

УДК 534.075.8

І.М. СИВАК¹, В.Т. КРАВЧУК², М.Г. ДІКТЕРУК², Ю.В. ЧОВНЮК^{1,2}¹Національний університет біоресурсів і природокористування України²Київський національний університет будівництва і архітектури

АНАЛІЗ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ТА РЕЗОНАНСІВ У ВІБРАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ УЩІЛЬНЕННЯ ГРУНТІВ І СУМІШЕЙ: ОДНОВИМІРНА ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНА МОДЕЛЬ ЗА НЕЛІНІЙНОЇ ВІДНОВЛЮВАНОЇ СИЛИ

У межах одновимірної дискретно-континуальної моделі за наявності у вібраційній системі ущільнення ґрунтів та сумішей нелінійної відновлюваної сили проведений аналіз вимушених коливань та резонансів, що виникають у ній. Визначені основні кінематичні та динамічні характеристики таких коливань в умовах виникнення у системі основних, супергармонічних та субгармонічних коливань.

Ключові слова: аналіз, вимушені коливання, резонанси, вібросистеми, ущільнення, ґрунти, суміші, нелінійна відновлювана сила, супергармонічні коливання, субгармонічні коливання, основні коливання.

И.Н. СИВАК¹, В.Т. КРАВЧУК², М.Г. ДИКТЕРУК², Ю.В. ЧОВНЮК^{1,2}¹Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины²Киевский национальный университет строительства и архитектуры

АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И РЕЗОНАНСОВ В ВИБРАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ УПЛОТНЕНИЯ ГРУНТОВ И СМЕСЕЙ: ОДНОМЕРНАЯ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛЕ

В рамках одномерной дискретно-континуальной модели при наличии у вибрационной системы уплотнения ґрунтов и смесей нелинейной восстанавливающей силы проведен анализ вынужденных колебаний и резонансов, которые возникают в ней. Определены основные кинематические и динамические характеристики таких колебаний в условиях возникновения в системе основных, супергармонических и субгармонических колебаний.

Ключевые слова: анализ, вынужденные колебания, резонансы, вибросистемы, уплотнение, ґрунты, смеси, нелинейная восстанавливающая сила, супергармонические колебания, субгармонические колебания, основные колебания.

I.N. SIVAK¹, V.T. KRAVCHYUK², M.G. DIKTERYUK², Y.V. CHOVNYYUK^{1,2}¹National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine²Kyiv National University of Construction and Architecture

ANALYSIS OF FORCED VIBRATIONS AND RESONANCES AT VIBRATION SYSTEMS FOR SEALING OF SOILS AND MIXTURES: ONE-DIMENSIONAL DISCRETE AND CONTINUAL MODEL WITH NONLINEAR RESTORING FORCE

With the help of the one-dimensional discrete and continual model at the presence in vibration system for the sealing of soils and mixtures of so-called nonlinear restoring force, the analysis of forced oscillations and resonances appeared in it is presented. The main kinematical and dynamical characteristics of such oscillations are determined at the conditions of existence in the system of super-, sub harmonic vibrations and main oscillations, as well.

Key words: analysis, forced oscillations, resonances, vibration systems, sealing, soils, mixtures, nonlinear restoring force, super harmonic oscillations, sub harmonic oscillations, main vibrations.

Постановка проблеми

Сутність процесу глибинного вібраційного ущільнення зернистого середовища (бетонної/будівельної суміші, піщаного ґрунту тощо) – руйнування структури цього середовища й розжиження його з метою видалення затиснутого повітря і забезпечення щільного укладання зерняток.

Послідовної закінченої теорії глибинного віброущільнення зернистих середовищ поки що не існує [1]. Відомості про основні особливості механізму розжиження зернистого незв'язного середовища можна знайти у роботах [2-8]. Параметри глибинних віброущільнювачів обирають головним чином на основі виробничого досвіду й деяких залежностей, отриманих різними фахівцями при проведенні експериментальних досліджень [3-5].

Вібраційні машини для глибинного ущільнення ґрунтів за своїм улаштуванням аналогічні підвісним глибинним віброущільнювачам у циліндричному корпусі з вбудованим електродвигуном для бетону [1]. Процес ущільнення відбувається за одночасного впливу на ґрунт вібрації й потоку води, у результаті

чого зменшується зчеплення між часточками ґрунту й потоку води і відбувається їх перерозподіл у більш щільну структуру. У зв'язку з необхідністю подачі води у ґрунт у процесі його ущільнення у корпусі віброущільнювача передбачені канали, причому при зануренні корпусу у ґрунт вода випускається з каналу, який закінчується у наконечнику, а при вилученні – з протилежного кінця корпусу. Таким чином, можна здійснювати ущільнення ґрунту поблизу існуючих споруд без їх руйнування, а також виконувати підводне ущільнення без пошкоджень останніх. Найбільш ефективно застосовувати ці машини при ущільненні водонасичених піщаних ґрунтів. Продуктивність робіт по ущільненню піщаних ґрунтів на глибині до 5 м у 3-4 рази вища, ніж при використанні будь-яких інших способів ущільнення.

Зазвичай для ущільнення водонасичених ґрунтів застосовують просторовий віброущільнювач, котрий занурюється і представляє собою металеву колону, до якої рівномірно по висоті зварюванням приєднані пластини, а у верхній частині закріплений вібробуджувач, який генерує вертикально спрямовані коливання.

