

УДК 531.3; 534.014

В.Т. КРАВЧУК¹, М.Г. ДИКТЕРУК¹, Ю.В. ЧОВНЮК^{1,2}¹ Киевский национальный университет строительства и архитектуры²Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ВИБРОМАШИНЫ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ УПРУГОЙ СИЛЫ

Проведен анализ движения одномассной вибромашины с упругим кинематическим возбуждением в зонах основного и суперрезонансов и исследовано влияние симметрии (несимметрии) упругой характеристики на характер вибрационного процесса (на амплитуды и спектральный состав колебаний).

Ключевые слова: анализ, колебания, вибромашина, кусочно-линейная характеристика, упругая сила, основные колебания, суперрезонансы.

В.Т. КРАВЧУК¹, М.Г. ДИКТЕРУК¹, Ю.В. ЧОВНЮК^{1,2}¹Київський національний університет будівництва і архітектури²Національний університет біоресурсів і природокористування України

АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ ВІБРОМАШИНИ З КУСКОВО-ЛІНІЙНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ ПРУЖНОЇ СИЛИ

Проведений аналіз руху одномасової вібромашини з пружним кінематичним збудженням у зонах основного і суперрезонансів й досліджений вплив симетрії (несиметрії) пружної характеристики на характер вібраційного процесу (на амплітуди й спектральний склад коливань).

Ключові слова: аналіз, коливання, вібромашина, кусково-лінійна характеристика, пружна сила, основні коливання, суперрезонанси.

V.T. KRAVCHYUK¹, M.G. DIKTERYUK¹, Y.V. CHOVDNYUK^{1,2}¹Kyiv National University of Construction and Architecture²National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine

VIBROMACHINE'S OSCILLATIONS ANALYSIS WITH THE PIECEWISE – LINEAR CHARACTERISTICS OF ITS ELASTIC FORCE

The one-mass vibromachine's movement analysis with the elastic kinematical excitation in the main and super- resonance zones is made. The influence of the symmetrical (nonsymmetrical) elastic characteristic on the character of vibration process (on amplitude and spectral content of oscillations) is provided, as well.

Key words: analysis, oscillations, vibromachine, piece-wise – linear characteristic, elastic force, main oscillations, super- resonances.

Постановка проблеми

В последнее время всё большее распространение получают резонансные вибромашины. Повышенный интерес промышленности к вибрационным машинам резонансного типа обусловлен рядом их принципиально-конструктивных особенностей. В резонансных вибромашинах силы инерции колеблющихся масс уравновешиваются силами упругих связей. Вследствие этого привод вибромашины подвержен меньшим динамическим нагрузкам, уменьшается величина потребной возмущающей силы и затраты энергии на преодоление вредных сопротивлений в кинематических парах привода. Это позволяет, в свою очередь, существенно уменьшить прочностные размеры силовых элементов привода, снизить расход энергии и повысить эксплуатационную надёжность. Одновременно с этим открываются возможности также для создания вибрационных транспортирующих установок с повышенной длиной грузонесущего органа на один привод. Дело в том, что при резонансном режиме работы и при наличии распределённых упругих связей грузонесущий орган, являющийся одновременно силовым элементом машины, передающим вибрации, подвержен действию меньших усилий и находится в более благоприятных условиях работы. При этом уменьшается опасность возникновения паразитных поперечных вибраций и повышается предельное расстояние, на котором удаётся устойчиво передавать энергию колебательного движения.

Наряду с отмеченными достоинствами резонансные вибромашины имеют также некоторые недостатки. Наиболее существенным недостатком обычных резонансных вибромашин является их высокая чувствительность к изменению рабочих параметров и внешней нагрузки. Вследствие этого при изменении режима работы или условий эксплуатации резко меняется амплитуда колебаний рабочего органа (РО) и нарушается нормальное протекание рабочего процесса.

Для повышения устойчивости работы резонансных вибромашин применяют упругие элементы с нелинейными характеристиками жёсткости. Такие упругие элементы выполняются обычно в виде резино-

металлических блоков, работающих на сдвиг или на сжатие, в комбинации с резиновыми буферами. При использовании упругих связей с нелинейными характеристиками изменяется вид амплитудной кривой и расширяется область устойчивой резонансной работы.

Как было установлено авторами [1-4], резонансные вибромашины с буферными упругими элементами при правильном подборе их рабочих характеристик обладают ещё и рядом технологических достоинств. В частности, в вибрационных конвейерах повышается скорость транспортирования, в грохотах - эффективность и производительность грохочения и т.д. Это обусловливается тем, что использование нелинейной упругой системы открывает возможности простого синтеза более эффективных законов движения РО вибрационной машины.

В промышленности широкое распространение получили вибрационные машины с кусочно-линейными упругими связями. Как правило, такие вибромашины работают в резонансном режиме и эффекты комбинационных резонансов, которые присущи нелинейным системам, в них не используются. Вместе с тем, реализация таких режимов может явиться дополнительным резервом повышения эффективности вибрационных машин, поэтому актуальной задачей является всестороннее их исследование.

