

УДК 621.431.74

Р.А. ВАРБАНЕЦ, В.Г. ИВАНОВСКИЙ, А.В. ЕРИГАНОВ,
Н.И. АЛЕКСАНДРОВСКАЯ, Е.И. ЖОЛТИКОВ, В.С. ГУБИН
Одесский национальный морской университет ОНМУ

ПРИМЕНЕНИЕ БЕЗГРАДИЕНТНОЙ МИНИМИЗАЦИИ POWELL'64 В ЗАДАЧАХ МОНИТОРИНГА РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА СУДОВЫХ ДИЗЕЛЕЙ

Рассмотрена возможность применения метода безградиентной n -параметрической минимизации Powell'64 в задачах мониторинга рабочего процесса судовых дизелей. Показан пример поиска глобального минимума тестовой функции Розенброка. С помощью метода Powell'64 минимизируются функционалы МНК в задачах синхронизации и моделирования кривых сжатия-расширения в рабочем цилиндре. Показаны случаи расчета синхронизации данных для малооборотных двухтактных и среднеоборотных четырехтактных судовых дизелей. Задача синхронизации решается на базе уравнения $P'=0$, составленного для участка от начала сжатия до начала сгорания в цилиндре. Показан выбор граничных условий моделирования. Преимуществом использования метода Powell'64 является его высокая эффективность для квадратичных функционалов. В отличие от градиентных методов, метод Powell'64 не требует расчета производных и является универсальным для минимизации сложных нелинейных функционалов общего вида.

Ключевые слова: безградиентная минимизация, функция Розенброка, рабочий процесс дизеля, политропа сжатия, функционал, МНК.

Р.А. ВАРБАНЕЦЬ, В.Г. ІВАНОВСЬКИЙ, О.В. ЕРИГАНОВ,
Н.І. АЛЕКСАНДРОВСЬКА, Е.І. ЖОЛТІКОВ, В.С. ГУБІН
Одеський національний морський університет ОНМУ

ВИКОРИСТАННЯ БЕЗГРАДІЕНТНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ POWELL'64 В ЗАДАЧАХ МОНИТОРИНГУ РОБОЧОГО ПРОЦЕСУ СУДНОВИХ ДИЗЕЛІВ

Розглянуто можливість застосування методу безградиентної n -параметричної мінімізації Powell'64 в задачах моніторингу робочого процесу судових дизелів. Надано приклад пошуку глобального мінімуму тестової функції Розенброка. За допомогою методу Powell'64 мінімізуються функціонали МНК в задачах синхронізації і моделювання кривих стиснення-розширення в робочому циліндрі. Показані випадки розрахунку синхронізації даних для малооборотних двотактних і середньооборотних чотиритактних судових дизелів. Задача синхронізації розв'язується на базі рівняння $P' = 0$, складеного для ділянки від початку стиснення до початку згоряння в циліндрі. Показаний вибір граничних умов моделювання. Перевагою використання методу Powell'64 є його висока ефективність для квадратичних функціоналів. На відміну від градієнтних методів, метод Powell'64 не вимагає розрахунку похідних і є універсальним для мінімізації складних нелінійних функціоналів загального вигляду.

Ключові слова: безградієнтна мінімізація, функція Розенброка, робочий процес дизеля, політропа стиснення, функціонал, МНК.

R.A. VARBANETS, V.G. IVANOVSKY, A.V. ERIGANOV,
N.I. ALEXANDROVSKAYA, E.I. ZHOLTIKOV, V.S. GUBIN
Odessa National Maritime University ONMU

APPLICATION OF NON-GRADIENT MINIMIZATION POWELL'64 IN THE TASKS OF THE MONITORING OF THE MARINE DIESEL ENGINES

The possibility of using the method of gradientless n -parametric minimization of Powell'64 in tasks of monitoring the working process of marine diesel engines is considered. An example of finding a global minimum of the Rosenbrock test function is considered. Using the Powell'64 method, the Least-squares functionals in the synchronization and compression-expansion curves in the working cylinder are minimized. The cases of data synchronization calculation for low-speed two-stroke and medium-speed four-stroke marine diesel engines are shown. The synchronization problem is solved on the basis of the equation $P' = 0$, compiled for the section from the beginning of compression to the start of combustion in the cylinder. The selection of the boundary conditions for simulation is shown. The advantage of using the Powell'64 method is its high efficiency for quadratic functionals. Unlike gradient methods, the Powell'64 method does not require the calculation of derivatives and is universal for minimizing complex nonlinear functionals of general form.

Keywords: gradientless minimization, the Rosenbrock function, the working process of the diesel engine, the compression polytrope, the functional, Least-squares method.

Постановка задачи

Для качественного сгорания топлива в цилиндре дизеля необходима синхронизированная работа топливной системы высокого давления (ТА) и механизма газораспределения (МГР) [1]. Фазы закрытия/открытия клапанов и фазы впрыска топлива должны быть строго регламентированы. Наглядный контроль работы ТА и МГР возможен с помощью развернутых $P(\varphi)$ диаграмм (рис. 1), которые в последние годы все более широко применяются на морском флоте [2]. Смысл в том, что на фоне диаграммы рабочего цикла, представленной в °ПКВ от нижней мертвой точки (НМТ) через верхнюю мертвую точку (ВМТ) и снова в НМТ удобно показывать фазы закрытия/открытия клапанов и фазы впрыска топлива, которые получают разносеными по разным места диаграммы и удобны для визуального анализа (рис.1). На индикаторную $P(\varphi)$ диаграмму можно наложить отмасштабированную диаграмму давления впрыска топлива или вибродиаграмму впрыска, а также вибродиаграмму работы МГР [3] и это улучшит визуальное восприятие индикаторной диаграммы и повысит ее диагностическую информативность.

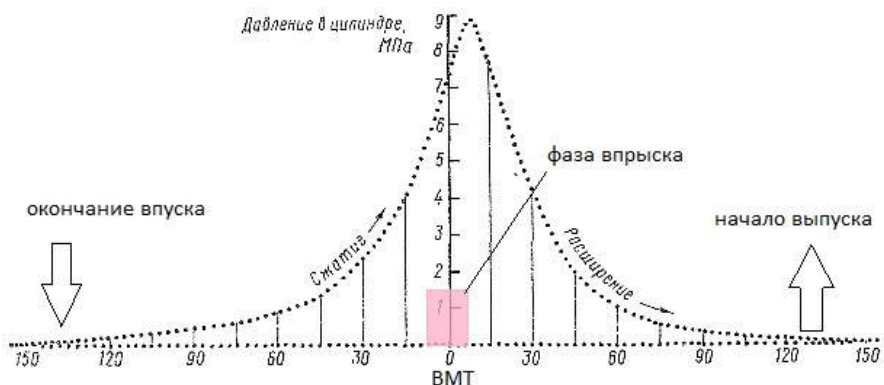


Рис. 1. Диаграмма рабочего цикла дизеля в $P(\varphi)$ координатах

Для представления индикаторных диаграмм в $P(\varphi)$, а также в $P(V)$ и $T(S)$ (давление-объем, температура-энтропия) координатах необходимо иметь как можно более точное соответствие между давлениями в цилиндре и углами ПКВ. Для этого используются датчики на маховике двигателя (pick-up sensors [4]), которые измеряют фазу ПКВ синхронно с датчиками давления в цилиндре. Далее, зная геометрию цилиндра и кривошипно-шатунного механизма (КШМ) происходит пересчет °ПКВ в объемы надпоршневого пространства [5].