Склад й фізико-механічні властивості ґрунтів, основ доріг та покриттів й інших ущільнених середовищ доволі різноманітні. Різні також і вимоги до ущільнення, умови його реалізації, масштаб та організація робіт. Це призвело до появи ущільнюючих машин багатьох типів й різновидів, котрі відрізняються характером взаємодії з середовищем, яке ущільнюється, конструктивними схемами й розмірами [1,3,5].

За характером сил взаємодії виконавчого/робочого органу з середовищем, яке ущільнюється, всі ущільнюючі машини поділяють на машини статичної дії (пресування, вкатування) й динамічної дії (без ударні, вібраційні, ударно-вібраційні, ударні). В принципі одна й та ж вібраційна машина для ущільнення ґрунту може працювати або у без ударному вібраційному режимі, або в ударно-вібраційному, що залежить від статичного моменту маси й кутової швидкості дебалансів, маси машини, складу і властивостей (у тому числі ступеня ущільнення) ґрунту. Однак при проектуванні призначають параметри машини, які забезпечують її ефективну роботу у певному режимі.

За способом передачі силового впливу оброблюваному середовищу розрізняють поверхневі ущільнюючі машини (наприклад, котки, трамбувальники) й глибинні (ті, що занурюються у середовище, яке ущільнюється).

При дії робочого органу (РО) вібраційної машини на ґрунт, дорожню основу, покриття чи інше середовище, яке ущільнюється, у граничному прошарку останнього з'являється напруження, хвиля котрого розповсюджується в середовищі, яке ущільнюється, викликаючи деформацію останнього. Динамічну реакцію, яка сприймається РО машини, для створення доволі простої розрахункової моделі можна схематично подати у вигляді трьох адитивних компонент: пружної, напрямом котрої протилежний деформації граничного прошарку середовища; інерційної, напрямом котрої протилежний прискоренню РО (котрому зазвичай приписують властивості незмінного твердого тіла); дисипативної, напрямом якої протилежний швидкості РО. Дисипативна компонента, у свою чергу, може складатись з двох доданків – в'язкого й пластичного. У ґрунтів й цементобетонних сумішей пластична складова має переважне значення. У асфальтобетонних сумішей в'язкий опір, зазвичай дещо більший за пластичний.

Вказана вище схематизація дозволяє пояснити деякі суттєві явища при ущільненні ґрунту й інших середовищ, наприклад, наявність залишкової і пружної складових деформації та залежність деформації від закону руху РО. Оскільки до складу ґрунту, дорожніх основ та покриттів входять тверді зерна, які дотикаються одне до одного, при доволі значній інтенсивності динамічних впливів відбувається їх взаємне проковзування, яке призводить до вібраційного зниження сухого тертя й прийнятному розжиженню середовища, яке ущільнюється. Одночасно розміщений між зернами зв'язуючий склад, який утримує у собі колоїдно-дисперсні часточки глини чи цементу, під дією вібрації розжижується завдяки зниженню структурної в'язкості й появі тиксотропії [3].

Ґрунти за кількістю зв'язуючої речовини (глини) розділяють на незв'язні із вмістом менше 4% глини, малозв'язні із вмістом від 4 до 11% глини й зв'язні, які мають у своєму складі більше 11% глини. Чим більше зв'язний ґрунт, тим більш складно його ущільнювати. Ущільнюваність ґрунту суттєво залежить від його вологості. Зазвичай для кожного заданого ущільнюючого впливу найбільша щільність ґрунту досягається при певній вологості, яка називається оптимальною. З посиленням ущільнюючого впливу знижується оптимальна вологість й зростає досягнута при цій вологості щільність ґрунту [3,5].

Не зважаючи на все згадане вище, процедура моделювання процесів ущільнення ґрунтів та сумішей, на думку авторів даного дослідження, вимагає подальшого уточнення й вдосконалення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

З метою вдосконалення існуючих моделей ущільнення бетонних/будівельних сумішей та ґрунтів автори [9-11] враховують вплив оброблюваного середовища у межах дискретно-континуальних моделей. Проте явища супер- й субгармонічних коливань, які неминуче виникають у РО вібромашини за наявності у ній нелінійної відновлюваної сили, до сих пір не досліджені. Щодо моделювання вказаних коливань й резонансів можна використати підходи, розвинуті у [12,13].

Мета роботи

Мета роботи полягає у обґрунтуванні одновимірної дискретно-континуальної моделі вібраційної системи (машини) для ущільнення ґрунтів і сумішей, яка адекватно описує основні властивості й характеристики вимушених коливань (основного типу), суб- та суперрезонансів, що виникають, за наявності у складі

РО машини нелінійної пружності (котра зводить свій вплив до виникнення у системі «вібраційна машина (РО) – оброблюване середовище» т.з. нелінійної відновлюваної сили). При цьому враховані дискретні властивості самого РО й континуальні – оброблюваного середовища.

Слід зазначити, що у даній роботі використані частково результати, викладені у [9-13].

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо систему, зображену на Рис. 1, яка моделює процес ущільнення ґрунтів/сумішей (бетонних чи будівельних), і є, по своїй суті, вібраційною системою з нелінійною відновлюваною силою, котра має дискретно-континуальні властивості (оскільки враховані властивості РО – дискретні й континуальні властивості об’єкта, що знаходиться у полі впливу вібрації). Зазначимо також, що задача має одновимірну постановку. Вертикальна вимушена сила Q типу:

$$Q(t) = A \cdot \sin \omega t, \tag{1}$$

де A – амплітуда, ω – кругова частота, t – час, діє на тіло маси m , котре спирається на систему нелінійних пружин і в’язких демпферів; c – коефіцієнт (лінеаризований) жорсткості системи пружин; b – коефіцієнт в’язкості демпферів.

