УДК 519.711-519.6

А.В. УСОВ
Одесский национальный политехнический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрены математические модели линейных неоднородных систем на базе сингулярных интегральных уравнений в зависимости от расположения неоднородностей. На основе сингулярных интегральных уравнений с некарлемановским сдвигом предложены динамические модели физических процессов, формирующихся в неоднородных средах.

Ключевые слова: математическая модель, линейные системы, сингулярные интегральные уравнения, некарлемановский сдвиг, импульсная характеристика, дефекты.

А.В. УСОВ
Одеський національний політехнічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуті математичні моделі лінійних неоднородних систем на базі сингулярних інтегральних рівнянь в залежності від розташування неоднорідностей. На основі сингулярних інтегральних рівнянь з некарлемановським зсувом рекомендовані динамічні моделі фізичних явищ, що формуються у неоднорідних середовищах.

Ключові слова:математична модель, лінійні системи, сингулярні інтегральні рівняння, некарлеманівський зсув, імпульсна характеристика, дефекти.

A.V. USOV
Odessa National Politechnikal Universiti

MATHEMATICAL DESIGN of LINEAR HETEROGENEOUS SYSTEMS METHODS of SINGULAR INTEGRAL EQUALIZATIONS

The mathematical models of the linear heterogeneous systems are considered on the base of singular integral equalizations depending on the location of heterogeneous. On the basis of singular integral equalizations with a некарлемановским change the dynamic models of the physical processes formed in heterogeneousen vironmentsare offered.

Keywords: mathematical model, linear systems, singular integral equalizations, nekarleman change, impulsive description, defects.

Наиболее эффективными из общего арсенала методов исследования физических процессов, протекающих в средах неоднородной структуры и электромагнитных сигналов в средах с переменными характеристиками, а также формирования микротрещин в конструкционных материалах, имеющих различного рода неоднородности наследственного происхождения, к настоящему времени являются методы с применением интегралов Коши, краевых задач теории аналитических функций, а также метода сингулярных интегральных уравнений [1 - 3]

Постановка проблемы

Рассмотрим некоторые положения, необходимые для моделирования систем в неоднородном пространстве. Рассмотрим контур $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_n$, состоящий из конечного числа попарно непересекающихся гладких кривых в комплексной плоскости C. Допустим, что кривые, составляющие контур L, не содержат точек самопересечения и могут быть замкнутыми или разомкнутыми. Положительным направлением обхода по кривой $L_i \left(1 \le i \le n\right)$, , если она замкнутая, считаем то направление, которое оставляет внутреннюю область, ограниченную этой кривой, слева. В случае разомкнутого контура положительным принимаем то направление обхода, по которому возрастает длина дуги от принятого за начало ее конца. Хотя при этом теряют смысл понятия «внутренняя» и «внешняя» области, направление обхода разомкнутого контура $L_k \left(1 \le k \le n\right)$ S^-, должно быть таким, что после дополнения его некоторой кривой до замкнутого контура внутренняя часть получившейся области все время находится слева. Внутреннюю и внешнюю области, разделенные системой замкнутых контуров, входящих в контур L, обозначим соответственно S^+ и S^-, при этом считаем, что внешняя область S^- содержит бесконечно удаленную точку комплексной плоскости C. Пусть функция $f(t) \in H^{\mu}(L)$, где $H^{\mu}(L)$ - множество непрерывных по Гельдеру на контуре функций, т. е. удовлетворяющих условию [5]

$$\left|f(t_2)-f(t_1)\right| \le A;\left|t_2-t_1\right|^{\mu}; \;\; A>0; \;\; 0<\mu<1. \tag{1}$$

Константа A здесь называется постоянной Гельдера, а $\mu -$показателем Гельдера. При этом , в точках $z \in L$ комплексной плоскости C существует в смысле главного значения интеграл типа Коши

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-2}, \; z \notin L \tag{2}$$

причем в точках $z \in L$ этот интеграл существует в обычном смысле, а на контуре L справедливо представление

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{2}f(t), \tag{3}$$

в котором интеграл правой части абсолютно сходящийся. Свойства интеграла типа Коши используются непосредственно при решении двумерных задач теории упругости, а также при его вычислении. Найдем, например, предельные значения сингулярного интеграла

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\overline{d}t}{t-z}, \qquad 4)$$

где $\varphi(t)$ принадлежит классу функций Гельдера H^{μ}.