Проблема заключается в том, что аппаратное определение фаз ПКВ с помощью pick-up sensors настроенных в статике, будет иметь погрешности во время работы двигателя под нагрузкой. Основные составляющие этой погрешности следующие:

- выборка микролюфтов КШМ при знакопеременной нагрузке;
- крутильные колебания и скручивание коленчатого вала;
- волновые эффекты и задержка сигнала давления при прохождении им пути от условного центра камеры сгорания до мембраны датчика в случае измерения давления через канал индикаторного крана.

Последняя составляющая может быть весьма существенной (до 8 °ПКВ на среднеоборотных СОД и до 12 °ПКВ на высокооборотных дизелях) [3]. А в связи с тем, что все переносные системы мониторинга используют именно этот способ измерения давления и это является обычной практикой индицирования судовых дизелей, можно смело предположить, что использование pick-up sensors для переносных систем вообще нецелесообразно. Все виды расчетного определения ВМТ дают заведомо меньшую погрешность, нежели погрешность от задержки сигнала [6, 7].

В данной статье приведен анализ методов расчетной синхронизации (определения ВМТ), в которых применяется метод безградиентной минимизации POWELL'64.

Анализ последних исследований и публикаций

Анализ последних исследований и публикаций показывает в первую очередь, что задача определения положения ВМТ является важной составляющей мониторинга рабочего процесса, поскольку от точности ее решения существенно зависит расчетное значение среднего индикаторного давления и индикаторной мощности цилиндра. В общем виде зависимость погрешности расчета индикаторной мощности от погрешности ВМТ показана в работе М. Tazerout [6] - на каждый градус погрешности приходится до 9% расчетного значения мощности.

Термодинамические методы расчета и корректировки положения ВМТ предложены в работах [6, 7]. Они основаны в том числе на расчете энтропии при известных значениях давления в цилиндре. Комментируя их можно отметить, что наличие цифровых и аналоговых шумов при измерении давления в цилиндре могут значительно снизить точность сложных расчетов. Численное определение первой, а тем более второй производной не имеет смысла без специальной обработки исходных данных (например LowPass FFT Filter [8]).

Интересное свойство индикаторной диаграммы, точнее ее первой производной, показано в работе [9]. С учетом допущений принятых на практике показано, что в точке максимальной скорости роста давления на участке сжатия объем цилиндра равен:

$$V = \frac{P(V')^2}{PV'' + P'V'} \quad (1)$$

$$\text{где } \frac{dP}{d\varphi} = P'; \quad \frac{d^2P}{d\varphi^2} = P''; \quad \frac{dV}{d\varphi} = V'; \quad \frac{d^2V}{d\varphi^2} = V'',$$

Таким образом, объем над поршнем в указанной точке может быть рассчитан с помощью известных геометрических размеров цилиндра и значений $P(\varphi)$ и $P'(\varphi)$, полученных из индикаторной диаграммы. Далее может быть определен объем камеры сжатия и положение ВМТ, как показано в [9, 10]. Красивый теоретический вывод данного положения (1), к сожалению, также сложно использовать на практике, т.к. точность расчета объема камеры сжатия и положения ВМТ сильно зависит от шумов записанной диаграммы давления. Применение LowPass Filter [8] необходимо обосновывать для каждого конкретного случая, учитывая параметры АЦП преобразования, дискретность и аналоговые шумы при измерении давления в рабочих цилиндрах с помощью датчиков разных фирм.

Цель исследования

Целью данной публикации является анализ решения задачи определения ВМТ с помощью моделирования кривой скорости сжатия. При этом используется часть данных индикаторной диаграммы до начала сгорания, по которым определяются коэффициенты модели $P'(\varphi)$. При этом минимизируется функционал, составленный согласно требованиям МНК:

$$F = \sum_{i=1}^{l2} [P'(\varphi_i) - P'_i]^2 \rightarrow \min,$$

где $l1, l2$ - границы моделирования, определяемые от начала сжатия до начала сгорания;

P'_i - значения первых производных, полученные с помощью методов численного дифференцирования индикаторной диаграммы.

Минимизацию указанного функционала предлагается произвести с помощью метода безградиентной минимизации POWELL'64 [11, 12]. Этот метод позволяет определить минимум нелинейной функции n -переменных путем проведения последовательных поисков вдоль системы сопряженных направлений [12]. Метод POWELL'64 не использует производных для осуществления поиска, что весьма удобно в практических расчетах. Кроме того, он является эффективным не только для квадратичных функций, но и для нелинейных n -параметрических функций общего вида.

Пример использования метода POWELL'64 на тестовой функции.

Покажем вначале работу нелинейного метода n -параметрической безградиентной минимизации по сопряженным направлениям POWELL'64 на примере тестовой функции Розенброка [11]:

$$Z(x_1, x_2) = 100 * (x_1 - x_2^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Известная нелинейная двухпараметрическая функция Розенброка часто используется для тестирования методов минимизации в связи с ее специфической формой. Ее легко представить визуально (рис. 2) - она представляет собой изогнутый овраг с крутыми склонами и длинным слабоизменяющимся криволинейным дном. Ее минимум ($Z = 0$) находится в точке $[x_1 = 1, x_2 = 1]$.

Специфика поиска минимума функции Розенброка заключается в том, что если задать начальную точку поиска $[x_1 = -2, x_2 = 2]$ ($Z = 3609$), которая относительно точки минимума находится с другой стороны криволинейного оврага, то метод минимизации должен обойти все криволинейное дно функции и выйти на точку глобального минимума. От того, как быстро будет найден минимум функции Розенброка из неудобной начальной точки поиска $[x_1 = -2, x_2 = 2]$, зависит эффективность того или иного метода минимизации. Учитывается общее количество итераций метода и количество расчетов самой функции Розенброка.

Использование сопряженных [12] направлений поиска является эффективным алгоритмом для квадратичных n -параметрических функций и, соответственно, для решения задач МНК. В специальной литературе по анализу методов минимизации [11] указано, что ряд градиентных методов, в частности метод наискорейшего спуска, оказываются неэффективными для некоторых функций. Например, в данном случае, при начальной точке поиска $[x_1 = -2, x_2 = 2]$, градиентные методы могут производить большое количество вычислений функции Розенброка, определяя локальные минимумы между боковыми склонами оврага и при этом медленно двигаясь в сторону глобального минимума. Применяемый в методе POWELL'64 алгоритм поиска по сопряженным направлениям лишен этого недостатка.

Из каждого локального минимума на следующей итерации, при необходимости, происходит поворот осей в сопряженных направлениях [12] и движение в сторону глобального минимума происходит большими шагами по дну оврага функции (рис. 3). Пошаговый алгоритм метода POWELL'64 детально описан в [11, 12].