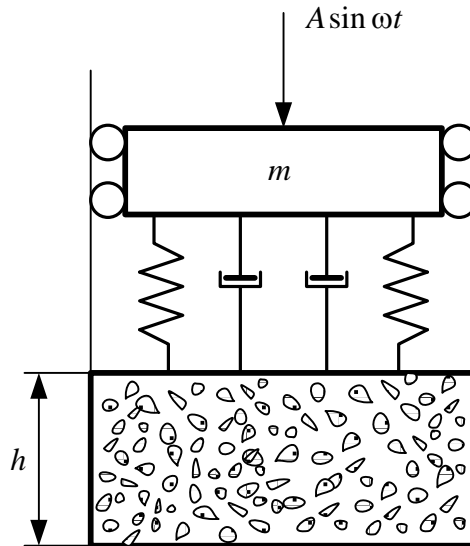


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Спочатку визначимо амплітуду сили, яка передається на основу пружинами та демпферами. Шукана сила, яка передається на основу, котре є ґрунт/суміш, що ущільнюється (товщиною h), визначається виразом:

$$N = b \cdot \dot{q} + c \cdot q, \tag{2}$$

у якому q – вертикальне переміщення тіла m (РО вібраційної системи), яке відраховується від стану рівноваги. Нехай характеристика відновлюваної сили має вид:

$$F(q) = c_0 \cdot q + \beta \cdot q^3, \tag{3}$$

причому $\beta > 0$ (для жорсткої характеристики сили), $\beta < 0$ (для м’якої характеристики сили), c_0 – лінійна складова жорсткості пружини. Використовуючи метод прямої лінеаризації [13], нелінійна характеристика $F(q)$ замінюється еквівалентною лінійною, тому диференціальне рівняння руху системи набуває вигляду:

$$m \cdot \ddot{q} + b \cdot \dot{q} + c \cdot q = A \cdot \sin \omega t, \tag{4}$$

де після введення позначення:

$$\tilde{h} = \frac{b}{2m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \tag{5}$$

приходимо до рівняння у наступній формі:

$$\ddot{q} + 2\tilde{h}\dot{q} + k^2 q = \frac{A}{m} \cdot \sin \omega t. \tag{6}$$

Його загальний розв’язок має вид:

$$q = e^{-\tilde{h}t} \cdot (C_1 \cdot \sin k_*t + C_2 \cdot \cos k_*t) + \frac{A \cdot \sin(\omega t - \gamma)}{m \cdot \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\tilde{h}^2 \omega^2}}, \tag{7}$$

де

$$k_* = \sqrt{k^2 - \tilde{h}^2} \quad (8)$$

є частота затухаючих коливань системи, а кут γ характеризує відставання фази переміщення від фази сили, й визначається виразом:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\tilde{h}\omega}{k^2 - \omega^2}. \quad (9)$$

Постійні C_1 й C_2 знаходимо з початкових умов задачі.

Перша частина отриманого розв'язку представляє собою коливання з частотою k_* , котрі з плином часу затухають й після початку процесу стають практично несуттєвими. Основне значення має друга частина загального розв'язку:

$$q = \frac{A \cdot \sin(\omega t - \gamma)}{m \cdot \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\tilde{h}^2 \omega^2}}, \quad (10)$$

що описує незатухаючі усталені коливання, які відбуваються з частотою збудження ω .

Зазначимо, що у формулах (4), (5) під c розуміємо [12,13]:

$$c = c_0 + \frac{5\beta \cdot \tilde{A}^2}{7}, \quad (11)$$

де \tilde{A} – амплітуда усталених коливань.

При цьому встановлення стаціонарного коливного процесу з частотою ω може відбуватись за одним з трьох наведених нижче, сценаріїв: 1) $\omega \ll k$, на початку руху основні коливання частоти ω супроводжуються затухаючими коливаннями більшої частоти; 2) $\omega \gg k$ - на основні коливання з частотою ω накладаються затухаючі коливання з меншою частотою k ; 3) $\omega \approx k$ – рух має характер биття, котре поступово затухає.

Амплітуда усталених коливань \tilde{A} визначається виразом:

$$\tilde{A} = \frac{A}{\sqrt{(c_0 + \frac{5\beta \tilde{A}^2}{7} - m\omega^2)^2 + 4\tilde{h}^2 \omega^2 m^2}}, \quad (12)$$

яке після заміни $Z = \tilde{A}^2$ зводиться до кубічного рівняння:

$$\left(\frac{5\beta}{7}\right)^2 \cdot Z^3 + 2(c_0 - m\omega^2) \cdot \frac{5\beta}{7} \cdot Z^2 + \left\{ (c_0 - m\omega^2)^2 + 4\tilde{h}^2 \omega^2 m^2 \right\} \cdot Z - A^2 = 0. \quad (13)$$

Рівняння (13) можна розв'язати за допомогою загально відомої формули Кардано. Відношення амплітуди \tilde{A} до статичного переміщення $q_{cm} = A/c$ дорівнює:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4\tilde{h}^2 \omega^2}{k^4}}} = \frac{c}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + 4\tilde{h}^2 \omega^2 m^2}}. \quad (14)$$

Отже, коефіцієнт динамічності μ (14) у даному випадку є функцією \tilde{A} :

$$\mu = \frac{c_0 + \frac{5\beta}{7} \cdot \tilde{A}^2}{\sqrt{(c_0 + \frac{5\beta}{7} \cdot \tilde{A}^2 - m\omega^2)^2 + 4\tilde{h}^2 \omega^2 m^2}}. \quad (15)$$

