УДК 517.944

С.Г. БЛАЖЕВСЬКИЙ
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОГО СИМЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ ІЗ СИМЕТРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

Методом інтегрального перетворення Вебера отримано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності у двошаровому симетричному просторі із симетричною порожниною. Проведено аналіз найбільш вживаних на практиці випадків для двошарового осесиметричного тіла з циліндричною порожниною.
Ключові слова: інтегральне перетворення, рівняння теплопровідності, крайова задача.

С.Г. БЛАЖЕВСКИЙ
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО СИММЕТРИЧНОГО ПРОСТРАНСТВА С СИММЕТРИЧНОЙ ПОЛОСТЬЮ

Методом интегрального преобразования Вебера получено интегральное представление точного аналитического решения нестационарной задачи теплопроводности в двухслойном симметричном пространстве с симметричной полостью. Проведен анализ наиболее часто употребляемых на практике случаев для двухслойного тела с цилиндрической полостью.
Ключевые слова: интегральное преобразование, уравнение теплопроводности, краевая задача.

S.G. BLAZHEVSKIY
Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University

MODELING OF THE THERMAL CONDUCTIVITY PROCESS FOR A TWO-LAYER SYMMETRIC SPACE WITH A SYMMETRIC CAVITY

Integral representation of the exact analytical solution of the non-stationary heat conduction problem in a two-layer symmetric space with a symmetric cavity is obtained by the method of Weber integral transform. The analysis of the most used cases in practice for a two-layer axisymmetric body with a cylindrical cavity has been carried out.
Keywords: the integral transform, heat equation, the boundary value problem.

Постановка проблеми

Процеси дифузії, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертали до себе увагу протягом усієї історії розвитку суспільства. Але серйозні дослідження почалися з найпростішої моделі дифузійного процесу – диференціального рівняння дифузії (теплопровідності) параболічного типу [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u^2}{\partial r^2} = f(t,r)$$

з відповідними початковими та крайовими умовами. Потреби практики призводили до різного узагальнення даного рівняння. Слід відмітити появу в другій половині ХХ-го століття «Узагальненої термомеханіки», породженої гіперболічним рівнянням теплопровідності [2]. Розроблялися різні аналітичні, числові та аналітично-числові методи знаходження розв'язку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На особливу увагу заслуговує розроблений в другій половині ХХ-го століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик для вивчення технічного стану композитних матеріалів. Це привело навіть у випадку жорсткості на межі області до диференціального рівняння з сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та її похідних [3]. Інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі в цьому випадку одержати неможливо. Цих труднощів можна уникнути, якщо для побудови розв'язку використовувати метод інтегральних перетворень типу Фур'є, Бесселя, Вебера.

Мета дослідження

Дана робота присвячена моделюванню процесу теплопровідності для двошарового симетричного простору з симетричною порожниною.

Викладення основного матеріалу дослідження

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в двошаровому симетричному просторі із симетричною порожниною радіуса R_0 математично приводить до побудови обмеженого в області

$$D_1 = \{(t,r): t \in (0,\infty),\ r \in I_1 = (R_0, R_1) \cup (R_1, \infty); R_0 > 0\}$$

розв'язку сепаратної системи B-параболічних рівнянь теплопровідності [4]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} - a_j^2 B_{\alpha_j}[T_j] = a_j^2 f_j(t,r), r \in (R_{j-1}, R_j), \quad j = \overline{1,2} \tag{1}$$

за початковими умовами

$$T_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r), \quad r \in (R_{j-1}, R_j); R_0 > 0, R_2 = \infty, j = \overline{1,2}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0) T_1(t,r)|_{r=R_0} = g_0(t), \quad \frac{\partial T_2}{\partial r}|_{r=\infty} = 0, \tag{3}$$

та умовами неідеального контакту

$$\begin{cases} [(b_1 \frac{\partial}{\partial r} + 1) T_1 - T_2(t,r)]|_{r=R_1} = 0, \\ (\lambda_1^* \frac{\partial T_1(t,r)}{\partial r} - \lambda_2^* \frac{\partial T_2(t,r)}{\partial r})|_{r=R_1} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

тут B_α – диференціальний оператор: $B_\alpha[\ldots] = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{2}\frac{d}{dr}$.