Совместное применение основных положений плоской задачи теории упругости, а также теории функций комплексного переменного или же метода сингулярных интегральных уравнений, позволяет провести одновременную оценку напряженно-деформированного состояния возле дефекта типа трещины или жесткого включения. Особое значение при этом имеет асимптотика распределений тензора напряжений и вектора перемещений, вызванных внесением указанных дефектов в упругое тело. В асимптотическом приближении объединенные тензор напряжений и вектор перемещений возле вершин прямолинейного жесткого включения или трещины представляются следующим образом [6]:

$$\begin{pmatrix}\sigma_y\\ \sigma_x\\ \tau_{xy}\end{pmatrix}=-\frac{K_I^{\pm}}{4\sqrt{2\pi r\rho^*}}\begin{bmatrix}(3-2\rho^*)\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{5\beta}{2}\\ (5+2\rho^*)\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{5\beta}{2}\\ (1+2\rho^*)\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{5\beta}{2}\end{bmatrix}-\frac{K_{II}^{\pm}}{4\sqrt{2\pi r\rho^*}}\begin{bmatrix}-(3-2\rho^*)\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{5\beta}{2}\\ (2\rho^*-5)\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{5\beta}{2}\\ (1-2\rho^*)\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{5\beta}{2}\end{bmatrix}+0(r^0);$$

$$4G\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\frac{K_I^{\pm}}{\rho^*}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{pmatrix}\left[2(x+\rho^*)+1\right]\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{3\beta}{2}\\ \left[2(x-\rho^*)-1\right]\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{3\beta}{2}\end{pmatrix}-\frac{K_I^{\pm}}{\rho^*}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\begin{pmatrix}\left[2(x+\rho^*)+1\right]\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{3\beta}{2}\\ -\left[2(x-\rho^*)-1\right]\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{3\beta}{2}\end{pmatrix}+0\left(r^{3/2}\right). \tag{5}$$

Здесь$\left(\sigma_y,\sigma_x,\tau_{xy}\right)-$ компоненты тензора напряжений; (u,v)- компоненты вектора упругих перемещений; $K_I^{\pm},K_{II}^{\pm}-$ коэффициенты интенсивности напряжений (коэффициенты при сингулярной части напряжений); знаки «+» и «—» соответствуют правой и левой вершинам линейного трещиноподобного дефекта. При $\rho^*=-1$ из приведенных формул следует известное асимптотическое распределение возле трещины, а при $\rho^*=x,$ где $x=3\text{ - }4\mu$ для плоской деформации и $x=(3-\mu)/(1-\mu)$ для плоского напряженного состояния, получаем соответствующую асимптотику в случае жесткого включения [6].

Напряжения у вершин трещиноподобного дефекта имеют корневую особенность $1/\sqrt{r},$ где r - расстояние от конца трещины или включения. При этом коэффициенты K_I и K_{II} характеризуют локальное повышение уровня напряжений у вершин трещиноподобного дефекта, не являясь при этом зависимыми величинами от координат этого дефекта. Хотя размерность коэффициентов интенсивности напряжений, на первый взгляд, кажется необычной $\left(МПа/\sqrt{м}\right)$, эти величины можно интерпретировать как некоторое напряжение, действующее на расстоянии $\pi/2$ от вершины.

Трещины и жесткие включения в упругом теле представляют собой два крайних случая в теории заполненных дефектов. Средним для этих случаев является случай совпадения упругих характеристик заполнителя с соответствующими упругими постоянными материала несущей матрицы. Рассмотрение этих двух крайних случаев важно хотя бы из соображения установления верхней и нижней оценок влияния каких-либо заполнителей на общее напряженное состояние упругого тела, ливаций, касающихся теории жестких и других заполнителей, взаимодействующих с трещинами.

Результаты моделирования открывают возможность эффективной оценки влияния инородных заполнителей на потерю прочности упругого тела, содержащего отмеченные несовершенства. В свою очередь точное определение порядка и характера сингулярности напряжений возле вершин остроугольного несовершенства в упругом материале, представленное в аналитическом виде, необходимо в механике разрушения для формулировки и записи соответствующих критериальных соотношений прочности.