Тоді для N (після заміни $b = 2\tilde{h}c/k^2$) маємо:

$$N = \mu A \cdot \left[\sin(\omega t - \gamma) + \frac{2\tilde{h}\omega}{k^2} \cdot \cos(\omega t - \gamma) \right]. \quad (16)$$

Максимальне значення сили N дорівнює:

$$N_{\max} = \mu A \cdot \sqrt{1 + \frac{4\tilde{h}^2 \omega^2}{k^4}} = \mu A \cdot \sqrt{1 + \frac{4\tilde{h}^2 \omega^2 m^2}{c^2}}. \quad (17)$$

Безрозмірне співвідношення N_{\max} / A , яке називається зазвичай коефіцієнтом передачі сили [13], визначає, у скільки разів найбільша сила, яка передається основі, що ущільнюється (грунт/суміш), більше амплітуди заданої вимушеної сили A ; воно дорівнює:

$$\mu_* = \frac{N_{\max}}{A} = \mu \cdot \sqrt{1 + \frac{4\tilde{h}^2 \omega^2}{k^4}} = \sqrt{\frac{c^2 / m^2 + 4\tilde{h}^2 \omega^2}{(c/m - \omega^2)^2 + 4\tilde{h}^2 \omega^2}}. \quad (18)$$

Отже, $\mu_* = \mu_*(c) = \mu_*(\tilde{A})$. Аналіз залежності $\mu_*(\omega/k)$ при різних значеннях $2\tilde{h}/k$ свідчить про те, що всі такі криві, незалежно від коефіцієнта в'язкості \tilde{h} , перетинаються у точці з координатами $(\sqrt{2}; 1)$ на площині $\{\mu_*; \omega/k\}$. Отже, при $\omega/k < \sqrt{2}$ в'язкість демпферів сприяє зниженню загальної сили, яка передається на основу (об'єкт обробки вібраційним полем), а при $\omega/k > \sqrt{2}$ (як це буває у добре амортизованих системах – цю силу збільшує). Граничне значення амплітуди \tilde{A}_{zp} при цьому визначається зі співвідношення:

$$\omega/k = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\omega \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{c}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\omega^2 \cdot m}{c} = 2 \Leftrightarrow c = \frac{\omega^2 m}{2}. \quad (19)$$

Або:

$$c_0 + \frac{5\beta}{7} \cdot \tilde{A}_{zp}^2 = \frac{\omega^2 m}{2} \Leftrightarrow \tilde{A}_{zp}^2 = \frac{\omega^2 m / 2 - c_0}{(5\beta/7)}. \quad (20)$$

Значення \tilde{A}_{zp}^2 повинно бути додатнім, тому:

$$\begin{aligned} a) & \beta > 0, \quad \omega^2 m / 2 - c_0 > 0; \\ б) & \beta < 0, \quad \omega^2 m / 2 - c_0 < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Розглянемо далі дію різних видів сил $Q(t)$ і будемо визначати закони $q(t)$ й $\dot{q}(t)$, котрі, у свою чергу, за співвідношенням (2) визначають N . Скористаємось при цьому підходами роботи [13].

1. Дія довільної вимушеної сили $Q(t)$.

У цьому випадку:

$$\begin{cases} q(t) = e^{-\tilde{h}t} \left(\frac{\dot{q}_0 + \tilde{h}q_0}{k_*} \cdot \sin k_* t + q_0 \cos k_* t \right) + \frac{1}{mk_*} \cdot \int_0^t Q(\xi) e^{-\tilde{h}(t-\xi)} \cdot \sin k_*(t-\xi) d\xi; \\ \dot{q}(t) = e^{-\tilde{h}t} \left(-\frac{k_*^2 q_0 + \tilde{h}\dot{q}_0}{k_*} \cdot \sin k_* t + \dot{q}_0 \cos k_* t \right) + \frac{1}{m} \cdot \int_0^t Q(\xi) e^{-\tilde{h}(t-\xi)} \cdot \cos k_*(t-\xi) d\xi - \frac{\tilde{h}}{mk_*} \cdot L, \end{cases} \quad (22)$$

де (q_0, \dot{q}_0) – початкові (при $t=0$) умови для координати q та її першої похідної по часу t , а величина

$$L = \int_0^t Q(\xi) e^{-\tilde{h}(t-\xi)} \cdot \sin k_*(t-\xi) d\xi.$$

2. Функція $Q(t)$ диференційована по t , а початкові умови нульові ($q_0 = \dot{q}_0 \equiv 0$).

У цьому випадку (і наступному) наводимо формулу лише для $q(t)$.

$$q(t) = \frac{1}{c} \cdot \left\{ Q(t) - Q(0) \cdot e^{-\tilde{h}t} \left(\cos k_* t - \frac{\tilde{h}}{k_*} \cdot \sin k_* t \right) - \int_0^t \dot{Q}(\xi) \cdot e^{-\tilde{h}(t-\xi)} \left[\cos k_*(t-\xi) + \frac{\tilde{h}}{k_*} \cdot \sin k_*(t-\xi) \right] d\xi \right\}. \quad (23)$$

3. Сила $Q(t)$ має скінченні розриви $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots$ у задані моменти часу ξ_1, ξ_2, \dots (тобто ΔQ_i).

$$q(t) = \frac{1}{c} \cdot \left\{ Q(t) - \int_0^t \dot{Q}(\xi) e^{-\tilde{h}(t-\xi)} \left[\cos k_*(t-\xi) + \frac{\tilde{h}}{k_*} \sin k_*(t-\xi) \right] d\xi - W \right\}, \quad (24)$$

де $W = \sum_{i=0}^r \Delta Q_i \cdot e^{-\tilde{h}(t-\xi_i)} \cdot \left[\cos k_*(t-\xi) + \frac{\tilde{h}}{k_*} \cdot \sin k_*(t-\xi_i) \right]$.