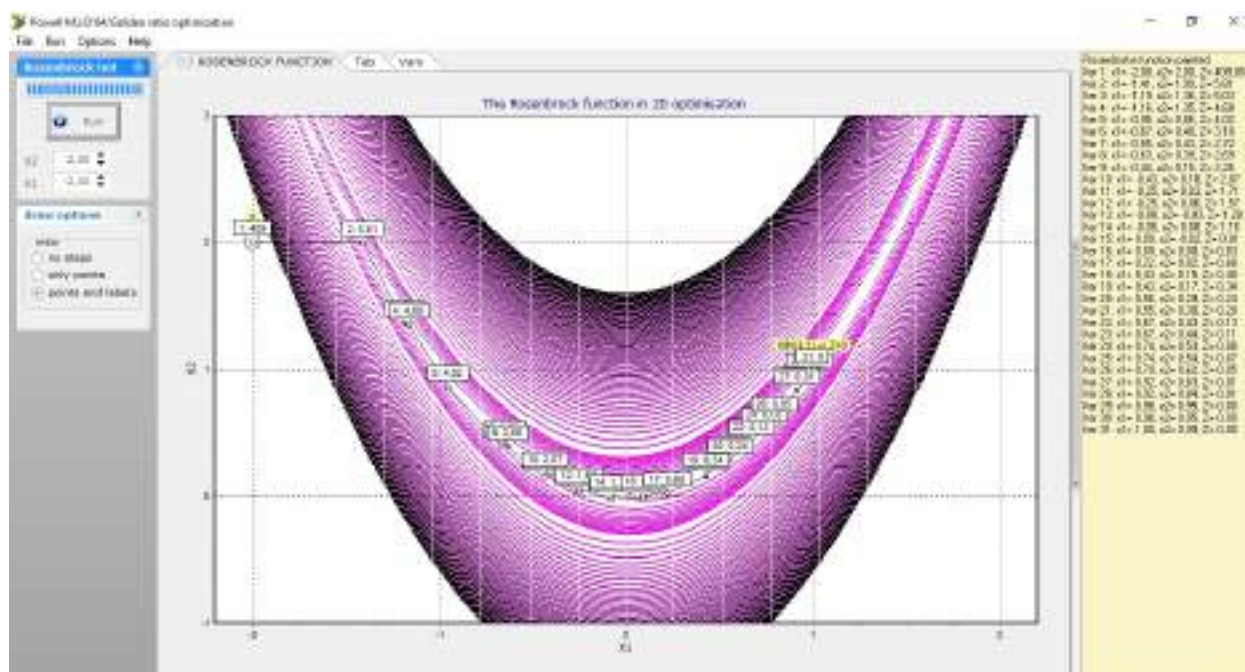


Рис. 2. Поиск минимума функции Розенброка [11] с помощью метода POWELL'64 (интерфейс ПО)

В данной публикации используется модификация метода POWELL'64 которая предусматривает использование метода "золотого сечения (GM)" [11] при поиске локальных минимумов в направлении осей. В оригинальном методе используется поиск минимума в осевых направлениях с помощью квадратичной функции [12]. Оказалось, что эффективность метода "золотого сечения" выше, чем у метода последовательного деления пополам и существенно превосходит эффективность поиска непоследовательными методами [11]. Поиск GM основан на разбиении отрезка прямой на две части пропорциональные числам Фибоначчи Φ^1 и Φ^2 , при этом отношение длины всего отрезка к большей части равно отношению большей части к меньшей.

$$\Phi^1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.62; \Phi^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.38, \\ \Phi^1 + \Phi^2 = 1.$$

По мнению авторов, использование метода "золотого сечения" более эффективно для нелинейных функций общего вида, для которых расчет с помощью оригинального алгоритма [12] часто приводит к переполнению регистров памяти компьютера и за чем необходим специальный контроль.

В данном случае количество общих итераций при поиске минимума функции Розенброка с поворотом осей в сопряженных направлениях составило 31 (см. рис.2). На рис. 2 видно, что метод POWELL'64 уже на второй итерации быстро определяет положение дна оврага функции и затем осуществляет большие эффективные шаги в сторону глобального минимума по дну оврага (рис. 3). Сравнительный анализ методов n-параметрической нелинейной минимизации, приведенный в [11], показывает, что метод POWELL'64 является наиболее эффективным методом поиска минимумов n-параметрических нелинейных функций общего вида без использования производных.

В общем случае градиентные методы дают большую скорость поиска, но необходимость задания частных производных по параметрам поиска усложняет оптимизационную задачу и может служить причиной трудновывяемых ошибок.

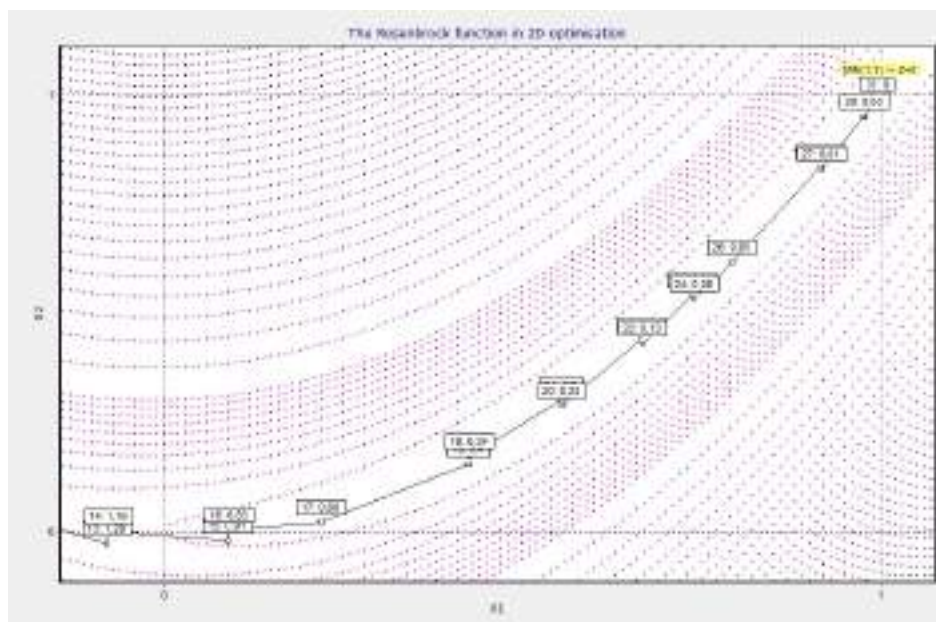


Рис. 3. Этапы поиска функции Розенброка [11] в районе точка минимума

Часто минимизируемый функционал представляет собой сложную нелинейную функцию общего вида либо является результатом работы алгоритма со сложной условно изменяющейся структурой. В этом случае для поиска минимума такого функционала задаются граничные условия по независимым переменным, в рамках которых должен быть найден минимум. Использование первых, а тем более вторых производных по независимым переменным, часто оказывается неудобным для исследователей, т.к. почти всегда исследователи модифицируют свой алгоритм, и численное приближение производных усложняет процесс исследований, являясь источником трудновывяемых ошибок. Использование же алгоритма POWELL'64 не связано с производными и обладает эффективностью, не уступающей градиентным методам [11, 12].

Определение давления в конце сжатия P_c в расчетном методе синхронизации

В [3] рассмотрен метод алгоритмической синхронизации, основанный на моделировании участка сжатия функцией типа «Локон Аньези»

$$P(\varphi) = \frac{P_c}{1 + k(\varphi - m)^2}, \tag{2}$$

где k и m – коэффициенты, определяемые в результате минимизации функционала (3) с независимой переменной φ_j , где индекс j изменяется от 1 до l

$$\bar{F} = \sum_{j=1}^l \gamma_j \left[\frac{P_j}{P(\varphi_j)} - 1 \right]^2 \mapsto \min, \tag{3}$$

где γ_j – положительные веса отдельных измерений в диапазоне 0-1.