Розв'язок задачі (1) – (4) побудуємо методом гібридного інтегрального перетворення типу Вебера на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з однією точкою спряження [5].

Пряме інтегральне перетворення Вебера для двошарового порожнистого простору зобразимо у вигляді матриці-рядка

$$H_{(\alpha)}[\ldots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \ldots V_{(\alpha),1}(r,\lambda)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr \int_{R_1}^{\infty} \ldots V_{(\alpha),2}(r,\lambda)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1} dr \right], \tag{5}$$

$V_{(\alpha),j}$ – компоненти спектральної функції, σ_j – компоненти вагової функції.

Запишемо систему (1) та початкові умови (2) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} (\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2) T_1 \\ (\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2) T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 f_1(t,r) \\ a_2^2 f_2(t,r) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_1(t,r) \\ T_2(t,r) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (5) до задачі (6) за правилом множення матриць. Одержуємо задачу Коші

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} + \lambda^2 \tilde{T} = \tilde{F}(t,\lambda); \tilde{T}(t,\lambda)|_{t=0} = \tilde{g}(\lambda). \tag{7}$$

У рівностях (7) прийняті позначення:

$$\tilde{T}(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{2} \int_{R_{j-1}}^{R_j} T_j(t,r) V_{(\alpha);j}(r,\lambda) \sigma_j r^{2\alpha_j+1} dr;$$

$$\tilde{F}(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{2} \int_{R_{j-1}}^{R_j} a_j^2 f_j(t,r) V_{(\alpha);j}(r,\lambda) \sigma_j r^{2\alpha_j+1} dr - \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} \alpha_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_{(\alpha);1}(R_0,\lambda) g_0(t),$$

$$\tilde{g}(\lambda) = \sum_{j=1}^{2} \int_{R_{j-1}}^{R_j} g_j(r) V_{(\alpha);j}(r,\lambda) \sigma_j r^{2\alpha_j+1} dr, \quad R_2 = \infty.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (7) є функція

$$\tilde{T}(t,\lambda) = e^{-\lambda^2 t} \tilde{g}(\lambda) + \int_0^t e^{-\lambda^2 (t-\tau)} \tilde{F}(\tau,\lambda) d\tau =$$

$$= e^{-\lambda^2 t}\tilde{g}(\lambda) + \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)}(\sum_{j=1}^{2} a_j^2 \int_{R_{j-1}}^{R_j} f_j(\tau,r)V_{(\alpha);j}(\rho,\lambda)\sigma_j\rho^{2\alpha_j+1}d\rho)d\tau -$$

$$-\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}(\alpha_{11}^0)^{-1}a_1^2 V_{(\alpha);1}(R_0,\lambda)\int_0^t e^{-\lambda_2(t-\tau)}g_0(\tau)d\tau. \quad (8)$$

Визначимо функції впливу

$$H_{(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}V_{(\alpha);j}(r,\lambda)V_{(\alpha);k}(\rho,\lambda)\Omega_{(\alpha);n}(\lambda)d\lambda,\ j,k=\overline{1,2}, \quad (9)$$

і функції Гріна

$$W_{(\alpha);1j}(t,r) = -\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0}R_0^{2\alpha_1+1}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}V_{(\alpha);1}(R_0,\lambda)V_{(\alpha);j}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha);n}(\lambda)d\lambda. \quad (10)$$

Застосуємо до матриці-елементу $[\tilde{T}(t,\lambda)]$, де функція $\tilde{T}(t,\lambda)$ визначена формулою (7), за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \int_{0_0}^\infty \ldots V_{(\alpha),1}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha),1}(\lambda)d\lambda \\ \int_{0_0}^\infty \ldots V_{(\alpha),2}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha),2}(\lambda)d\lambda \end{bmatrix}. \quad (11)$$