4. Сила $Q(t)$ періодична, з періодом T , тобто $Q(t+T) = Q(t)$.

$$q(t) = \frac{e^{-\tilde{h}T}}{mk_* \cdot (1 - 2e^{\tilde{h}T} \cos k_* T + e^{2\tilde{h}T})} \cdot \left\{ \left[e^{\tilde{h}T} \cdot (C_* \cdot \sin k_* T - S_* \cdot \cos k_* T) + S_* \right] \cdot \cos k_* t + \right. \\ \left. + \left[e^{\tilde{h}T} \cdot (C_* \cdot \cos k_* T + S_* \cdot \sin k_* T) - C_* \right] \cdot \sin k_* t \right\} + \\ + \frac{1}{mk_*} \cdot \int_0^t Q(\xi) \cdot e^{-\tilde{h}(t-\xi)} \cdot \sin k_* (t - \xi) d\xi, \quad (25)$$

де

$$\begin{cases} C_* = \int_0^T Q(\xi) \cdot e^{\tilde{h}\xi} \cdot \cos k_* \xi d\xi, \\ S_* = \int_0^T Q(\xi) \cdot e^{\tilde{h}\xi} \cdot \sin k_* \xi d\xi. \end{cases} \quad (26)$$

$$\dot{q}(t) = \frac{e^{-\tilde{h}T}}{m \cdot (1 - 2e^{\tilde{h}T} \cos k_* T + e^{2\tilde{h}T})} \cdot \left\{ - \left[e^{\tilde{h}T} \cdot (C_* \cdot \sin k_* T - S_* \cdot \cos k_* T) + S_* \right] \cdot \sin k_* t + \right. \\ \left. + \left[e^{\tilde{h}T} \cdot (C_* \cdot \cos k_* T + S_* \cdot \sin k_* T) - C_* \right] \cdot \cos k_* t \right\} + \\ + \frac{1}{mk_*} \cdot \int_0^t Q(\xi) \cdot \left\{ -\tilde{h} \cdot e^{-\tilde{h}(t-\xi)} \cdot \sin k_* (t - \xi) + e^{-\tilde{h}(t-\xi)} \cdot k_* \cdot \cos k_* (t - \xi) \right\} d\xi. \quad (27)$$

Слід зазначити, що вирази (25)-(27) описують закон руху системи й силу $N(t)$ у інтервалі часу $t \in [0, T]$. Цей закон потім повторюється у наступних інтервалах часу: $[T, 2T]$, $[2T, 3T]$ і т.д. [13]. Якщо побудований графік $\{q(t), \dot{q}(t), N(t)\}$ за формулами (25)-(27) й (2), тоді зміщуючи його на період, два періоди і т.д. матимемо графіки $\{q(t), \dot{q}(t), N(t)\}$ для наступних (чи попередніх) інтервалів часу.

5. У якості вимушеної сили $Q(t)$ виступають односторонні періодичні імпульси S .

Саме таким чином можна моделювати віброударні (ударні) системи ущільнення ґрунтів/сумішів. Період імпульсів T та значення коефіцієнтів m, b та c будемо вважати заданими.

Сумістимо початок відліку часу з моментом, який настає одразу після прикладання якогось імпульсу, тоді за формулами (26) матимемо, що $C_* = S$, $S_* = 0$. При цьому вираз (25) набуває виду:

$$q(t) = \frac{S \cdot e^{-\tilde{h}(T-t)} \cdot \left[\sin k_* (T-t) + e^{\tilde{h}T} \cdot \sin k_* t \right]}{mk_* \cdot (1 - 2e^{\tilde{h}T} \cdot \cos k_* T + e^{2\tilde{h}T})}. \quad (28)$$

Для $\dot{q}(t)$ замість (27) маємо:

$$\dot{q}(t) = \frac{S \cdot \left\{ \tilde{h} e^{-\tilde{h}(T-t)} \left[\sin k_* (T-t) + e^{\tilde{h}T} \sin k_* t \right] + e^{-\tilde{h}(T-t)} \left[-k_* \cos k_* (T-t) + e^{\tilde{h}T} k_* \cos k_* t \right] \right\}}{mk_* \cdot (1 - 2e^{\tilde{h}T} \cos k_* T + e^{2\tilde{h}T})}. \quad (29)$$

За малого відношення періода T імпульсів до власного періоду $2\pi/k_*$ системи (т.з. збудження високої частоти) залежність $q(t)$ стає такою, що за один період T встигає реалізуватись лише частина одного циклу вільних коливань системи й роль в'язкого тертя відносно невелика. У протилежному випадку, коли $T/(2\pi/k_*) \gg 1$ (т.з. збудження низької частоти), залежність $q(t)$ стає такою, що за один період T відбувається більше одного циклу вільних коливань й стає суттєвою роль в'язкого тертя. Тобто, якщо $T/(2\pi/k_*) \ll 1$, тоді $\tilde{h} \rightarrow 0$; якщо $T/(2\pi/k_*) \gg 1$, тоді \tilde{h} – немала величина, її треба враховувати у всіх співвідношеннях.