Минимизация функционала \bar{F} производится, исходя из условия одновременного равенства нулю частных производных

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial k} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial m} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial P_c} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Значение m – искомая координата ВМТ поршня, как положительный корень трансцендентного уравнения (5), являющегося решением вышеуказанной системы уравнений в частных производных

$$\sum_{j=1}^l c_j b_j / \sum_{j=1}^l c_j b_j = \sum_{j=1}^l c_j / \sum_{j=1}^l d_j, \tag{5}$$

$$\text{где} \begin{cases} d_j = \bar{\gamma}_j a_j^2 b_j^3; \\ c_j = \bar{\gamma}_j a_j b_j (1 - a_j); \\ b_j = \varphi_j - m; \\ a_j = p_j / P_c. \end{cases}$$

Область определения искомого m ограничивается условием $\sum_{j=1}^l d_j \neq 0$. Таким образом, в [3] приведено решение задачи синхронизации данных рабочего процесса (определение m и k), при этом полагается известным начальное значение давления в конце процесса сжатия P_c .

Рассмотрим задачу определения значения P_c , которая естественно возникает после решения задачи синхронизации и служит в качестве начальных значений для следующего итерационного цикла определения m и k . Запишем выражение для частных производных F'_k, F'_m, F'_{P_c} и решим систему.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j \left[2 \left(\frac{P_j}{P_c} + k \frac{P_j}{P_c} (\varphi_j - m)^2 - 1 \right) \left(\frac{P_j}{P_c} (\varphi_j - m)^2 \right) \right] = 0; \\ \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j \left[2 \left(\frac{P_j}{P_c} + k \frac{P_j}{P_c} (\varphi_j - m)^2 - 1 \right) \left(-2k \frac{P_j}{P_c} (\varphi_j - m) \right) \right] = 0; \\ \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j \left[2 \left(\frac{P_j}{P_c} + k \frac{P_j}{P_c} (\varphi_j - m)^2 - 1 \right) \left(-1 \right) \frac{P_j}{P_c^2} (1 + k(\varphi_j - m)^2) \right] = 0. \end{cases}$$

Сократим постоянные коэффициенты, при условии $k \neq 0$. Для третьего уравнения, при условии $P_c \neq 0$, вынесем и сократим $1/P_c^2$. Определим выражение для k из первых двух уравнений. Сократим постоянные коэффициенты и решим 3-е уравнение системы.

$$\begin{cases} k \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j \left(\frac{P_j}{P_c} \right)^2 (\varphi_j - m)^4 - \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j \left[\frac{P_j}{P_c} (\varphi_j - m)^2 - \left(\frac{P_j}{P_c} \right)^2 (\varphi_j - m)^2 \right] = 0; \\ k \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j \left(\frac{P_j}{P_c} \right)^2 (\varphi_j - m)^3 - \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j \left[\frac{P_j}{P_c} (\varphi_j - m) - \left(\frac{P_j}{P_c} \right)^2 (\varphi_j - m) \right] = 0; \\ \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j \left[\frac{P_j^2}{P_c} (1 + k(\varphi_j - m)^2)^2 - P_j (1 + k(\varphi_j - m)^2) \right] = 0. \end{cases}$$

Произведем замену переменных, обозначим $z = 1 + k(\varphi_j - m)^2$, запишем

$$\sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j \left[z^2 \frac{P_j^2}{P_c} - z P_j \right] = 0; \Rightarrow \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j z^2 \frac{P_j^2}{P_c} = \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j z P_j; \Rightarrow \frac{1}{P_c} \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j z^2 P_j^2 = \sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j z P_j;$$

$$P_c = \frac{\sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j z^2 P_j^2}{\sum_{j=1}^l \bar{\gamma}_j z P_j}. \tag{6}$$

После определения P_c , при уже найденных на предыдущем шаге значениях m (положительный корень трансцендентного уравнения (5)) и k равное

$$k = \frac{\sum_{j=1}^l c_j}{\sum_{j=1}^l d_j}$$

появляется возможность составить итерационный цикл, в котором будет уточнено два основных параметра, необходимых для синхронизации данных, это параметры m и P_c (6).

Минимизация функционала (3) производилась с помощью метода POWELL'64. Необходимо отметить, что при корректно заданной области определения функционала (3), т.е. при точно определенной фазе окончания сжатия и начала сгорания топлива (см. предыдущий раздел), требуемое количество итераций для уточнения m и P_c не превышало 3-х для большинства исследованных рабочих процессов СОД и МОД. В связи с этим подтверждается особая значимость как можно более точного определения фазы начала сгорания P_c для решения задачи синхронизации данных и последующего расчета индикаторных показателей рабочего цикла.

Синхронизации на базе решения полиномиального уравнения кривой сжатия.

Альтернативным методом, служащим для проверки эффективности решения задачи синхронизации с помощью безградиентного метода POWELL'64, является метод полиномиального представления кривой сжатия. Приведем кратко его суть.

Запишем зависимость $P = f(\varphi)$ на линии сжатия в относительных координатах $\bar{P}_c = [P]$ и $\bar{\varphi} = [\varphi]$ ($\bar{P}_c = P_\varphi / P_c$ и $\bar{\varphi} = \frac{\varphi - 180}{180}$, рис. 4).

Опишем кривую сжатия в относительных координатах в виде полинома n-степени:

$$\bar{P}_c = a_0 + a_1 \bar{\varphi} + a_2 \bar{\varphi}^2 + \dots + a_n \bar{\varphi}^n$$

На кривой $\bar{P} = f(\bar{\varphi})$ берем две точки, для которых известно давление P , но неизвестны углы $\bar{\varphi}$. Запишем выражение для двух произвольных точек на кривой (a и b)

$$a: (\bar{P}_c)_1 = a_0 + a_1(\bar{\varphi}_2 - \Delta\bar{\varphi}) + a_2(\bar{\varphi}_2 - \Delta\bar{\varphi})^2 + \dots + a_n(\bar{\varphi}_2 - \Delta\bar{\varphi})^n \tag{7}$$

$$b: (\bar{P}_c)_2 = a_0 + a_1 \bar{\varphi}_2 + a_2 \bar{\varphi}_2^2 + \dots + a_n \bar{\varphi}_2^n ; \tag{8}$$

где $\Delta\bar{\varphi} = \frac{\Delta\varphi}{180}$, шаг по углу поворота коленчатого вала $\Delta\varphi$ задается шагом дискретизации АЦП и не превышает 0,5° ПКВ.

Для уравнений (7) и (8) неизвестными являются $(\bar{P}_c)_2$, $(\bar{P}_c)_1$ и $\bar{\varphi}_2$.

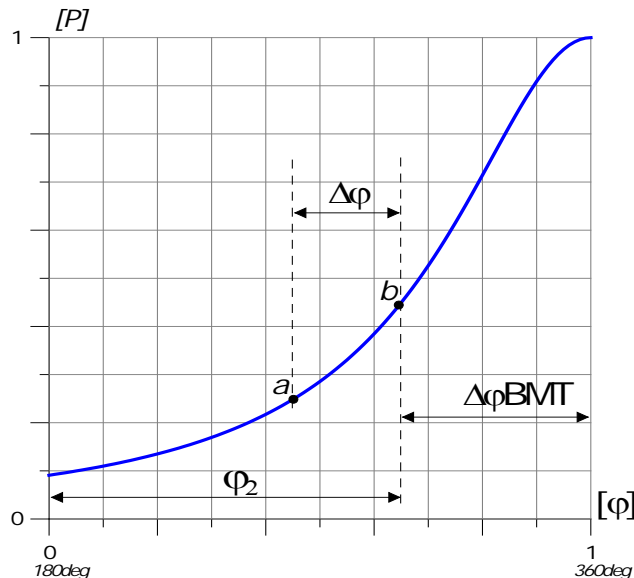


Рис. 4. График $\bar{P} = f(\bar{\varphi})$ в относительных координатах

По определению, в относительных координатах можно записать

$$(\bar{P}_c)_2 = P_2 / P_c ; \tag{9}$$

$$(\bar{P}_c)_1 = P_1 / P_c . \tag{10}$$

Итого в уравнениях (7), (8), (9) и (10), неизвестны $(\bar{P}_C)_2$, $(\bar{P}_C)_1$, $\bar{\varphi}_2$ и P_C . В результате решения системы уравнений (7) - (10) находим $\bar{\varphi}_2$ и P_C . Затем по значению $\bar{\varphi}_2$ находим $\Delta\bar{\varphi}_{ВМТ}$, т.е. искомую координату ВМТ.