Анализ последних исследований и публикаций

Авторы [1-9] обосновывают физико-механическую модель движения одномассной вибромашины с упругим кинематическим возбуждением в зонах основного и суперрезонансов, а также исследуют влияние пороговой несимметрии упругой характеристики на характер вибрационного процесса, в частности, на амплитуды и спектральный состав колебаний. Чаще всего такие исследования проводятся на АВМ методом прямых аналогий [5,8]. Особенности колебаний, обусловленные нелинейностью, используются для усовершенствования виброзащитных устройств [3], повышения эффективности работы вибрационных машин [7,9] и т.д. В связи с этим представляет интерес изучение влияния параметров системы (с симметричной/несимметричной мягкой/жёсткой кусочно-линейной характеристикой упругой силы) на величины амплитуд колебаний на основном и супергармонических резонансах, а также возможных режимов устойчивых движений на суперрезонансах. Недостаточно исследован спектральный состав супергармонических колебаний с точки зрения реализации поличастотных режимов испытаний. Решению этих вопросов в основном и посвящена данная статья.

В ряде работ показана целесообразность исследования колебаний нелинейных систем средствами аналоговой вычислительной техники [4-6,8], для чего созданы специализированные аналоговые вычислительные машины (АВМ) [5].

В данной работе будут частично использованы результаты исследований авторов [1,5,8], а также методы, развитые в [10].

Цель исследования

Цель исследования состоит в обосновании физико-механической модели для анализа колебаний вибромашины с кусочно-линейной (симметричной/несимметричной) характеристикой упругой силы и последующем анализе на основании указанной выше модели основных и суперрезонансных колебаний, возникающих в этой вибромашине, при наличии мягкой/жёсткой упругой характеристики. Для достижения целей исследования использован метод прямой линеаризации Я.Г. Пановко [10], позволяющий для нелинейной упругой системы вибромашины получить эквивалентную (линейную) жёсткость.

Изложение основного материала исследования

1. Модель вибромашины с нелинейными характеристиками и общий анализ режимов её работы.

Рассмотрим закономерности работы вибрационной машины с упругими ограничителями, структурная и цепная схема которой приведены в [1]. По условиям обеспечения надёжной работы вибромашины и устранения явления галопирования обычно выполняется ряд основных требований, сводящихся к следующему. Привод располагается таким образом, чтобы возмущающая сила действовала в плоскости колебаний и проходила через центр инерции колеблющихся масс; восстанавливающие силы также должны действовать в плоскости колебаний и располагаться на равном расстоянии от центра инерции колеблющихся масс. Именно при соблюдении указанных требований для дальнейшего рассмотрения вибрационную машину можно представить цепной схемой [1], а её дифференциальное уравнение движения приобретает следующий вид:

$$m\ddot{x} + f(x) \cdot \dot{x} + P(x) - \varepsilon_0 \cdot (\dot{\eta} - \dot{x}) - k_0 \cdot (\eta - x) = 0, \quad (1)$$

где: $\eta = r \cdot \cos(\omega t + \delta)$; m – масса грузонесущего органа (в неё может быть включена и присоединённая масса уплотняемой среды/смеси); $f(x)$ – коэффициент сопротивления упругой системы; $P(x)$ – восстанавливающая сила упругой системы; ε_0 – коэффициент затухания в приводных упругих связях; k_0 – жёсткость приводных упругих связей; r – эксцентриситет приводного вала; δ – начальная фаза, либо:

$$m\ddot{x} + [f(x) + \varepsilon_0] \cdot \dot{x} + P(x) + k_0 x = k_0 \cdot \eta + \varepsilon_0 \cdot \dot{\eta}. \quad (2)$$

Вследствие произвольности начальной фазы δ , можно полагать:

$$k_0 \cdot \eta + \varepsilon_0 \cdot \dot{\eta} = F \cdot \cos \omega t, \quad (3)$$

где: ω – частота вращения приводного вала, t – время, $F = r \cdot \sqrt{k_0^2 + \varepsilon_0^2 \cdot \omega^2}$, или приближённо, вследствие того, что $\varepsilon_0 \cdot \omega \ll k_0$, $F = k_0 \cdot r$. Тогда:

$$m\ddot{x} + [f(x) + \varepsilon_0] \cdot \dot{x} + P(x) + k_0 \cdot x = F \cdot \cos \omega t. \quad (4)$$

Основные упругие связи и ограничители вибромашины имеют следующие характеристики (Рис. 1):

$$P(x) = \begin{cases} k' \cdot x, & \text{при } -a_2 \leq x \leq a_1; \\ k'' \cdot x - (k'' - k') \cdot a_1, & \text{при } x > a_1; \\ k''' \cdot x + (k'' - k') \cdot a_2, & \text{при } x < -a_2. \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon', & \text{при } -a_2 \leq x \leq a_1; \\ \varepsilon'', & \text{при } x > a_1; \\ \varepsilon''', & \text{при } x < -a_2. \end{cases} \quad (6)$$

При работе в установившихся режимах удар рабочего органа (РО) вибромашины происходит в оба ограничителя. При этом вследствие несимметричных характеристик упругой системы центр колебаний будет смещён относительно положения равновесия на некоторую величину d .

