оптимізації можна навести багато прикладів, коли задачі з різних класів розв'язуються за однією і тією ж обчислювальною схемою, наприклад [1–4]. Ця властивість в літературі достатньою мірою не висвітлена, хоча існуючі універсальні методи орієнтовані на розв'язання різноманітних таких задач. В [5] наведено деякі ознаки, за якими можна встановлювати подібність задач як в комбінаториці, так і в комбінаторній оптимізації. За цими ознаками розробляються універсальні алгоритми як для розв'язання задач комбінаторної оптимізації, так і для генерування комбінаторних множин. Тому однією з проблем в теорії комбінаторної оптимізації є виявлення критеріїв подібності цих задач з метою узагальнення та використання для їхнього розв'язання універсальних підходів, які дають можливість знаходити глобальний або наближений до глобального результат.

Формулювання мети дослідження

Для розв'язання поставленої задачі необхідно виділити критерії подібності як задач з комбінаторики, так і задач комбінаторної оптимізації різних класів. З цією метою розроблено метод моделювання прикладних задач в рамках теорії комбінаторної оптимізації, який показав, що однією з основних ознак подібності є тип аргументу цільової функції та вид задачі (статична або динамічна). Для генерування комбінаторних конфігурацій подібність визначається за способом їхнього утворення та впорядкування.

Викладення основного матеріалу дослідження

Загальна математична постановка задачі комбінаторної оптимізації. Наведемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації. Задачі цього класу, як правило, задаються однією або кількома множинами, наприклад A та B, елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. У *першому* типі кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{lt} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел), $l \in \{1,...,n\}$, $t \in \{1,..., \tilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A, $\tilde{n}$ – кількість елементів множини B. Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числові значення яких назвемо вагами. Величини c_{lt} назвемо *вхідними* даними та задамо їх матрицями, одна з яких комбінаторна. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1,...,n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох із заданих множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1,...,n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент множини W, для якого $F(w)$ набуває оптимального значення при виконанні заданих обмежень.

Подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k),...,\beta_m(f(m), w^k))$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C – функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1), ..., \varphi(m))$, де $m = \frac{n(n-1)}{2}$ – кількість елементів h наддіагоналей матриць C та $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Якщо матриці $Q(w^k)$ та C – несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m=n^2$ (або $m = n\tilde{n}$). Функцію цілі $F(w^k)$ запишемо як

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j (f(j), w^k) \varphi(j). \qquad (1).$$

Для моделювання прикладних задач в рамках теорії комбінаторної оптимізації необхідно: а) за способом обчислення цільової функції визначити вид задачі (статична або динамічна); б) визначити базові множини, якими задається певна задача; в) за вхідними даними визначити її тип; г) визначити аргумент цільової функції (комбінаторну конфігурацію); д) змоделювати цільову функцію.

Властивість подібності, яка виникає при генеруванні комбінаторних множин. Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини $A = \{a_1,..., a_n\}$. Позначимо її упорядкованою множиною $w^k = (w_1^k,..., w_\eta^k)$, де $\eta \in \{1,...,n\}$ – кількість елементів у w^k, $W = \{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1,...,q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W, q – кількість w^k у W.

Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k. Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний.

Сполучення як з повтореннями так і без повторень утворюються єдиною операцією – вибиранням. Перестановки утворюються або транспозицією або вибиранням. Розбиття числа утворюються однією операцією – арифметичною. Розбиття n-елементної множини на підмножини утворюються двома рекурентними комбінаторними операторами: або арифметичним або транспозицією. Розміщення як з повтореннями так і без повторення утворюються двома операціями: або вибиранням або транспозицією. Бінарні послідовності можуть утворюватися двома операціями: арифметичною або операцією вибирання. До того ж, кількість бінарних послідовностей у їхній множині дорівнює 2^n, а кількість сполучень без повторення – відповідно $2^n - 1$.