Итак, запишем основные этапы решения

$$\left\{ \begin{aligned} (\bar{P}_C)_2 &= a_0 + a_1\bar{\varphi}_2 + a_2\bar{\varphi}_2^2 + \dots + a_n\bar{\varphi}_2^n = f(\bar{\varphi}_2); \\ (\bar{P}_C)_1 &= a_0 + a_1(\bar{\varphi}_2 - \Delta\bar{\varphi}) + a_2(\bar{\varphi}_2 - \Delta\bar{\varphi})^2 + \dots \\ &+ a_n(\bar{\varphi}_2 - \Delta\bar{\varphi})^n = f_1(\bar{\varphi}_2); \\ \frac{P_2}{P_C} &= f(\bar{\varphi}_2); \\ \frac{P_1}{P_C} &= f_1(\bar{\varphi}_2). \end{aligned} \right.$$

Для давления в конце сжатия запишем

$$P_C = \frac{P_2}{f(\bar{\varphi}_2)} \text{ или } P_C = \frac{P_1}{f_1(\bar{\varphi}_2)}$$

$$\frac{P_2}{f(\bar{\varphi}_2)} = \frac{P_1}{f_1(\bar{\varphi}_2)}; P_2 f_1(\bar{\varphi}_2) = P_1 f(\bar{\varphi}_2); \frac{P_2}{P_1} = \frac{f(\bar{\varphi}_2)}{f_1(\bar{\varphi}_2)} = b.$$

Для решения полученного уравнения и определения искомого $\bar{\varphi}_2$ необходимо ввести исходные данные для P_2 , P_1 и $\Delta\varphi$. Корни полинома определяются численным методом и из них выбирается один вещественный корень, находящийся в диапазоне $[\pi, 2\pi]$.

Предварительная синхронизация данных с помощью синусоидальной модели.

Данные, поступающие в систему в результате аналого-цифрового преобразования, представляют собой ряд чисел, записанных через равные промежутки времени $P(t) = P_1, P_2, \dots, P_n$. Решение задачи синхронизации с использованием уравнения $P'(\varphi) = 0$ и с использованием процедуры нелинейной минимизации можно рассматривать как окончательную, уточняющую расчетные координаты, операцию. В процессе решения используется значение текущей степени сжатия, которая рассчитывается по формуле текущего объема цилиндра $v(\varphi)$. Таким образом, без информации о начальных приближениях величин углов поворота коленчатого вала – $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ решение данной задачи невозможно.

Для решения задачи предварительной оценки углов ПКВ рассмотрим несколько моделей, подходящих для описания исходных данных $P(t)$ и первой производной $dp/d\varphi$.

1. Линейная модель $y = b_0 + b_1\varphi$.

В общем случае коэффициенты линейной модели рассчитываются по формулам

$$b_1 = \frac{\sum_{i=k1}^{k2} \varphi_i \sum_{i=k1}^{k2} y_i - k \sum_{i=k1}^{k2} \varphi_i y_i}{\left(\sum_{i=k1}^{k2} \varphi_i \right)^2 - k \sum_{i=k1}^{k2} \varphi_i}, \quad b_0 = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=k1}^{k2} y_i - b_1 \sum_{i=k1}^{k2} \varphi_i \right).$$

Для случая, когда имеется полная запись кривой сжатия-расширения (рис. 5), значения $k1 = \varphi_B$, $k2 = \varphi_C$.

Такой метод предварительной оценки положения ВМТ используется в системах *Lemag (Premet)* [13]. Однако очевидно, что во многих случаях невозможно или нельзя даже кратковременно отключать подачу топлива в индицируемый цилиндр, чтобы получить «чистую» кривую сжатия-расширения.

На практике, в общем случае, мы имеем дело с реальной кривой давления газов в цилиндре (рис. 6), где участок характеристики $p'(\varphi)$ с почти прямолинейным характером, однозначно определяющим положение ВМТ (точка m), ограничен $[b, c']$. Отсюда понятно, что использование линейной модели для предварительной оценки положения ВМТ в реальной эксплуатационной ситуации может привести к

значительной погрешности. Тем не менее, такой метод используется на практике в системах *Premet*, где предусмотрена полуавтоматическая корректировка ВМТ.

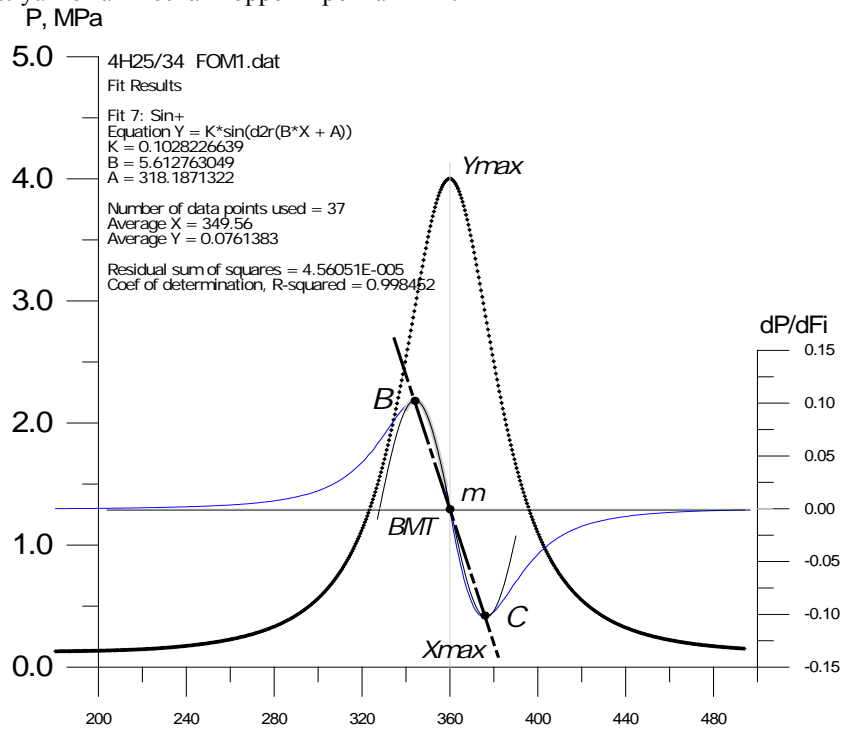


Рис. 5. Модели $p(\varphi)$, $p'(\varphi)$ в задаче предварительной синхронизации