Пусть Г – кусочно-гладкая линия, состоящая из конечного числа гладких разомкнутых дуг a_kb_k. Узлы линии Г будем обозначать $c_j, j=\overline{1,\ n}$ или просто через c, когда речь идёт просто об одном из узлов линии.

Краевая задача Римана состоит в следующем: требуется найти кусочно-голоморфную функцию Ф(z) с линей скачков Г, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t),\ t\in\Gamma, \qquad (6)$$

Где $G(t)$, $g(t)$ – заданные на Г функции класса H_0, которые называются коэффициентом со свободным членом краевой задачи. Равенство (6) должно выполняться для всех обыкновенных точек линии Г.

Рассмотрим предварительно соответствующую (6) однородную краевую задачу Римана с условием

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),\ t\in\Gamma. \qquad (7)$$

Решение Х(z) однородной задачи (7) называется каноническим решением, если не только Х(z), но и 1/Х(z) являются кусочно-голоморфными функциями.

Предполагается, что коэффициент $G(t)$ принадлежит классу H_0и нигде на Г в нуль не обращается. Условимся понимать под lnG(t) вполне определенную для каждой дуги a_kb_k ветвь логарифмической функции. Очевидно, lnG(t) также принадлежит классу H_0.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\ln G(\tau)d\tau}{\tau-z}.$$

Тогда поведение функции expγ(z) вблизи угла c_j характеризует формула $\exp\gamma(z)=(z-c_j)^{\alpha_j+\beta_j}\exp\gamma_0(z)$. Будем искать каноническое решение задачи (7) в виде

$$X(z)=\exp\gamma(z)\prod_{j=1}^{n}(z-c_j)^{-x_j}=\prod_{j=1}^{n}(z-c_j)^{\alpha_j-x_j+\beta_j}\exp\gamma_0(z), \qquad (8)$$

где x_j – целые числа. Числа x_j должны быть выбраны так, чтобы было обеспечено нужное поведение функции Х(z) в окрестностях узлов линии Г, а именно $-1<a_j-b_j<1$. Использование математических моделей, которые адекватно описывают физические процессы на границе областей, особенности формирования сигналов в динамической среде на фоне переходных процессов, является предметом разнообразных прикладных исследований. Дистанционное зондирование является одним из эффективных методов исследования природных явлений, которое успешно применяется при изучении неоднородных сред, исследовании их характеристик, а также при определении особенностей их эволюции.

Известно, что реакция произвольной линейной системы с переменными параметрами на воздействие некоторого входного сигнала $s(t)$ может быть описана с помощью интегрального уравнения следующего вида:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}h(\tau,t)s(\tau)d\tau=g(t). \qquad (9)$$

Таким образом, поведение системы полностью определяется видом ядра $h(\tau,t)$, которое называют импульсной характеристикой системы.

Необходимо отметить, что решение уравнения (9) относительно неизвестной функции $s(t)$ представляет собой достаточно сложную задачу, а восстановление импульсной характеристики $h(\tau,t)$ по известным значениям функций $s(t)$ и $g(t)$ невозможно без дополнительных сведений о ее свойствах.

Традиционный подход, используемый при решении прикладных задач, состоит в том, что параметры линейной системы полагаются неизменными на некотором промежутке времени, для которого их изменение достаточно мало.

В этом случае импульсная характеристика на всем промежутке не зависит от t : $h(\tau,t)=h(\tau)$,что приводит нас к математической модели, использующей уравнение типа свертки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)s(\tau)d\tau = g(t) \tag{10}$$

или h∗S=g. Простота решения уравнений такого типа (как относительно $s(t)$, так и относительно $h(t)$) делает этот подход достаточно эффективным во многих прикладных задачах.

Для математических моделей такого типа имеется методика построения высокоэффективных алгоритмов восстановления импульсных характеристик, основанных на использовании специального вида зондирующих сигналов $s(t)$. Однако, в ряде случаев (например, в случае необходимости исследования общего поведения системы, в случае быстротекущих процессов и т.д.) использование уравнения (10) в качестве математической модели поведения изучаемой линейной системы может оказаться некорректным.