Особливо важливим стає випадок резонансу, коли період T імпульсів у ціле число разів більше періоду $2\pi/k_*$ вільних коливань. Позначимо вказане число буквою r , тоді маємо $T = 2\pi r/k_*$. У цьому випадку $\sin k_*T = 0$, $\cos k_*T = 1$ й рух описується виразами:

$$\begin{cases} q(t) = \frac{S \cdot e^{-\tilde{h}t} \cdot \sin k_*t}{mk_* \cdot (1 - e^{-\tilde{h}T})}; \\ \dot{q}(t) = \frac{S \cdot e^{-\tilde{h}t} \cdot \{-\tilde{h} \sin k_*t + k_* \cos k_*t\}}{mk_* \cdot (1 - e^{-\tilde{h}T})}. \end{cases} \quad (30), (31)$$

Відомо [13], що однократний імпульс викликає рух за наступними законами:

$$\begin{cases} q_1(t) = \frac{S}{mk_*} \cdot e^{-\tilde{h}t} \cdot \sin k_*t; \\ \dot{q}_1(t) = \frac{S}{mk_*} \cdot \left\{ \tilde{h} \cdot e^{-\tilde{h}t} \cdot \sin k_*t + e^{-\tilde{h}t} \cdot k_* \cdot \cos k_*t \right\} \end{cases} \quad (32), (33)$$

Знаходимо, що у випадку резонансу, який викликаний періодичними ударами, рух описується тим самим виразом, але з додатковим коефіцієнтом:

$$\begin{cases} q(t) = q_1(t) \cdot \frac{1}{(1 - e^{-\tilde{h}T})}; \\ \dot{q}(t) = \dot{q}_1(t) \cdot \frac{1}{(1 - e^{-\tilde{h}T})}. \end{cases} \quad (34), (35)$$

Множник $1/(1 - e^{-\tilde{h}T})$ характеризує вплив процесу повторення ударів (при ущільненні ґрунтів чи сумішей). Для цього множника наближено можна записати [13]:

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{1 - e^{-\tilde{h}T}} \approx \frac{1}{\tilde{h}T} = \frac{k_*}{2\pi\tilde{h}}. \quad (36)$$

При $\omega = 2\pi/T$, маємо:

$$\tilde{\beta} \cong \frac{1}{2\pi(\tilde{h}/k_*)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\omega}{k_*} \cdot \frac{1}{(\tilde{h}/k_*)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\omega}{k_*} \cdot \frac{k}{\tilde{h}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\tilde{h}^2}{k^2}}. \quad (37)$$

Тоді вираз для $\tilde{\beta}$ (36) в уточненій формі можна подати наступним чином:

$$\tilde{\beta} = \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{2\pi \cdot (\tilde{h}/k)}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{h}^2}{k^2}}} \cdot \left(\frac{\omega}{k_*}\right)^{-1} \right] \right\}^{-1}. \quad (38)$$

Враховуючи ту обставину, що $\frac{\omega}{k_*} = \frac{1}{r}$, формули (37) й (38) можна подати наступним чином:

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_{набл.} = \frac{k}{\tilde{h}} \cdot \sqrt{1 - \tilde{h}^2/k^2} / (2\pi r); \\ \tilde{\beta}_{точн.} = \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{2\pi \cdot (\tilde{h}/k) \cdot r}{\sqrt{1 - \tilde{h}^2/k^2}} \right] \right\}^{-1}. \end{cases} \quad (39)$$

Нижче, у Таблиці наведені значення $\tilde{\beta}_{набл.}$ й $\tilde{\beta}_{точн.}$ для $(\tilde{h}/k) = 0,1$ при різних значеннях r . До речі, якщо $r > 1$, це відповідає ситуації субрезонансів ударів (їх частоти) по відношенню до власної частоти системи k_* . При $0 < r < 1$ – ситуації суперрезонансів ударних частот по відношенню до власної частоти системи k_* .

Таблиця 1

Залежність $\tilde{\beta}$ від r при $(\tilde{h}/k) = 0,1$

r	Тип ударного резонансу	$\frac{\omega}{k_*} = \frac{1}{r}$	$\tilde{\beta}_{точн.}$	$\tilde{\beta}_{набл.}$
1	Основний	1	2,136	1,584*
2	Субрезонанс 2-го порядку	1/2	1,394	0,792
3	Субрезонанс 3-го порядку	1/3	1,177	0,528
4	Субрезонанс 4-го порядку	1/4	1,087	0,396
5	Субрезонанс 5-го порядку	1/5	1,044	0,317
0,5(1/2)	Суперрезонанс 2-го порядку	2	3,693	3,167
0,25(1/4)	Суперрезонанс 4-го порядку	4	6,847	6,334

Примітка. Автор [13] визначає $\tilde{\beta}_{набл.}$ для $r = 1$, яке співпадає з отриманим у даній роботі. Всі інші результати, як і графік $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\omega/k_)$ ((Рис. 6.6), с. 132 [13]) – помилкові.