Таким чином, за способом утворення подібні такі комбінаторні конфігурації: бінарні послідовності та сполучення без повторення; розбиття n-елементної множини на підмножини та розбиття натурального числа і перестановки; розміщення без повторення (з повтореннями) і сполучення без повторень (з повтореннями) та перестановки. Ці множини подібні за способом генерування, оскільки вони упорядковуються або одним і тим же алгоритмом або його модифікацією (бінарні послідовності і сполучення без повторень генеруються модифікацією одного і того ж алгоритму, базова підмножина розбиття n-елементної множини на підмножини і розбиття натурального числа генеруються одним і тим же алгоритмом). Тобто, оговорені комбінаторні конфігурації подібні за способом їхнього утворення та впорядкування.

Подібність задач комбінаторної оптимізації, цільова функція в яких визначена на множині перестановок. До загальної математичної постановки задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в якій є перестановка, та які відносяться до статичних, зводяться задачі комівояжера, про призначення, розміщення одногабаритних об’єктів у фіксовані позиції та ін. Цільова функція для них моделюється однаковим виразом, за яким оцінюється результат. Завдяки цій властивості задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в яких є перестановка, на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій (задача кластеризації) розв’язуються універсальними методами, зокрема, методом структурно-алфавітного пошуку, за однією і тією ж схемою [6].

Задача розміщення одногабаритних об’єктів. На поверхні з регулярною сіткою посадочних місць необхідно розмістити задану множину об’єктів, які мають між собою зв'язки, таким чином, щоб сумарна довжина зв'язків була б мінімальною. Значення цільової функції в ній зводиться до виразу (1), а її аргумент – перестановка.

Задача про призначення. Задано n посад і n претендентів на ці посади. Призначення претендента t на l-у посаду приводить до затрат c_{lt}, $(l,t = 1, 2, ..., n)$. Необхідно розподілити претендентів по посадах так, щоб сумарні втрати були б мінімальними. Цільова функція в ній зводиться до виразу (1), а її аргумент – перестановка.

Задача комівояжера. Задано n міст, відстань між якими відома. Координати входу та виходу кожного міста збігаються. Необхідно знайти найкоротший шлях, який проходить через усі міста один раз і повертається в початковий пункт. Цільова функція в цій задачі задається виразом (1). Пошук оптимального розв'язку проводиться на множині перестановок.

Наведемо обчислювальну схему пошуку глобального мінімуму для задачі комівояжера, задачі про призначення та розміщення одногабаритних модулів. Глобальний максимум знаходиться аналогічно.

1. Завдання вхідної інформації.

1.1. Якщо необхідно розв'язати задачу комівояжера, то вхідні дані задаються симетричною матрицею $Q(w^k)$. Уведемо (0,1)-матрицю C. За описаними вище правилами утворюються скінченні послідовності (функції $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$). Перехід до п. 2. В іншому разі – перехід до п. 1.2.

1.2. Якщо необхідно розв'язати задачу розміщення одногабаритних об’єктів, вхідні дані задаються симетричною матрицею $Q(w^k)$ та симетричною матрицею C. За описаними вище правилами утворюються скінченні послідовності (функції $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$). Перехід до п. 2. В іншому разі – перехід до п. 1.3.

1.3. Якщо необхідно розв'язати задачу про призначення, вхідні дані задаються двома несиметричними матрицями $Q(w^k)$ та матрицею C. За описаними вище правилами утворюються скінченні послідовності (функції $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$). Перехід до п. 2. В іншому разі – вважаємо, що вхідні дані не задано, переходимо до п. 10.

2. Базову задачу комбінаторної оптимізації зведемо до упорядкованої, задавши в ній вхідні дані функціями $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$ та $\bar{\varphi}(j)|_1^m$, де $\vec{\beta}(f(j), w^{'t}) < \vec{\beta}(f(j+1), w^{'t})$, $\bar{\varphi}(j) > \bar{\varphi}(j+1)$. Перейдемо до п. 3.

3. Уведемо множини F, J, P, де F – множина значень локальних мінімумів, P – множина побудованих перестановок, l-му елементу якої відповідає l-те значення локального мінімуму із F, J – множина номерів позицій значень комбінаторної функції, для яких знайдено локальний мінімум. Покладемо $k = 1$, $l = 1$. Величина k вказує на порядковий номер перестановки $w^k \in W$, що будується, а l –

порядковий номер перестановки у множині P (відповідно значення локального мінімуму у множині F та номера позицій значень комбінаторної функції у множині J). Перехід до п. 4.