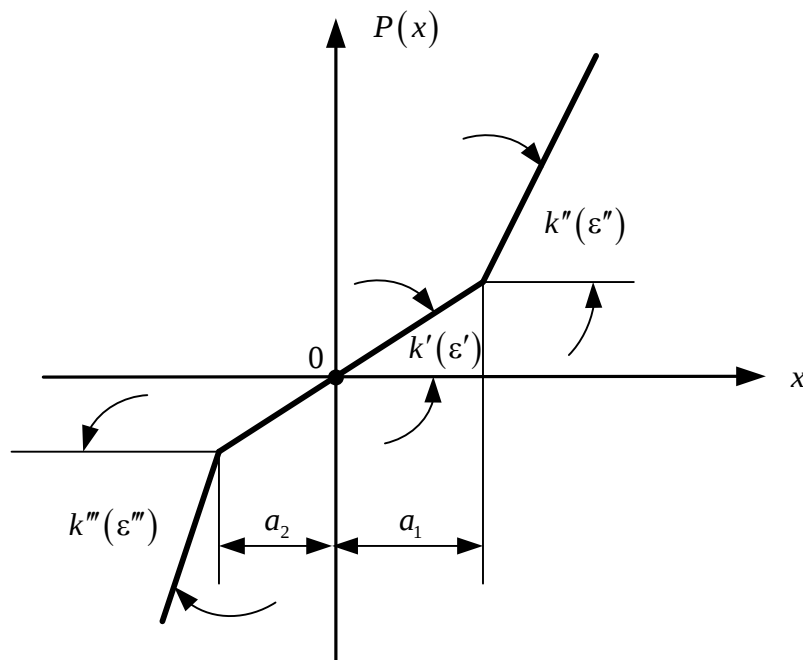


Рис. 1. Характеристика упругих связей виброударной системы (ВУС)

Примем в качестве первого приближения решения:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t - \varphi). \quad (7)$$

Величину смещения d можно определить из условия равенства потенциальной энергии системы в крайних положениях РО вибромашины:

$$\int_{-A+d}^{A+d} [P(x) + k_0 \cdot x] dx = 0. \quad (8)$$

Решая это уравнение (8), получим следующее квадратное уравнение для d :

$$bd^2 + cd + e = 0, \quad (9)$$

где:

$$b = (k'' - k'''); c = (A - a_2) \cdot k''' + k' \cdot (a_1 + a_2) + k'' \cdot (A - a_1) + 2k_0 A; e = (k'' - k') \cdot (A - a_1)^2 - (k''' - k') \cdot (A - a_2)^2.$$

Решение уравнения (9) имеет вид:

$$d = (-c \pm \sqrt{c^2 - 4be}) / (2b). \quad (10)$$

(Следует отметить, что в [1] корни для d найдены неправильно, поскольку в уравнении (9) имеется ошибка).

Из двух корней данного уравнения нашим условиям удовлетворяет только один – со знаком плюс. Это следует из того, что величина смещения d у линейной системы должна равняться нулю, т.е.:

$$d = (-c + \sqrt{c^2 - 4be}) / (2b). \quad (11)$$

Для решения задачи в первом приближении воспользуемся способом Я.Г. Пановко [10] так называемой прямой линеаризации, основанном на минимизации интеграла квадратичного момента уклонения. Линеаризацию уравнения (4) будем приводить к виду:

$$m \cdot \ddot{x} + \varepsilon \cdot \dot{x} + k \cdot x = F \cdot \cos \omega t. \quad (12)$$

Величина эквивалентной жёсткости упругой системы вибромашины k определится из условия:

$$\frac{\partial}{\partial k} \int_{-A+d}^{A+d} \{ [P(x) + k_0 \cdot x - k \cdot x] \cdot x \}^2 dx = 0. \quad (13)$$

Выполнив вычисления получим:

$$k = k'' + k_0 + (k''' - k'') \cdot \frac{(A-d)^5}{[(A+d)^5 + (A-d)^5]} + \frac{1}{4}(k'' - k') \cdot \frac{a_1^5}{[(A+d)^5 + (A-d)^5]} + \\ + \frac{1}{4}(k''' - k') \cdot \frac{a_2^5}{[(A+d)^5 + (A-d)^5]} - \frac{5}{4}(k'' - k') \cdot \frac{a_1 \cdot (A+d)^4}{[(A+d)^5 + (A-d)^5]} - \frac{5}{4}(k''' - k') \cdot \frac{a_2 \cdot (A-d)^4}{[(A+d)^5 + (A-d)^5]}. \quad (14)$$

Величина эквивалентного коэффициента затухания в упругой системе вибромашины может быть определена из условия:

$$\frac{\partial}{\partial k} \int_{A-d}^{A+d} [f(x) + \varepsilon_0 - \varepsilon]^2 \cdot x^2 dx = 0. \quad (15)$$

Откуда имеем:

$$\varepsilon = \varepsilon'' + \varepsilon_0 + (\varepsilon''' - \varepsilon'') \cdot \frac{(A-d)^3}{[(A+d)^3 + (A-d)^3]} - (\varepsilon'' - \varepsilon') \cdot \frac{a_1^3}{[(A+d)^3 + (A-d)^3]} - \\ - (\varepsilon''' - \varepsilon') \cdot \frac{a_2^3}{[(A+d)^3 + (A-d)^3]}. \quad (16)$$

Амплитудное уравнение получим, интегрируя уравнение (12):

$$\left[(k - m\omega^2)^2 + \varepsilon^2 \cdot \omega^2 \right] \cdot A^2 = F^2. \quad (17)$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) рассматриваемой вибромашины с несимметричными упругими связями приведена на графике (Рис. 2).