Використаємо далі метод гармонічного балансу й вважатимемо, що характеристика нелінійної відновлюваної сили (3) симетрична відносно q , а у вібраційній системі можливі супер- та субгармонічні (як і основні) коливання. Згідно [12,13] маємо:

а) для супергармонічних коливань-

$$q(t) = A_1 \cdot \sin \omega t + A_3 \cdot \sin 3\omega t; \tag{40}$$

б) для субгармонічних коливань –

$$q(t) = A_1 \cdot \sin \omega t + A_{1/3} \cdot \sin \frac{\omega t}{3}. \tag{41}$$

Нехтуючи в'язким тертям (у випадку визначення амплітуд A_3 й $A_{1/3}$, а також A_1), тобто вважаючи $\tilde{h} \rightarrow 0$, можна отримати:

$$A_1 = \frac{A}{m \cdot (c/m - \omega^2)}; \quad A_3 = \frac{\beta \cdot A_1^3}{4m \cdot (c/m - 9\omega^2)}. \tag{42}$$

Слід зазначити, що амплітуда супергармонічних коливань A_3 мала у порівнянні з амплітудою A_1 основних коливань ($A_1 \equiv \tilde{A}$), звичайно, при умові, що не мала різниця $(c/m - 9\omega^2)$

Аналогічно до (42), у випадку (41) для субгармонічних коливань матимемо:

$$A_1 = \frac{A}{m \cdot (c/m - \omega^2)}; \quad A_{1/3} = \frac{A_1}{2} \cdot \left[1 \pm \sqrt{\frac{16(\omega^2 - 9k_0^2) \cdot m}{27A^2 \cdot \beta} - 7} \right]; \quad k_0^2 = c/m. \tag{43}$$

Зазначимо, що для виконання умови про дійсне значення розв'язку, необхідно (при $\beta > 0$):

$$\omega > 3k_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{21}{16} \cdot \frac{\beta}{c} \cdot A_1^2}, \tag{44}$$

тобто субгармонічні коливання можливі лише при досить великих (відносно основної частоти вільних коливань (k_* чи k)) частотах збудження. Якщо $\beta < 0$, тоді:

$$A_{1/3} = \frac{A_1}{2} \cdot \left[1 \pm \sqrt{\frac{16(\omega^2 - 9k_0^2) \cdot (\omega^2 - k_0^2)^2 \cdot m^3}{27A^2 \cdot \beta} - 7} \right]. \tag{45}$$

Для виконання умови про дійсне значення розв'язку, необхідно (при $\beta < 0$):

$$\omega < 3k_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{21}{16} \cdot \frac{\beta}{c} \cdot A_1^2}. \quad (46)$$

Таким чином, субгармонічні коливання у системі вібраційного типу для ущільнення ґрунтів/бетонних (чи будівельних) сумішей з жорсткою ($\beta > 0$) чи м'якою ($\beta < 0$) характеристикою відновлюваної сили можливі лише при достатньо великих (для $\beta > 0$) або при достатньо малих (для $\beta < 0$) значеннях частоти ω вимушеної сили.

Слід також зазначити, що субгармонічні коливання виникають тоді, коли A_1 перевищує певні «по-рогові» значення $A_{порог.}$:

$$A_1 \geq A_{порог.} = \sqrt{\frac{\omega^2 - 9c_0/m}{(\beta/m) \cdot 18,24}}, \quad \beta < 0, \quad (47)$$

а супергармонічні коливання виникають тоді, коли, крім умови (44), виконується ще й така:

$$A_1 \leq A_{порог.}, \quad \beta > 0. \quad (48)$$

Якщо субгармонічні коливання у вібраційній системі виникли (виконані умови (44), (48) для $\beta > 0$, або (46), (47) для $\beta < 0$), тоді їх амплітуди $A_{1/3}$ можуть суттєво перевищувати амплітуди основних коливань, які відбуваються з частотою ω (тобто A_1). Дійсно, при $0 < \beta \ll 1$ з (43) матимемо:

$$\left| \frac{A_{1/3}}{A_1} \right| \approx \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16(\omega^2 - 9k_0^2) \cdot m}{27A^2 \cdot \beta}} - 7. \quad (49)$$

Якщо врахувати сили тертя, то вони зменшують амплітуди суб- та супергармонічних коливань, але й здатні при їх достатній інтенсивності – повністю знищити коливання.

Далі, використовуючи результати робіт [9-11], встановимо закони руху середовища, яке ущільнюється, а також одночасно взаємодіє з РО вібраційної системи. Як у [9], вважаємо, що рух середовища, яке ущільнюється, описується координатою переміщення X , котра, взагалі кажучи, є матрицею з $\dim[2 \times 1]$:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_H(t) \\ x_\infty(t) \end{bmatrix}, \quad (50)$$

де H – довжина (товщина) середовища (ґрунту чи суміші), яка має скінчене значення, а $x_\infty(t)$ – описує переміщення середовища, яке ущільнюється, для випадку нескінченного значення по висі Ox його товщини/довжини ($H \rightarrow \infty$). (Відповідно, при H скінченному переміщення середовища, яке ущільнюється, описується $x_H(t)$). Введемо позначення роботи [9] (верхні – відносяться до H – скінченного, а нижні – до $H \rightarrow \infty$):

$$M = \begin{bmatrix} m^{**} \\ m^* \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \bar{\mu} \cdot \frac{S}{H} \\ \bar{\mu} \cdot \sqrt{S} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} c^{**} \\ c^* \end{bmatrix}; \quad \bar{N}(t) = \begin{bmatrix} N(t) \\ N(t) \end{bmatrix}, \quad (51)$$

де M – матриця інерційних (масових) коефіцієнтів, B – матриця коефіцієнтів в'язкості оброблюваного вібрацією середовища, C – матриця його коефіцієнтів жорсткості. Континуальні властивості оброблюваного середовища зведені до поверхні контакту ґрунту/суміші з РО вібросистеми. У (51) $\bar{\mu}$ – коефіцієнт в'язкості оброблюваного середовища, S – площа контактної зони ґрунту/суміші з РО. Тоді рівняння руху системи дискретно-континуального типу (РО + оброблюване вібрацією середовище) можна звести до наступного матричного рівняння:

$$M \cdot \ddot{X} + B \cdot \dot{X} + C \cdot X = \bar{N}(t). \quad (52)$$

Введемо позначення:

$$H_1 = \frac{B}{2M}; \quad K_1^2 = \frac{C}{M}; \quad K_{1*} = \sqrt{K_1^2 - H_1^2}. \quad (53)$$