Математические модели, построенные на основании уравнений такого типа, дают возможность с необходимой точностью изучать процессы в неоднородных средах с переменными параметрами, что открывает новые возможности для их исследования.

Сингулярные интегральные уравнения с некарлемановскими сдвигами относятся к более широкому классу уравнений по отношению к обычным сингулярным интегральным уравнениям, и, соответственно, позволяют описать еще более широкий класс линейных систем с переменными параметрами. Сдвиг аргумента в уравнениях такого типа соответствует различным особенностям в поведении линейных систем (вращение объектов, эффект Доплера, модуляция сигналов и т.д.).

Рассмотрим сингулярные интегральные уравнения (СИУ) с чисто степенными ядрами на отрезках вещественной оси $[\alpha,\beta]$.

$$A(x)\int_{\alpha}^{x}\frac{\nu(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{\lambda}}+B(x)\int_{x}^{\beta}\frac{\nu(\tau)d\tau}{(\tau-x)^{\lambda}}=f(x), 0<\lambda<1. \tag{11}$$

Предельные значения вспомогательной кусочно-голоморфной функции

$$\Phi(z)=\int_{\alpha}^{\beta}\nu(\tau)\ S_b^{\lambda}(z,\tau)d\tau=\int_{\alpha}^{\beta}\nu(\tau)\left(\frac{\beta-z}{\tau-z}\right)^{\lambda}d\tau$$

вычисляются по формулам

$$\Phi^{\pm}(\mathrm{x})=e^{\pm i\pi\lambda}\int_{\alpha}^{x}\nu(\tau)\ S_b(\mathrm{t},\tau)d\tau+\int_{x}^{\beta}\nu(\tau)\ S_b(\mathrm{x},\tau)d\tau$$

С их помощью получим краевое условие задачи Римана $\Phi^{+}(\mathrm{x})=\mathrm{G}(\mathrm{x})\ \Phi^{-}(x)+g(x)$

$$G(x)=\frac{A(x)-e^{i\pi\lambda}B(\mathrm{x})}{A(x)-e^{-i\pi\lambda}B(\mathrm{x})},\quad g(x)=\frac{2i\sin\pi\lambda(\beta-x)^{\lambda}f(x)}{A(x)-e^{-i\pi\lambda}B(x)}. \tag{12}$$

По решению $\Phi(z)$ краевой задачи решение $\nu(x)$ СИУ находится обращением одного из уравнений Абеля

$$2i\sin\pi\lambda\int_{\alpha}^{x}\nu(\tau)\left(\frac{\beta-x}{x-\tau}\right)^{\lambda}d\tau=\Phi^{+}(\mathrm{x})-\Phi^{-}(x),\quad 2i\sin\pi\lambda\int_{x}^{\beta}\nu(\tau)\left(\frac{\beta-x}{\tau-x}\right)^{\lambda}d\tau=-e^{-i\pi\lambda}\Phi^{+}(\mathrm{x})+e^{i\pi\lambda}\Phi^{-}(x)$$

Рассмотрим другой способ приведения СИУ (11) с чисто степенным ядром к краевой задаче Римана при $\varphi(t)\equiv\lambda$

$$\int_{x}^{\beta}\frac{\nu(\tau)d\tau}{(\tau-x)^{\lambda}}=-\cos\pi\lambda\int_{\alpha}^{x}\frac{\nu(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{\lambda}}+\frac{\sin\pi\lambda}{\pi}(\beta-x)^{1-\lambda}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{(\beta-\xi)^{1-\lambda}}\int_{\alpha}^{\xi}\frac{\nu(\tau)d\tau}{(\xi-\tau)^{\lambda}}\frac{d\xi}{\xi-x},$$

Запишем уравнение (11) в виде СИУ с ядром Коши

$$A_1(x)\mu(x)+\frac{B_1(x)}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\mu(\xi)d\xi}{\xi-x}=f_1(x), \tag{13}$$

$$A_1(x)=A(x)-B(x)\cos\pi\lambda,\quad B_1(x)=\mathrm{i}\ \sin\pi\lambda B(x),\quad f_1(x)=(\beta-x)^{1-\lambda}\ f(x)$$