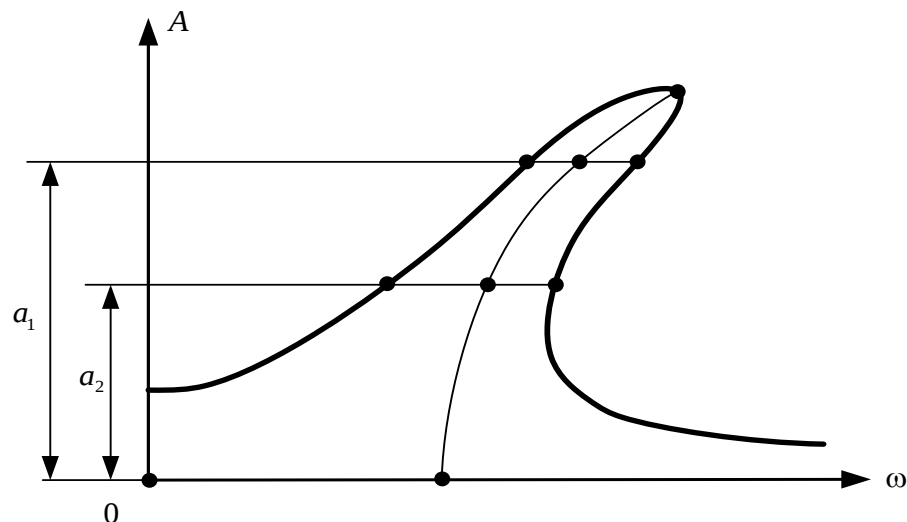


Рис. 2. АЧХ ВУС с несимметричными упругими связями

В уравнении (17) величины k и ε , как это следует из соотношений (14), (16), являются функциями амплитуды колебаний A . Амплитудное уравнение может быть использовано для определения величины эксцентриситета привода r или жёсткости упругой связи шатуна k_0 , обеспечивающих получение при частоте колебаний ω , требуемой с точки зрения обеспечения необходимых технологических параметров режима работы амплитуды колебаний РО вибромашины A .

Полученные результаты дают возможность исследовать режимы работы вибрационных машин с симметричными и несимметричными характеристиками упругой системы.

Так, при исследовании вибромашин с симметричными характеристиками упругой системы следует принимать $k''' = k''$, $\varepsilon''' = \varepsilon''$, $a_2 = a_1$.

В случае несимметричной упругой системы с односторонними ограничителями $k'' = k'$ и $\varepsilon'' = \varepsilon'$.

2. Анализ вынужденных колебаний в вибромашине с симметричной «мягкой» кусочно-линейной характеристикой упругой силы.

Рассмотрим вибромашину, у которой имеется т.н. «мягкая» кусочно-линейная характеристика упругой силы. Движение такой системы описывается уравнением:

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + F_y(x) = P \cdot \sin \omega t, \quad (18)$$

где: m – масса системы; b – коэффициент линейного демпфирования; x – смещение; t – время; $F_y(x)$ – характеристика упругой силы; P, ω – соответственно амплитуда и частота внешнего воздействия. При этом рассмотрим случай симметричной ($F_y(-x) = F_y(x)$) «мягкой» кусочно-линейной характеристики упругой силы вида:

$$F_y(x) = \begin{cases} K_1 \cdot x, & \text{если } -\Delta \leq x \leq \Delta; \\ K_2 \cdot x + (K_1 - K_2) \cdot \Delta, & \text{если } x > \Delta; \\ K_2 \cdot x - (K_1 - K_2) \cdot \Delta, & \text{если } x < -\Delta, \end{cases} \quad (19)$$

где: K_1, K_2 – коэффициенты жёсткости, причём $K_1 > K_2$; Δ – максимальное значение перемещения x , при котором ещё сохраняется линейность упругой характеристики. Величину Δ и соответствующее ей значение упругой силы $F_{y0} = K_1 \cdot \Delta$ будем в дальнейшем именовать соответственно пороговым значением перемещения и упругой силы.

В процессе исследований с помощью АВМ изучалось влияние амплитуды P , частоты ω внешней силы и степени нелинейности K_1/K_2 на характер возникающих колебаний. (При этом метод прямой линеаризации Я.Г. Пановко [10] не использовался!). Остальные параметры системы считались неизменными и имели следующие значения: $m = 6300 \text{ кг}$, $K_1 = 10^8 \text{ Н/м}$, $b = 0,01 b_{кр}$, где $b_{кр} = 2\sqrt{K_1 \cdot m}$.

Рассмотрение результатов моделирования на АВМ начнём с анализа АЧХ, упруго-частотных (УЧХ) и инерционно-частотных (ИЧХ) характеристик вибромашины в области основного резонанса, отражающих зависимость амплитуды колебаний A , величин упругой силы и силы инерции (F_y и F_u) от частоты возбуждения ω . Как показали численные исследования на АВМ, на основном резонансе силы упругости и инерции взаимно уравновешиваются. Поэтому УЧХ и ИЧХ в окрестности основного резонанса совпадают друг с другом. Поскольку наибольший интерес, как правило, представляют именно резонансные колебания, то в дальнейшем можно ограничиться анализом АЧХ и УЧХ.

В качестве АЧХ рассмотрена зависимость относительной амплитуды колебаний A/x_{cm} (x_{cm} – перемещение от статически приложенной силы P) от отношения частот ω/ω_1 , где $\omega_1 = \sqrt{K_1/m}$.