Тоді (52) можна подати наступним чином:

$$\ddot{X} + 2H_1 \cdot \dot{X} + K_1^2 \cdot X = \bar{N}(t). \quad (54)$$

Загальний розв'язок (54) у матричному виді має наступний вигляд:

$$X(t) = e^{-H_1 t} \cdot \{\bar{C}_1 \sin K_{1*} t + \bar{C}_2 \cos K_{1*} t\} + \frac{1}{MK_{1*}} \cdot \int_0^t \bar{N}(\xi) \cdot \exp\{-H_1 \cdot (t - \xi)\} \cdot \sin\{K_{1*} \cdot (t - \xi)\} d\xi. \quad (55)$$

Константи \bar{C}_1 й \bar{C}_2 слід визначати з початкових умов задачі. Зазвичай, початкові умови нульові ($\bar{C}_1 = \bar{C}_2 \equiv 0$), тоді вираз для $X(t)$ (55) суттєво спрощується:

$$X(t) = \frac{1}{M \cdot K_{1*}} \cdot \int_0^t \bar{N}(\xi) \cdot \exp\{-H_1 \cdot (t - \xi)\} \cdot \sin[K_{1*} \cdot (t - \xi)] d\xi. \quad (56)$$

Слід зазначити, що сила $N(t)$, яка передається від РО до середовища, яке ущільнюється, залежить від частоти його коливань ω . Тому, у залежності від того, на якій частоті функціонування (ω_ϕ) системи збуджується вібрація (основна- $\omega_\phi = k_*$, $\tilde{A} = A = A_1$; субрезонансу- $\omega_\phi = \omega_{sub}$, $\tilde{A} = A_{1/3}$; суперрезонансу- $\omega_\phi = \omega_{super}$, $\tilde{A} = A_3$), коефіцієнт передачі сили є функцією ω_ϕ , а не тільки функцією \tilde{A} , тобто $\mu_* = \mu_*(\omega_\phi, \tilde{A})$.

Висновки

1. Обґрунтована одновимірна дискретно-континуальна модель вібраційної системи ущільнення ґрунтів і сумішей (бетонних/будівельних) за наявності у РО вказаної системи нелінійної пружини (або нелінійної відновлюваної сили), яка у подальшому застосована для аналізу вимушених коливань (основного типу), супер- та субрезонансів, виникаючих при цьому.
2. Визначені умови, амплітуди та частоти, за яких існують коливання основного типу, а також супер- та субрезонанси аналітичним методом. Для ударних вібраційних систем ущільнення ґрунтів/сумішей детерміновані амплітуди коливань при наявності ударних супер- та субрезонансів.
3. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку вібраційних систем ущільнення ґрунтів та сумішей (бетонних/будівельних), як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

Список використаної літератури

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т./Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 4. Вибрационные процессы и машины/Под ред. Э.Э. Лавендела. 1981. -509с.
2. Савинов О.А. О реологических моделях бетонной смеси/О.А. Савинов, И.У. Альберт//Изв. ВНИИГС. – Ленинград, 1974. – Т. 105. – С. 145-147.
3. Вибрационные машины в строительстве и производстве строительных материалов/Справочник/Под ред. В.А. Баумана, И.И. Быховского, Б.Г. Гольдштейна. – М.: Машиностроение, 1976. – 548с.
4. Савинов О.А. Вибрационное уплотнение бетонных смесей/О.А. Савинов, Е.В. Лавринович, А.Я. Лускин, Н.Я. Цукерман. – Ленинград: Энергия, 1973. – 53с.
5. Бауман В.А. Вибрационные машины и процессы в строительстве/В.А. Бауман, И.И. Быховский. – М.: Высшая школа, 1977. – 255с.
6. Гольдштейн Б.Г. Глубинные вибраторы для уплотнения бетона/Б.Г. Гольдштейн, Л.П. Петрунькин. – М.: Машиностроение, 1966. – 171с.
7. Карманов И.В. Исследование работы плоскостного глубинного уплотнителя и выбор его оптимальных параметров/И.В. Карманов//Известия ВНИИГС. – Ленинград, 1976. – Т. 114. – С. 103-108.
8. Савинов О.А. Практическая методика расчёта параметров плоскостного глубинного уплотнителя/О.А. Савинов, Е.В. Лавринович, И.В. Карманов//Известия ВНИИГС. – Ленинград, 1978. – Т. 121. – 100с.
9. Ловейкін В.С. Ідентифікація механічних властивостей ґрунтів сільськогосподарського призначення шляхом дослідження коливань їх зразків/В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, Л.А. Дяченко//Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2011. – Вип. 45. – С. 103-109.
10. Маслов А.Г. Исследование взаимодействия виброплощадки с бетонной смесью/А.Г. Маслов, О.О. Колесник//Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського. – Кременчук, 2016. – Вип. 1(96). – С. 51-57.
11. Маслов А.Г. Исследование взаимодействия вибрационной плиты рабочего органа с уплотняемой бетонной смесью/А.Г. Маслов, Ю.С. Саленко, И.И. Жовтяк//Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського. – Кременчук, 2016. – Вип. 5(100). – С. 51-57.
12. Ландау Л.Д. Механика. Т. 1/Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204с.
13. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний/Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1991. – 256с.