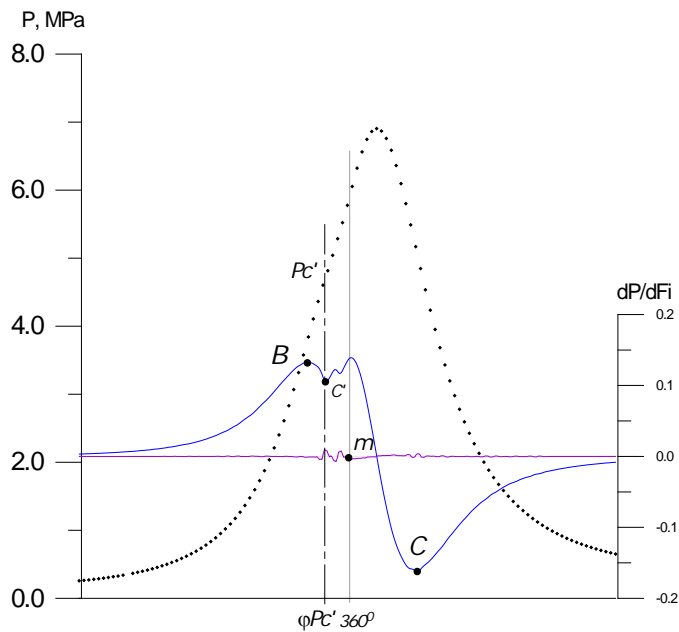


Рис. 6. Диаграммы $P(\varphi)$, $P'(\varphi)$ рабочего процесса в цилиндре

2. Модель $y = \frac{1}{a\varphi^2 + b\varphi + c}$, $a \neq 0$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$.

Форма такой кривой при данных условиях приближается к кривой сжатия-расширения (рис. 5). Коэффициенты a , b , c определяются с помощью минимизации функционала

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{\varphi_c'} \gamma_i \left(\frac{P(\varphi)}{y(\varphi_i)} - 1 \right)^2 \mapsto \min, \tag{11}$$

где γ_i – положительные, заданные веса отдельных участков кривой $p(\varphi)$.

Контрольные точки и положение ВМТ определяются по формулам

$$m = \varphi_{ВМТ} = X_{\max} = -b/2a ;$$

$$y_{\max} = 4a / \Delta = \frac{4a}{4ac - b^2} ;$$

$$\left[\begin{array}{l} B \left(\frac{X_{\max} - \sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}} \right), \frac{3a}{\Delta} \\ C \left(\frac{X_{\max} + \sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}} \right), \frac{3a}{\Delta} \end{array} \right] .$$

Представление участка кривой сжатия в виде такой модели позволяет более точно определить положение ВМТ, так как в моделировании участвует вся левая часть выборки $p(\varphi)$, т.е. от условного начала кривой сжатия (индекс $i=1$) до точки, соответствующей концу «чистого сжатия» и началу сгорания топлива в цилиндре (индекс $i = \varphi_C'$).

3. Модель $y = ae^{bx+cx^2}$, $ac \neq 0, a > 0, c < 0$

Форма модели при данных условиях также приближается к кривой сжатия-расширения (рис. 5). Коэффициенты a, b, c определяются с помощью минимизации функционала (11).

После определения коэффициентов модели контрольные точки рассчитываются по формулам

$$y_{\max} = ae^{-\frac{b^2}{4c}} ; X_{\max} = m = \varphi_{ВМТ} = -\frac{b}{2c} ; \varphi_B = \frac{-b + \sqrt{-2c}}{2c} .$$

4. Синусоидальная модель $y = k \sin(Bx + A)$

Данная модель хорошо описывает скорость изменения давления на участке $[B, C]$ (см. рис. 5). В отличие от линейной модели, для ее построения используется часть кривой сжатия до точки B (до 10-и точек или не более 5° ПКВ до φ_B). В этом случае устойчивая (в смысле минимизации функционала (12) – с одним локальным минимумом) синусоидальная модель с наибольшей точностью описывает участок кривой $p'(\varphi)$ от точки B до C или до точки C' и с минимальной погрешностью определяет координату m (ВМТ).

Функционал (12) решается на множестве точек

$$[l1=B-\Delta B, l2=C], \text{ где } \Delta B < 10$$

$$p'(x_i) = k \sin(Bx_i + A),$$

$$F = \sum_{i=1}^{l2} \left[k \sin(Bx_i + A) - p_i' \right]^2 \mapsto \min . \tag{12}$$

В точке минимума должны быть равны нулю все частные производные целевой функции

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial k} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial B} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial A} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=l2} \left[2 \left[k \sin(Bx_i + A) - p_i' \right] \sin(Bx_i + A) \right] = 0; \\ \sum_{i=1}^{i=l2} \left[2 \left[k \sin(Bx_i + A) - p_i' \right] k \cos(Bx_i + A) x_i \right] = 0; \\ \sum_{i=1}^{i=l2} \left[2 \left[k \sin(Bx_i + A) - p_i' \right] k \cos(Bx_i + A) \right] = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \sum_{i=1}^{i=12} \sin^2(Bx_i + A) - \sum_{i=1}^{i=12} p_i \sin(Bx_i + A) = 0; \\ k^2 \sum_{i=1}^{i=12} \sin(Bx_i + A) \cos(Bx_i + A) x_i - \sum_{i=1}^{i=12} p_i \cos(Bx_i + A) x_i = 0; \\ k^2 \sum_{i=1}^{i=12} \sin(Bx_i + A) \cos(Bx_i + A) - \sum_{i=1}^{i=12} p_i \cos(Bx_i + A) = 0; \end{cases}$$

Окончательно получим систему из 3-х трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} k = \frac{\sum_{i=1}^{i=12} p_i \sin(Bx_i + A)}{\sum_{i=1}^{i=12} \sin^2(Bx_i + A)}; \\ \frac{\sum_{i=1}^{i=12} p_i \sin(Bx_i + A)}{\sum_{i=1}^{i=12} \sin^2(Bx_i + A)} = \frac{\sum_{i=1}^{i=12} p_i \cos(Bx_i + A) x_i}{\sum_{i=1}^{i=12} \sin(Bx_i + A) \cos(Bx_i + A) x_i}; \\ \frac{\sum_{i=1}^{i=12} p_i \sin(Bx_i + A)}{\sum_{i=1}^{i=12} \sin^2(Bx_i + A)} = \frac{\sum_{i=1}^{i=12} p_i \cos(Bx_i + A)}{\sum_{i=1}^{i=12} \sin(Bx_i + A) \cos(Bx_i + A)}. \end{cases} \quad (13)$$

Система (13) решается численным методом. Если воспользоваться методом нелинейной оптимизации POWELL'64, то неизвестные k, B, A определяются после нескольких последовательных шагов минимизации функционала

$$\begin{aligned} & \left(k - \frac{\sum_{i=1}^{i=12} p_i \sin(Bx_i + A)}{\sum_{i=1}^{i=12} \sin^2(Bx_i + A)} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{\sum_{i=1}^{i=12} p_i \sin(Bx_i + A)}{\sum_{i=1}^{i=12} \sin^2(Bx_i + A)} - \frac{\sum_{i=1}^{i=12} p_i \cos(Bx_i + A) x_i}{\sum_{i=1}^{i=12} \sin(Bx_i + A) \cos(Bx_i + A) x_i} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{\sum_{i=1}^{i=12} p_i \sin(Bx_i + A)}{\sum_{i=1}^{i=12} \sin^2(Bx_i + A)} - \frac{\sum_{i=1}^{i=12} p_i \cos(Bx_i + A)}{\sum_{i=1}^{i=12} \sin(Bx_i + A) \cos(Bx_i + A)} \right)^2 \mapsto \min. \end{aligned} \quad (14)$$

При кажущейся сложности функционал (14) имеет один хорошо определенный локальный минимум в вещественной области корней k, B, A , который достигается не более чем через 10 шагов поисковой процедуры. Алгоритм метода POWELL'64 оказался эффективным для гладких функций четных степеней и для тригонометрических функций.