В качестве УЧХ рассмотрена зависимость относительного упругого усилия F_y/P от отношения частот ω/ω_1 . Из сопоставления на АВМ АЧХ и УЧХ для случая $K_1/K_2 = 4$ следует, что величины относительных амплитуд колебаний и относительных упругих усилий, характер возникающих колебаний во многом зависят от амплитуды P внешней силы. Нелинейные свойства системы – затягивание колебаний, скачки и срывы амплитуды и др. проявляются только в определённом диапазоне значений силы P . При выбранных параметрах системы это имеет место, если $0,032 \cdot F_{y0} < P < 1,8 \cdot F_{y0}$. При меньших значениях P ($P \leq 0,032 \cdot F_{y0}$) амплитуда колебаний не превышает значения Δ и характер колебаний полностью определяется участком упругой характеристики с коэффициентом жёсткости K_1 . При больших значениях P ($P \geq 1,8 \cdot F_{y0}$) амплитуда колебаний на резонансе значительно превышает Δ , поэтому поведение системы фактически может быть охарактеризовано участком упругой характеристики с коэффициентом жёстко-

сти K_2 . Таким образом, имеются два предельных состояния рассматриваемой нелинейной системы, которые по характеру возникающих колебаний эквивалентны двум линейным системам с коэффициентами жёсткости K_1 и K_2 . Указанные линейные системы в дальнейшем будем называть базовыми по отношению к рассматриваемой нелинейной.

В линейной системе имеется прямая пропорциональная зависимость между упругими усилиями F_y и перемещениями x . Поэтому АЧХ и УЧХ базовых систем совпадают друг с другом. В случае нелинейных колебаний ($0,032 \cdot F_{y0} < P < 1,8 \cdot F_{y0}$) прямая пропорциональная зависимость между F_y и x нарушается и возникает необходимость построения АЧХ и УЧХ. Переход от одной из базовых линейных систем к нелинейной сопровождается существенным увеличением амплитуды резонансных колебаний и одновременным уменьшением упругих усилий. На АЧХ и УЧХ появляются пологие участки, что открывает возможности для стабилизации амплитуды колебаний в вибрационных машинах.

Дополнительную информацию о характере протекающих процессов несут в себе фазовые диаграммы, т.е. зависимости $\varphi = \varphi(\omega/\omega_1)$, где φ – сдвиг по фазе между основной гармоникой возникающих колебаний и внешним возбуждением. Каждой из АЧХ и УЧХ соответствует своя фазовая диаграмма. Для линейной системы характерна непрерывность и плавность изменения φ по мере изменения ω . Отличительной особенностью нелинейной системы является наличие скачкообразных режимов движения. Причём скачок амплитуды колебаний на АЧХ или упругой силы на УЧХ сопровождается скачкообразным изменением фазового сдвига φ . Так, при скачкообразном переходе системы из некоторой точки A в точку B АЧХ ($P = 0,2 \cdot F_{y0}$) скачкообразно меняется и φ (переход из точки A в точку B фазовой диаграммы). Общим для линейной и нелинейной систем является то, что как в том, так и в другом случаях в дорезонансной области фазовый сдвиг близок к нулю, в зарезонансной области – к π , на резонансе – к $\pi/2$.

Введём в рассмотрение коэффициенты усиления на резонансе по амплитуде колебаний $K_y^a = a_{\max}/x_{cm}$ и по упругим усилиям $K_y^{F_y} = F_y^{\max}/P$. Сравним между собой зависимости коэффициентов усиления K_y от P/F_{y0} при постоянной степени нелинейности ($K_1/K_2 = 4$) и от K_1/K_2 при постоянной амплитуде внешней силы $P = 0,2 \cdot F_{y0}$. Анализ этих зависимостей, проведенный с помощью АВМ, показывает, что влияние параметров системы на K_y^a и $K_y^{F_y}$ противоречиво. Так, по мере увеличения степени нелинейности K_1/K_2 коэффициенты усиления по амплитудам колебаний K_y^a возрастают, коэффициенты усиления по упругим усилиям $K_y^{F_y}$ падают. Величина силы P , в свою очередь, определяет не только значения коэффициентов усиления, но и поведение системы (линейные или нелинейные колебания). Базовым линейным системам соответствуют участки постоянных значений коэффициентов усиления. В нелинейной системе (по сравнению с базовыми линейными) коэффициенты усиления по амплитудам колебаний K_y^a растут, коэффициенты усиления по упругим усилиям $K_y^{F_y}$ падают. При этом существуют диапазоны значений P , внутри которых K_y^a и $K_y^{F_y}$ стабилизируются (в нашем случае при $0,2 \cdot F_{y0} < P < F_{y0}$). Полученные на АВМ зависимости коэффициентов усиления от K_1/K_2 и P/F_{y0} позволяют осуществлять рациональную настройку, например, виброзащитных систем путём минимизации сил упругости, численно равных на резонансе силам инерции.

Однако минимизация колебаний на основном резонансе может оказаться недостаточной для виброзащиты объекта. В дорезонансной области частот также могут иметь место интенсивные всплески амплитуды колебаний – так называемые супергармонические резонансы. Исследования на АВМ показали, что интенсивность суперрезонансов существенно зависит от амплитуды P внешней силы и степени нелинейности K_1/K_2 . Существует диапазон значений P , при которых амплитуды колебаний на суперрезонансах различных порядков достигают максимума. При выбранных параметрах рассматриваемой системы это имеет место, если $F_{y0} \leq P \leq 1,25 \cdot F_{y0}$. Увеличение степени нелинейности K_1/K_2 при прочих равных условиях способствует усилению колебаний на всех суперрезонансах. С помощью АВМ были построены АЧХ супергармонических колебаний при $P = 1,15 \cdot F_{y0}$ и различных значениях K_1/K_2 . В Таблице 1 приведены значения

чения $K_{y \max}^a = \left(\frac{a}{x_{cm}} \right)_{\max}$ для суперрезонансов соответствующих порядков в зависимости от ω/ω_1 при различных значениях K_1/K_2 (для $P = 1,15 \cdot F_{y0}$).