4. За функцією $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$ за розробленими правилами будуємо перестановку $w^k \in W$. Якщо $w^k \in W$ не змінила порядок значень у $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$, у множину F заносимо знайдену за виразом (1) величину $F(w^k)$, а в P – відповідно $P_l = w^k$, переходимо до п. 6. В іншому разі покладаємо $F^* = F(w^k)$, $w^{k*} = w^k$. Перехід до п. 5.

5. Знайдемо поточний локальний мінімум. Покладаємо $j = 1$, $\tilde{j} = 1$, $s = 1$, $j_s = j$, $p = 0$. Величина j – номер позиції значення $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})$, з якої продовжується побудова перестановки, j_s – номер позиції значення комбінаторної функції, з якої починається будуватися чергова перестановка, $\tilde{j}$ – номер позиції значення комбінаторної функції, для якої знаходиться локальний мінімум, p – коефіцієнт, який визначає перехід до пошуку чергового локального мінімуму. Переходимо до п. 6.

6. Покладаємо $k = k + 1$. Побудова чергової перестановки проводиться за значеннями комбінаторної функції, починаючи з $\vec{\beta}(f(j_r), w^{'t})$ за правилами, описаними нижче у п. п. 6.1–6.3. Якщо $l = 1$, то $j_r = j_s$, в іншому разі $j_r = J_r$, $J_r \in J$, $r = \overline{1, l-1}$.

6.1. Якщо розв'язується задача розміщення одногабаритних модулів, перехід до п. 6.2. Якщо розв'язується задача комівояжера – перехід до п. 6.3. Якщо розв'язується задача про призначення, перехід до п. 6.4.

6.2. Для задачі розміщення визначаємо адресу x, y матриці $Q(w^k)$, де знаходиться значення $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})$. Величини x, y – елементи перестановки $w^k \in W$. Номери позицій цих елементів у перестановці визначаються номерами стовпця та рядка, де знаходиться значення $\bar{\varphi}(j)$, на яке перемножується значення $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})$. Переходимо до п. 6.5.

6.3. Для задачі комівояжера номери рядка і стовпця матриці $Q(w^k)$, на перетині яких знаходиться $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})$, є елементами перестановки. Переходимо до п. 6.5.

6.4. У задачі про призначення транспозиція проводиться або рядків або стовпців, тому x вважаємо елементом перестановки, а y – номером позиції елемента перестановки. Переходимо до п. 6.5.

6.5. Покладаємо $j = j + 1$. Якщо $j > m$ або перестановка уже побудована, переходимо до п. 7. В іншому разі – до п. 6.6.

6.6. Якщо для значення $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})$ елементи перестановки w^k уже визначено, переходимо до п. 6.5, в іншому разі – до п. 6.1.

7. Для одержаної перестановки w^k знаходимо значення цільової функції $F(w^k)$. Якщо $F(w^k) \geq F^*$ і $k > n^2/2$, переходимо до п. 6. Якщо $F(w^k) \geq F^*$ і $k \leq n^2/2$, покладаємо $p = p + 1$. Якщо $p > \varpi$, переходимо до п. 8 (ϖ – коефіцієнт, що визачає глибину пошуку оптимального розв'язку). В іншому разі покладаємо $j_s = j_s + 1$, переходимо до п. 6. Якщо $F(w^k) < F^*$ і $k \leq n^2/2$, покладаємо $F^* = F(w^k)$, $w^{k*} = w^k$, $\tilde{j} = j_s$, $j_s = j_s + 1$, $j = j_s + 1$, $p = 0$, переходимо до п. 6.

8. Якщо досліджено околи знайдених локальних мінімумів, переходимо до п. 9. В іншому разі покладаємо $F_l = F*$, $P_l = w^{k*}$, $J_l = \tilde{j}$, $l = l + 1$, $j = j_s + 2$, $j_s = j_s - (p - 1)$, $s = s + 1$, $p = 0$. Переходимо до п. 6.