Теоретическая предпосылка решения задачи определения ВМТ с помощью уравнения $P'(\varphi) = 0$

Используется тот факт, что при отсутствии сгорания в цилиндре скорость изменения давления в ВМТ равна нулю [3], за вычетом термодинамического смещения, связанного с передачей тепла в стенки цилиндра (рис. 7) [14]:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\varphi_{ВМТ}} &= 0 \\ p'_{\varphi-\delta\varphi_T} &= p'_{\Theta} = 0. \end{aligned}$$

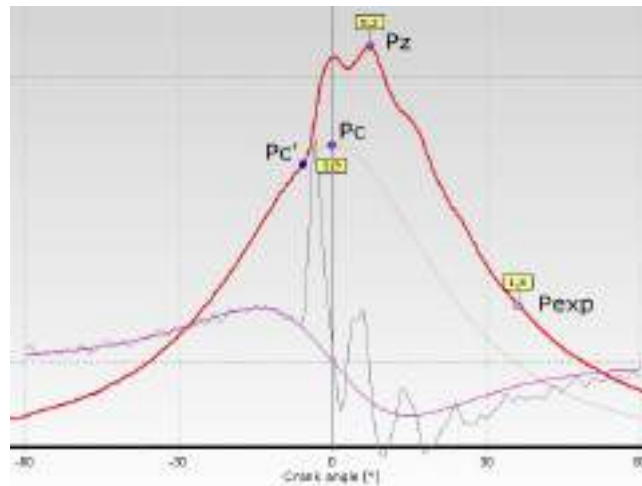


Рис. 7. Моделирование $dp/d\varphi$ на участке сжатия

С учетом термодинамического фазового смещения в ВМТ (при $\varphi = 0$)

$$\Theta = -\delta\varphi_T.$$

Тогда выражение для скорости изменения давления на участке сжатия можно записать

$$\frac{dP_{comp}}{d\Theta} = -P_a V_a^{n_1} n_1 \frac{1}{V_\Theta^{n_1+1}} \cdot \frac{dV_\Theta}{d\Theta} \quad (15)$$

где P_a – давление в начале сжатия; $V_\Theta = V_{\varphi-\delta\varphi_T}$ – объем цилиндра:
 $V_\varphi = V_c + 0,5V_s \left[1 + \frac{1}{\lambda_{ш}} - \cos\varphi - \frac{1}{\lambda_{ш}} \sqrt{1 - (\lambda_{ш} \sin\varphi)^2} \right]$; $V_s = V_c(\varepsilon - 1)$ – объем, описываемый полным ходом поршня; V_c – объем камеры сжатия; $\lambda_{ш} = R_{кр} / L_{ш} = S/2L_{ш}$ – отношение радиуса кривошипа к длине шатуна.

После несложных преобразований правая часть уравнения (15) преобразуется в нелинейное трансцендентное уравнение относительно угла ПКВ.

$$\frac{dP_{comp}}{d\varphi} = -P_a V_a^{n_1} n_1 \frac{1}{V_\varphi^{n_1+1}} \cdot 0,5V_s \left(\sin\varphi + \frac{\lambda_{ш} \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - \lambda_{ш}^2 \sin^2\varphi}} \right) \quad (16)$$

Действительный корень уравнения (16) определяется с помощью численного метода (например BISECT [11]) в диапазоне между абсциссами максимумов $P'(\varphi)$ на участках сжатия и сгорания ($[P'max_1, P'max_2]$, см. рис. 6). Этот корень представляет собой расчетное значение ВМТ.

В процессе расчета алгоритм POWELL'64 используется дважды: сначала для предварительной оценки положения ВМТ с помощью синусоидальной модели и затем окончательный расчет путем моделирования скорости изменения давления $dp/d\varphi$. Метод POWELL'64 используется для минимизации функционала, записанного согласно требованиям МНК:

$$F = \sum_{j=1}^m \left(P'_j - \frac{dP_{comp}}{d\varphi_j} \right)^2 \mapsto \min,$$

где m – количество точек на участке до P'_c .

На рис. 3.28 показан график скорости изменения давления, полученный с помощью методов численного дифференцирования кривой $P(\varphi)$.

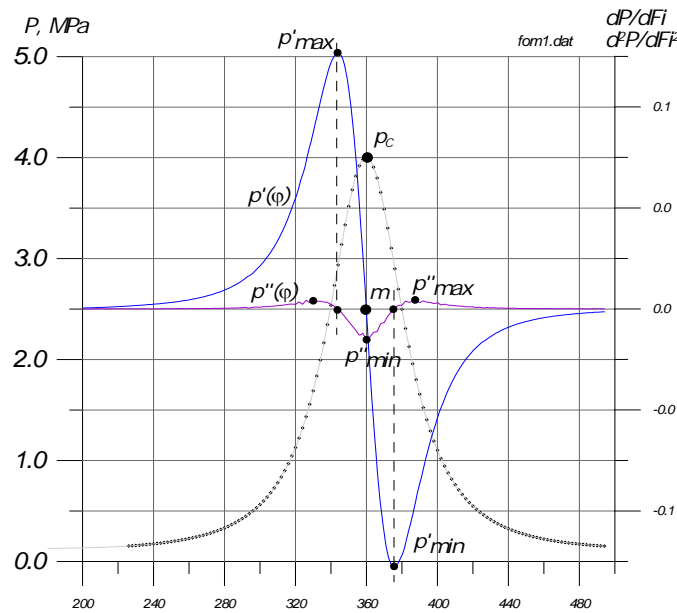


Рис. 8. Графики $p(\varphi)$, $p'(\varphi)$, $p''(\varphi)$ кривой сжатия-расширения СОД ЧН25/34

На графике второй производной (рис. 8) показаны контрольные точки, определяющие положение ВМТ (точка m), а также граничные точки для построения линейной и синусной моделей. В отдельных случаях, поиск коэффициентов модели (15) удобнее производить путем поиска минимума второй производной $P''(\varphi)$. Выражение для расчета второй производной запишем в виде

$$\frac{d^2 P_{comp}}{d\varphi^2} = \frac{d^2 P}{d\varphi^2} = -0,5 P_a V_a^{n_1} n_1 V_s \cdot \left[\frac{\sin \varphi}{V_\varphi^{n_1+1}} + \frac{\lambda_{III} \sin \varphi \cos \varphi}{V_\varphi^{n_1+1} \sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi}} \right]'$$

Обозначим

$$(A) = 0,5 P_a V_a^{n_1} n_1 V_s = const, (B) = \frac{\sin \varphi}{V_\varphi^{n_1+1}}, (C) = \frac{\lambda_{III} \sin \varphi \cos \varphi}{V_\varphi^{n_1+1} \sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Запишем выражения для производных

$$(B)' = \frac{\cos \varphi V_\varphi^{n_1+1} - \sin \varphi (n_1 + 1) V_\varphi^{n_1} [V_\varphi]'}{V_\varphi^{2(n_1+1)}}.$$

Квадрат объема $V_\varphi^{2(n_1+1)} > 0$, поскольку $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ объем положительный.

$$(B)' = \frac{\cos \varphi V_\varphi^{n_1+1} - 0,5 V_s \sin \varphi (n_1 + 1) V_\varphi^{n_1} \left[\sin \varphi + \frac{\lambda_{III} \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi}} \right]'}{V_\varphi^{2(n_1+1)}}.$$

Ограничение $1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi > 0$ учитывается

$$\sin^2 \varphi < \frac{1}{\lambda_{III}^2} \Rightarrow \sin \varphi < \frac{1}{\lambda_{III}},$$