Таблиця 1

Зависимость $K_{y \max}^a$ от ω / ω_1 при различных K_1 / K_2 (для $P = 1,15 \cdot F_{y0}$).

K_1 / K_2	Порядок суперрезонанса/ (ω / ω_1); $K_{y \max}^a$						
4	4/(0,17);3	3/(0,22);4,2	2/(0,31);5	3/2/(0,4);4,2			
10	4/(0,13);3,5	3/(0,17);6	2/(0,20);8	5/3/(0,24);6,5	3/2/(0,27);7	4/3/(0,29);6,8	
30	4/(0,08);3,0	3/(0,09);5	2/(0,13);7	7/4/(0,15);6,8	5/3/(0,16);9	3/2/(0,17);9,4	4/3/(0,18);9,6

Как видно из анализа результатов, представленных в Таблице 1, по мере увеличения K_1 / K_2 от 4 до 30 не только растут амплитуды суперрезонансов, но и на АЧХ проявляются дополнительные суперрезонансные всплески между суперрезонансом второго порядка и основным резонансом. Это так называемые дробные суперрезонансы, для спектрального состава которых характерно наличие гармоник с частотой, в дробное число раз большей ω . Например, при $K_1 / K_2 = 30$ обнаружены с помощью АВМ дробные супер-

резонансы порядков $\frac{7}{4}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$.

Результаты спектрального анализа колебаний, а также возможные движения системы представлены в Таблице 2 в виде основных характеристик спектрограмм и осциллограмм упругой силы F_y и силы инерции F_u . Для каждого типа резонанса и номера возникающей гармоники приведены отношения амплитуд $F_y^{(i)}$ и $F_u^{(i)}$ – i – тых гармоник соответственно в спектрах сил упругости и инерции к амплитуде P внешнего возбуждения.

Таблиця 2

Спектральный состав возникающих колебаний

Порядковый номер резонанса	$(F_y^{(i)} / P) / (\text{номер гармоники})$	$(F_u^{(i)} / P) / (\text{номер гармоники})$
1	30/1; 1/3; 1/5; 1/7;	30/1; 1/3; 1/5; 1/7;
3/2	1,6/1; 1,2/3/2; 0,3/2; 0,2/5/2; 0,4/3; 0,1/7/2;	0,8/1; 1,2/3/2; 0,4/2; 0,2/5/2; 0,4/3; 0,1/7/2;
7/4	1,0/1; 1,0/7/4;	0,5/1; 1,0/7/4;
3	1,0/1; 1,2/3; 0,25/5; 0,2/7;	0,2/1; 1,2/3; 0,25/5; 0,2/7;
4/3	2,4/1; 1,0/4/3; 0,2/3; 0,2/4; 0,2/5;	0,9/1; 1,0/4/3; 0,25/3; 0,22/4; 0,2/5;
5/3	1,2/1; 1,1/5/3; 0,2/7/3; 0,2/3; 0,2/11/3;	0,8/1; 1,2/5/3; 0,2/7/3; 0,15/3; 0,2/11/3;
2	1,0/1; 1,6/2; 0,4/4; 0,2/6;	0,4/1; 1,6/2; 0,4/4; 0,2/6;
4	1,2/1; 1,3/4; 0,2/6;	0,1/1; 1,3/4; 0,1/6;

Анализ результатов, представленных в Таблице 2 показывает, что на каждом из резонансов (основном или супер-) амплитуда одной из гармоник принимает максимальное значение. Номер резонирующей гармоники и определяет порядок соответствующего резонанса.

В линейной системе на резонансе силы упругости и инерции взаимно уравниваются. В нелинейной системе это свойство несколько трансформируется. Как показали исследования с помощью АВМ на резонансе i – го порядка в спектрах сил упругости и инерции равны по амплитуде i – тые, т.е. резонирующие гармоники. Так, на основном резонансе в спектрах сил упругости и инерции равны по амплитуде первые гармоники, на суперрезонансе второго порядка – вторые гармоники и т.д. Таким образом, известное

свойство линейной системы в некотором смысле является частным случаем более общего свойства нелинейной системы.

3. Анализ вынужденных колебаний в вибромашине с несимметричной «жесткой» кусочно-линейной характеристикой упругой силы.

Исследование проводилось на АВМ по аналогии с методами, развитыми С.Л. Цыфанским в [5].

Колебания рассматриваемой системы в безразмерных координатах можно описать уравнением:

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + f(x) = P \cdot \cos \eta \tau, \quad (20)$$

где: x – перемещение системы; $2n$ – коэффициент диссипации; P, η – амплитуда и частота силового воздействия; τ – время; $\dot{x} = dx/d\tau$; $\ddot{x} = d^2x/d\tau^2$;

$$f(x) = \begin{cases} (K_2/K_1) \cdot x - (K_2/K_1 - 1), & x \geq \Delta^+ / \Delta^-; \\ x, & -1 < x < \Delta^+ / \Delta^-; \\ (K_2/K_1) \cdot x + (K_2/K_1 - 1), & x \leq -1, \end{cases} \quad (21)$$

K_1, K_2 – жесткости упругих связей ($K_1 < K_2$); Δ^+, Δ^- – пороговые значения перемещений, при которых происходит излом характеристики восстанавливающей силы. Отношение $\Delta = \Delta^+ / \Delta^-$ характеризует степень пороговой несимметрии упругой характеристики, её изменение в процессе исследования на АВМ производилось путём изменения Δ^+ . Коэффициенты уравнений (20) и (21) принимались равными: $2n = 0,05$, $K_2/K_1 = 4$. В дальнейшем изложении особое внимание уделим анализу зависимостей амплитуд перемещения системы и упругой силы от частоты возбуждения, т.е. АЧХ и УЧХ вибромашины.