9. За оптимальний розв'язок, який може збігатися з глобальним, приймаємо $w^k \in W$, для якої цільова функція із множини F набуває найменшого значення.

10. Кінець роботи алгоритму.

Подібність динамічних задач комбінаторної оптимізації. Основними ознаками подібності для динамічних задач є зміна результату розв'язання в часі та для його поточного відліку обчислення часткової цільової функції. Для розв'язання задач цього класу, як правило, використовують динамічне програмування.

До динамічних задач відносяться такі задачі: сегментація та розпізнавання мовленнєвих сигналів, задача Джонсона з теорії розкладів та ін. Визначимо для них аргумент цільової функції.

Найпростіша задача з теорії розкладів (задача Джонсона) формулюється так. Задано n деталей. Кожна з деталей повинна пройти послідовну обробітку на m машинах. Кожна машина також виконує одну операцію. Необхідно скласти такий розклад обробітку деталей, щоб затрачений на ці операції час був би мінімальний за умови, що він не перевищує заданої величини T. Аргументом цільової функції в ній є розміщення без повторень, яке утворюється шляхом знаходження сполучення із n елементів по d, для якого генеруються $d\,!$ перестановок, $d \in \{1,..., n\}$.

Задача сегментації мовленнєвих сигналів полягає у виділенні на заданому відрізку вхідного сигналу майже періодичних та неперіодичних ділянок, а в майже періодичних визначаються довжини поточного майже періоду. Розпізнавання мови – це процес автоматичної обробки мовленнєвого сигналу з метою визначення послідовності слів, яка передається цим сигналом. Вона полягає у знаходженні для вхідного сигналу найбільш правдоподібного еталону з усіх можливих еталонних сигналів.

Процес розв'язання усіх трьох задач описується орієнтованим ациклічним графом, а часткові значення цільової функції змінюються в часі та обчислюються за рекурентними правилами. Можна довести, що при знаходженні оптимального значення часткової цільової функції виконується принцип Беллмана. Моделювання динамічних задач з використанням теорії комбінаторної оптимізації показує, що аргументом цільової функції в них є вибірки різних типів: сполучення без повторень, розміщення як з повтореннями так і без повторень. Оскільки ці комбінаторні конфігурації утворюються послідовним вибиранням елементів з базової множини та формують кортежі або траєкторії, то процес розв'язання цих задач змінюється в часі. Завдяки цій властивості пошук оптимального розв'язку в оговорених задачах проводиться поетапно, а сам його процес описується орієнтованим ациклічним графом. З оговореного випливає, що вони подібні за аргументом цільової функції та розв'язуються одним і тим же методом – динамічним програмуванням.

Висновки

Задачі комбінаторної оптимізації різних класів, а також множини комбінаторних конфігурацій – подібні, якщо вони розв'язуються за однією і тією ж обчислювальною схемою або модифікацією одного і того ж алгоритму. Подібність задач комбінаторної оптимізації встановлюється за аргументом цільової функції та видом задачі (статична чи динамічна), а подібність комбінаторних множин – за способом їхнього утворення та впорядкування. Вивчення подібності задач комбінаторної оптимізації дозволяє розробляти ефективні універсальні підходи до їхнього розв'язання.

Список використаної літератури

1. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Пер. с англ. / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. – М.: Мир, 1980. – 476 с.
2. Липский В. Комбинаторика для программистов / Пер. с польск. / В. Липский – М.: Мир, 1988.– 213 с.
3. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Пер. с англ. / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985.– 510 с.
4. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. – К.: Наук. думка, 1981.– 281 с.
5. Тимофієва Н.К. Про подібність задач комбінаторної оптимізації та універсальність алгоритмів / Н.К. Тимофієва // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 4. – С. 27–37.
6. Тимофієва Н.К. Метод структурно-алфавітного пошуку та підкласи розв'язних задач із класу задачі комівояжера / Н.К. Тимофієва // УСиМ.– 2008. – № 4 – С. 20–36.