где $\lambda_{III} > 0$,

$$(C)' = \lambda_{III} \frac{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \left[V_{\varphi}^{n_1+1} \sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi} \right] - \sin \varphi \cos \varphi \left[V_{\varphi}^{n_1+1} \sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi} \right]'}{V_{\varphi}^{2(n_1+1)} (1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi)}$$

Должно быть выполнено условие

$$V_{\varphi}^{2(n_1+1)} (1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi) \neq 0$$

Поскольку объем в цилиндре всегда положительный, неравенство можно сократить

$$1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi \neq 0,$$

или

$$\lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi \neq 1 \Rightarrow \sin \varphi \neq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{III}}}$$

Запишем выражение в квадратных скобках для производной (C)'

$$\begin{aligned} & \left[V_{\varphi}^{n_1+1} \sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi} \right]' = \\ & = (n_1 + 1) V_{\varphi}^{n_1} \left[V_{\varphi} \right]' \sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi} - \lambda_{III}^2 V_{\varphi}^{n_1+1} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

С учетом производной в квадратных скобках запишем выражение для (C)' и произведем необходимые действия

$$\begin{aligned} (C)' &= \lambda_{III} \frac{V_{\varphi}^{n_1+1} \sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi} \left(\cos 2\varphi - 0,5 \sin 2\varphi \left[\frac{(n_1 + 1)}{V_{\varphi}} \left[V_{\varphi} \right]' - \lambda_{III}^2 \frac{0,5 \sin 2\varphi}{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi} \right] \right)}{V_{\varphi}^{2(n_1+1)} (1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi)} \\ (C)' &= \lambda_{III} \frac{\cos 2\varphi - 0,5 \sin 2\varphi \left[\frac{(n_1 + 1)}{V_{\varphi}} \left[V_{\varphi} \right]' - \lambda_{III}^2 \frac{0,5 \sin 2\varphi}{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi} \right]}{V_{\varphi}^{n_1+1} \sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi}} \\ (C)' &= \lambda_{III} \frac{\cos 2\varphi - 0,5 \sin 2\varphi \left[0,5 V_s \frac{(n_1 + 1)}{V_{\varphi}} \left[\sin \varphi + \frac{\lambda_{III} 0,5 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi}} \right] - \lambda_{III}^2 \frac{0,5 \sin 2\varphi}{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi} \right]}{V_{\varphi}^{n_1+1} \sqrt{1 - \lambda_{III}^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Выражение для расчета второй производной от давления запишем в виде

$$\frac{d^2 P}{d\varphi^2} = A(B' + C')$$

Для случая анализа произвольного ряда значений давления, где представлены несколько подряд записанных в память рабочих циклов, предварительную оценку значений ВМТ (точка *m*) каждого цикла удобней производить путем поиска локальных минимумов $\frac{d^2 P}{d\varphi^2} \rightarrow \min$ (см. рис. 8).

Кроме того, при расчете предварительной синхронизации, в синусоидальной и линейной моделях используются координаты точек В и С, где $B = P'_{\max}$, а $C = P'_{\max}$. Эти координаты рассчитываются как

положительные корни нелинейного уравнения $\frac{d^2 P}{d\varphi^2} = 0$, где область определения корней

$$\varphi \in [2\pi - \Delta\varphi, 2\pi + \Delta\varphi], \text{ где } \Delta\varphi \leq 20^\circ \text{ ПКВ.}$$

Для определения левой границы в предварительной синхронизации по синусоидальной модели используется левая координата максимума второй производной. В этом случае производится поиск локального максимума $\frac{d^2 P}{d\varphi^2} \rightarrow \min$ на области определения значений углов φ

$$\varphi \in [2\pi - \Delta\varphi, 2\pi],$$

где $\Delta\varphi \leq 30^\circ$ ПКВ.

В конечном итоге уточнялись численные значения коэффициентов $dP_{comp}/d\varphi$, рассчитанные по записанным точкам участка кривой скорости изменения давления до начала сгорания и уточнялось истинное значение ВМТ как угол, при котором скорость изменения давления равна нулю.

Выводы

Во всех случаях, где производился поиск локальных минимумов и максимумов нелинейных функций от двух и более переменных, использовался метод минимизации по сопряженным направлениям, не использующий производные – метод POWELL'64. Метод оказался устойчивым, даже для случая 7 % «зашумленности» данных белым шумом (оценка уровня шумов для данных, полученных системой D4.0H «полезный сигнал/шум» оценивается в 3 %) [15]. Несмотря на то, что, по сути метод POWELL'64 это метод поиска с условным окончанием итераций, удалось сформулировать такие начальные условия, при которых общее время решения задачи синхронизации оказалось приемлемо малым (единицы миллисекунд) для большинства современных контроллеров.

Список использованной литературы

1. John B. Howard, Internal Combustion Engine Fundamentals First Edition, 1988
2. CCM - COMBUSTION MONITORING SYSTEM // URL: <https://imes.de>
3. Варбанец Р. А. Диагностический контроль рабочего процесса судовых дизелей в эксплуатации: дисс.докт. техн. наук / Р. А. Варбанец – Одесса: Одесская национальная морская академия, 2010, – 314 с.
4. Варбанец Р. А. Стационарные системы диагностики рабочего процесса судовых дизелей NK-100, Кума Diesel Analyzer / Р. А. Варбанец, В.Г. Ивановский // Проблемы техники: научно-технический журнал. Хмельницкий национальный университет. – 2006. – № 1. – С. 91-102.
5. Семенов В. С. Современные проблемы теории судовых дизелей / В. С. Семенов. М.: В/О Мортехинформреклама, 1991. 112 с.
6. Tazerout, M., Le Corre, O., Rousseau, S., TDC Determination in IC Engines Based on the Thermodynamic Analysis of the Temperature-Entropy Diagram, SAE Technical Paper 1999-01-1489, 1999. Available at: <http://papers.sae.org/1999-01-1489/>, DOI: 10.4271/1999-01-1489
7. Staś, M., An Universally Applicable Thermodynamic Method for T.D.C. Determination, SAE Technical Paper 2000-01-0561, 2000. Available at: <http://papers.sae.org/2000-01-0561/>, DOI: 10.4271/2000-01-0561
8. Butterworth filter // URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Butterworth_filter
9. Ерыганов А. В. Определение степени сжатия дизеля по результатам индицирования рабочего процесса / А. В. Ерыганов, Р.А. Варбанец // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: морская техника и технология. – 2017. – № 1. – С. 44-49.
10. Ваншейдт В.А. Судовые двигатели внутреннего сгорания / В. А. Ваншейдт. – Л.: Судостроение, 1977. – 392 с.
11. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 525 с.
12. Powell M.J.D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, Computer J., 1964, №7, p.155.
13. Камкин С. В. Эксплуатация судовых дизелей: [учебник для вузов] / Камкин С. В. Возницкий И. В., Шмелев В. П. – М. : Транспорт, 1990. – 344 с.
14. Никитин Е.А. Диагностирование дизелей / Е. А. Никитин, Л. В. Станиславский, Э. А. Улановский и др. – М. : Машиностроение, 1987. – 224 с.
15. Varbanets R. Analyse of marine diesel engine performance / R. Varbanets, A. Karianskiy // Journal of Polish CIMAC. Energetic Aspects. Gdansk: Faculty of Ocean Engineering and Ship Technology Gdansk University of Technology. 2012. Vol. 7. No. 1. P. 269–275.