Рассмотрим колебания в зоне основного резонанса. АЧХ и УЧХ изучались для различных значений степени пороговой несимметрии Δ ($\Delta = 1; 2; \infty$) при $P = 0,25$. С ростом степени несимметрии Δ возрастает крутизна АЧХ и УЧХ, сужается интервал многорежимности, при фиксированной частоте возбуждения происходит увеличение пиковых значений перемещений x_p^+, x_p^- и упругой силы F_r^+, F_r^- , соответствующих Δ^+ и Δ^- . В случае симметричной характеристики ($\Delta = 1$) $x_p^+ = x_p^-$, $F_r^+ = F_r^-$.

Исследования поведения АЧХ и УЧХ позволили установить следующее. Анализ указанных характеристик производился (как и спектрограмм) для различных значений степени пороговой несимметрии Δ ($P = 0,25$). Спектральный анализ колебаний производился для резонансных режимов, символами $F_r^{(i)}$ обозначены амплитуды i -ых гармоник. Пиковые значения перемещений, упругих сил, соответствующие Δ^+ и Δ^- , обозначены x_p^+ и x_p^- , F_r^+ и F_r^- . в случае симметричной характеристики ($\Delta = 1$) ветви (+) и ветви (-) совпадают. Рассмотрим вначале поведение АЧХ и УЧХ (с помощью АВМ). С ростом степени несимметрии Δ возрастает крутизна АЧХ и УЧХ, сужается интервал многорежимности, при фиксированной частоте возбуждения происходит увеличение пиковых значений перемещений x_p^+ и x_p^- и упругой силы F_r^+, F_r^- . Вместе с тем, значения x_p^- и F_r^- , соответствующие вершинам АЧХ и УЧХ, остаются практически постоянными. Этот факт, с одной стороны, показывает возможность увеличения амплитуды колебаний в системе без увеличения динамических нагрузок на основание (т.к. F_r^- постоянна), однако при этом происходит ухудшение стабильности колебаний вследствие изменения крутизны АЧХ. С другой стороны, он говорит о том, что в указанных точках значение потенциальной энергии системы, соответствующей пиковым значениям перемещений, не изменяется. Такая инвариантность потенциальной энергии к изменению пороговой несимметрии позволяет определять амплитуды колебаний нелинейной системы на резонансе, исходя из линейной ($\Delta^+ = \Delta^- = 0$).

Рассмотрим спектральный состав колебаний. В симметричной системе ($\Delta = 1$) в спектре упругой силы присутствуют только нечётные гармоники, с ростом степени несимметрии Δ происходит увеличение амплитуд чётных гармоник, что сопровождается уменьшением нечётных, в том числе и основной. Исследования на АВМ показывают, что в верхних точках АЧХ спектральные разложения упругой силы и силы инерции совпадают. Следовательно, указанные изменения происходят как в спектре ускорений, так и перемещений. Так, например, если при $\Delta = 2$ относительная величина второй гармоники $x^{(2)} / x^{(1)} \approx 3\%$, то при $\Delta = \infty$, $x^{(2)} / x^{(1)} \approx 9\%$.

Супергармонические колебания. АЧХ и УЧХ супергармонических колебаний для различных значений степени пороговой несимметрии Δ были проанализированы на АВМ для амплитуды силы $P = 4$. Наибольшие пиковые значения перемещений x_0 и упругих усилий F_r изучались для разных порядков соответствующих суперрезонансов (2:1; 3:1 и т.д.).

С ростом степени несимметрии Δ можно отметить следующие особенности в поведении системы: происходит увеличение амплитуд колебаний на всех рассматриваемых резонансах и упругих усилий – на младших, смещение их интервалов возбуждения в сторону меньших частот, возбуждение комбинационных резонансов порядков 3:2 и 5:2, которые наблюдаются в системе при $\Delta > 2,5$ и $2 < \Delta < 4$, соответственно. Наибольшие амплитуды колебаний и упругих усилий развиваются на резонансах младших порядков.

Анализ осциллограмм и спектрограмм упругой силы F_r и силы инерции F_u при комбинационном резонансе 3:2, на суперрезонансах порядков 2:1 и 3:1 (для $\Delta = 1, \Delta = 3, \Delta = \infty$) позволяет сформулировать следующие закономерности в формировании спектрального состава колебаний вибромашины: в спектре упругой силы и силы инерции наибольшей из старших является резонирующая, т.е. та, номер которой совпадает с порядком резонанса; спектральные разложения упругой и инерционной сил отличаются величинами только основных гармоник – в спектре силы инерции она меньше.

Своеобразно происходит изменение амплитудных спектров с ростом степени пороговой несимметрии. Если амплитуды основных гармоник остаются практически постоянными, то амплитуды старших изменяются. Причём, если на резонансе порядка 3:2 происходит усиление старших гармоник различной кратности, а на суперрезонансе порядка 2:1 – различной чётности, то на суперрезонансе порядка 3:1 вместе с усилением чётных гармоник происходит уменьшение амплитуд нечётных, в том числе и резонирующей третьей.