относительно функции

$$\mu(x)=(\beta-x)^{1-\lambda}\int_{\alpha}^{x}\frac{\nu(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{\lambda}}=\frac{1}{\beta-x}\int_{\alpha}^{x}\left(\frac{\beta-x}{x-\tau}\right)^{\lambda}\nu(\tau)d\tau$$

СИУ (13) в свою очередь, эквивалентно краевой задаче Римана

$$\Phi^{+}(\mathrm{x}) = \mathrm{G}(\mathrm{x})\ \Phi^{-}(x) + g_1(x) \tag{14}$$

$$G(x) = \frac{A_1(x) - B_1(x)}{A_1(x) + B_1(x)} = \frac{A(x) - e^{i\pi\lambda}B(\mathrm{x})}{A(x) - e^{-i\pi\lambda}B(\mathrm{x})}, \qquad g_1(x) = \frac{f_1(x)}{A_1(x) + B_1(x)} = \frac{(\beta - x)^{\lambda-1} f(x)}{A(x) - e^{-i\pi\lambda}B(\mathrm{x})}$$

Как и следовало ожидать, задача Римана (14) имеет такой же коэффициент $G(x)$, что и задача (11).

Поведение на концах отрезка $[\alpha,\beta]$ искомого решения $\Phi(z)$ краевой задачи Римана [7] зависит от поведения функции $\mu(x)$. Если решение $\nu(x)$ СИУ (14) допускает в точках α и β интегрируемые особенности, то соответствующая ему функция $\mu(x)$ удовлетворяет на интервале (α,β) условию H с показателем большим, чем $1-\lambda$, и допускает в точках α и β особенности порядков меньших, чем λ и 1 соответственно. С другой стороны, если функция $\mu(x)$ (разность предельных значений решения краевой задачи Римана) удовлетворяет условию H с показателем большим, чем $1-\lambda$, на интервале (α,β) и допускает в точках α и β особенности порядков меньших, чем λ и 1, то соответствующее ей решение $\nu(x)$ имеет в точках α и β интегрируемые особенности.

Будем считать, что коэффициенты $A(x)$, $B(x)$ уравнения (14) удовлетворяют H с показателем большим, чем $1-\lambda$, правая часть $f(x)$ удовлетворяет тому же условию H на интервале (α,β) и допускает в точках α и β особенности порядков меньших, чем λ. Кроме того, пусть выполняется условие

$$\Omega(x) = A_1^2(x) + B_1^2(x) = A^2(x) - 2\cos\pi\lambda A(x)B(x) + B^2(x) \neq 0.$$

Очевидно, $|G(x)| = 1$. Обозначим через $\theta(x) = \arg \mathrm{G}(x)$ такую ветвь многозначной функции, что $-2\pi < \theta(\alpha) \le 0$. Тогда при $\theta(\alpha) < 2\pi\lambda$ можно строить неограниченное на конце $x = \alpha$ решение краевой задачи Римана; если же $\theta(\alpha) \ge 2\pi\lambda$, то решение задачи Римана должно быть ограниченным на этом конце. На конце $x = \beta$ решение краевой задачи может быть неограниченным. Предположение о гельдеровских свойствах коэффициентов и правой части уравнения [8] обеспечит принадлежность разности предельных значений решения краевой задачи Римана классу H с показателем большим, чем $1-\lambda$.

Список использованной литературы

1 Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи// Н.П. Векуа/ Изд-во "Наука", 1970.- 379 с.
2 Гахов Ф.Д. Краевые задачи // Ф.Д. Гахов /Изд-во "Наука", 1977. – 640 с.
3 Гахов Ф.Д. Уравнения типа свертки //Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский /Изд-во "Наука", М., 1978. – 296с.
4 Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом// Г.С. Литвинчук /Главная редакция физ.-мат. литературы "Наука", 1977. -448с.
5 Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения //Н.И. Мусхелишвили/ Главная редакция физ.-мат. литературы "Наука", 1968. -512 с.
6 Панасюк В.В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции// В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук/ Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
7 Siegfried PROSSDORF Einige Klassen singularer Gleichungen //Akademie Verlag Berlin, 1974. – 494 s.
8 Оборский Г.А. Моделирование систем:/монография/ Г.А. Оборский, А.Ф. Дащенко, А.В. Усов, Д.В. Дмитришин.– Одесса: Астропринт, 2013.– 664с.