Аналогичные изменения происходят и в спектре перемещений. Так, при возрастании Δ от 1 до ∞ на суперрезонансе порядка 2:1 относительные амплитуды второй и третьей гармоник, т.е. $x^{(2)} / x^{(1)}$ и $x^{(3)} / x^{(1)}$ возрастают от 0,66 до 1,0 и от 0,03 до 0,20, соответственно, то на суперрезонансе порядка 3:1 величины $x^{(2)} / x^{(1)}$ и $x^{(3)} / x^{(1)}$ изменяются от 0 до 0,5 и от 1,1 до 0,6.

Выводы

1. Обоснована физико-математическая модель для анализа колебаний вибромашины с кусочно-линейными характеристиками упругой силы и определены основные характеристики (амплитуда/частота, спектральный состав) возникающих в системе осцилляций в зонах основного и суперрезонансов. Исследовано влияние симметрии/несимметрии упругой характеристики на характер вибрационного процесса (для случаев «жёсткой» и «мягкой» нелинейностей ($K_1 / K_2 < 1$ или $K_1 / K_2 > 1$, соответственно)).

2. Численные исследования режимов колебаний вибромашины на АВМ позволили установить, что на основном резонансе доминирующей является первая основная гармоника, вклад более старших гармоник (третьей, пятой, седьмой) в спектр колебаний невелик. Поэтому на основном резонансе колебания практически являются моногармоническими, а возможности для реализации поличастотных режимов движения весьма ограничены.

3. В системах с симметричной «мягкой» кусочно-линейной характеристикой упругой силы вибромашины (для уплотнения грунтов/смесей) на суперрезонансах достигает максимума одна из дополнительных гармоник. При этом резонирующая супергармоника увлекает за собой более старшие гармоники одинаковой с ней чётности, подавляя гармоники противоположной чётности. Например, на суперрезонансе второго порядка в спектрах сил упругости и инерции помимо первой и второй гармоник появляются четвёртая и шестая, а на суперрезонансе третьего порядка помимо первой и третьей гармоник – пятая и седьмая. При этом вклад кратных гармоник в спектр колебаний на суперрезонансах намного больше, чем на основном резонансе, что открывает возможности для реализации поличастотных законов движения вибропривода в режиме супергармонических колебаний. Благодаря обострению при больших значениях нелинейности системы суперрезонансов порядков $\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}$ становится возможной разработка безредукторных преобразователей частоты вибромашины не только в целое [7], но и в дробное число раз.

4. В системах с несимметричной «жёсткой» кусочно-линейной характеристикой упругой силы вибромашины (для уплотнения грунтов/смесей) возбуждение суперрезонансов позволяет формировать в системе поличастотные режимы движения с высоким содержанием кратных гармоник. Изменение пороговой несимметрии даёт возможность обострять суперрезонансы, возбуждать в системе полигармонические колебания с дробным отношением частот, обогащать и управлять амплитудным спектром колебаний в широких пределах.

5. Отмеченные свойства суперрезонансов могут оказаться полезными в ряде вибрационных процессов (уплотнения грунтов, бетонных/строительных смесей) и повысить их эффективность тем более, что их применение не требует дополнительного аппаратного оформления, а только соответствующего выбора параметров системы.

6. Полученные в работе результаты могут в дальнейшем служить для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта вибрационных систем/машин для уплотнения строительных/бетонных смесей и грунтов с «мягкой» или «жёсткой» кусочно-линейной характеристикой упругой силы их РО как на стадиях проектирования/конструирования, так и в режимах их реальной эксплуатации, а также для создания принципиально новых машин суперрезонансного типа, возбуждающих в системе «РО-уплотняемая среда» полигармонические колебания с целым/дробным отношением частот с помощью безредукторных преобразователей последних.

Список использованной литературы

1. Гончаревич И.Ф. Вибрационные машины в строительстве/И.Ф. Гончаревич, П.А. Сергеев. – М.: Машгиз, 1963. – 312с.
2. Крюков Б.И. Динамика вибрационных машин резонансного типа/Б.И. Крюков. – Киев: Наукова думка, 1967. – 220с.
3. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем/М.З. Коловский. – М.: Наука, 1966. – 317с.
4. Тетельбаум И.М. Электрическое моделирование динамики электропривода механизмов/И.М. Тетельбаум, Ф.М. Шлыков. – М.: Энергия, 1970. – 186с.
5. Цыфанский С.Л. Электрическое моделирование колебаний сложных нелинейных механических систем/С.Л. Цыфанский. – Рига: Зинатне, 1979. – 180с.
6. Фролов К.В. О моделировании резонансных свойств некоторых автономных нелинейных колебательных систем/К.В. Фролов//Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. – Киев: АН УССР, 1963. – Т. III. – С. 65-74.
7. Воротынцев Л.К. Исследование нелинейных резонансов с целью разработки механических преобразователей частоты вибромашины/Л.К. Воротынцев, Д.Т. Габадзе, М.В. Хвингия. – В кн.: Вибрационная техника в машиностроении и приборостроении. – Львов, 1973. – С. 25-26.
8. Цыфанский С.Л. Исследование вынужденных колебаний системы с предварительным натягом/С.Л. Цыфанский, Ю.В. Барабанов//Машиноведение. – 1973. - №5. – С. 56-60.
9. Хвингия М.В. Экспериментальное исследование возбуждения супергармонических резонансных колебаний в торсионных электровибрационных машинах/М.В. Хвингия, М.А. Челидзе. – В кн.: Механика машин. – Тбилиси: Мецниереба, 1979. – С. 79-84.
10. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний/Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1991. – 256с.