У результаті елементарних перетворень отримуємо розв'язок задачі (1) – (4):

$$T_j(t,r) = \int_0^t W_{(\alpha);1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{2}\int_{R_{k-1}}^{R_k} \Box_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)g_k(\rho)\sigma_k\rho^{2\alpha_k+1}d\rho +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k} \mathrm{H}_{(\alpha);jk}(t-\tau,r,\rho)a_k^2 f_k(\tau,\rho)\sigma_k\rho^{2\alpha_k+1}d\rho d\tau \equiv \sum_{m=1}^{3}T_{jm}(t,r),\ j=\overline{1,2}. \quad (12)$$

Оскільки

$$V_{(\alpha);1}(R_0,\lambda) = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha_{11}^0 a_1^{2\alpha_1}}{\lambda^{2\alpha_1}R_0^{2\alpha_1+1}}\Delta_{(\alpha)}^{(n)}(\lambda),$$

то функції Гріна

$$W_{(\alpha);1j}(t,r) = -\frac{2}{\pi}\sigma_1 a_1^{2\alpha_1+2}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}\Delta_{(\alpha)}^{(n)}(\lambda)\lambda^{-2\alpha_1}V_{(\alpha);j}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha);n}(\lambda)d\lambda. \quad (13)$$

Із формул (9) та (13) ми можемо записати безпосередньо вирази функції Гріна й функцій впливу як для випадку задання на поверхні порожнини крайової умови 1-го роду, так і 2-го чи 3-го роду.

Проаналізуємо розв’язок (12) для випадку $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ (двошаровий простір, який володіє осьовою симетрією з циліндричною порожниною). У цьому випадку маємо

$$V_1(r,\lambda) = \frac{2\lambda_2^*}{\pi R_1}[u_{11}^{02}(\frac{\lambda}{a_1}R_0)J_0(\frac{\lambda}{a_1}r) - u_{11}^{01}(\frac{\lambda}{a_1}R_0)N_0(\frac{\lambda}{a_1}r)] \equiv$$

$$\equiv \frac{2\lambda_2^*}{\pi R_1}[(\beta_{11}^0 N_0(\frac{\lambda}{a_1}R_0) - \alpha_{11}^0 N_1(\frac{\lambda}{a_1}R_0))J_0(\frac{\lambda}{a_1}r) - (\beta_{11}^0 J_0(\frac{\lambda}{a_1}R_0) - \alpha_{11}^0 J_1(\frac{\lambda}{a_1}R_0))N_0(\frac{\lambda}{a_1}r)];$$

$$V_2(r,\lambda) = \lambda[w_2(\lambda)J_0(\frac{\lambda}{a_2}r) - w_1(\lambda)N_0(\frac{\lambda}{a_2}r)];$$

$$w_1(\lambda) = u_{11}^{02}(\frac{\lambda}{a_1}R_0)[\frac{\lambda_1^*}{a_1}J_0(\frac{\lambda}{a_2}R_1)J_1(\frac{\lambda}{a_1}R_1) - \frac{\lambda_2^*}{a_2}J_1(\frac{\lambda}{a_2}R_1)(J_0(\frac{\lambda}{a_1}R_1) - b_1\frac{\lambda}{a_1}J_1(\frac{\lambda}{a_1}R_1))] -$$

$$-u_{11}^{01}(\frac{\lambda}{a_1}R_0)[\frac{\lambda_1^*}{a_1}J_0(\frac{\lambda}{a_2}R_1)N_1(\frac{\lambda}{a_1}R_1)-\frac{\lambda_2^*}{a_2}J_1(\frac{\lambda}{a_2}R_1)(N_0(\frac{\lambda}{a_1}R_1)-b_1\frac{\lambda}{a_1}N_1(\frac{\lambda}{a_1}R_1))]\equiv$$

$$\equiv u_{11}^{02}\Psi_{11}^1-u_{11}^{01}\Psi_{12}^1;$$

$$w_2(\lambda)=u_{11}^{02}(\frac{\lambda}{a_1}R_0)[\frac{\lambda_1^*}{a_1}N_0(\frac{\lambda}{a_2}R_1)J_1(\frac{\lambda}{a_1}R_1)-\frac{\lambda_2^*}{a_2}N_1(\frac{\lambda}{a_2}R_1)(J_0(\frac{\lambda}{a_1}R_1)-b_1\frac{\lambda}{a_1}J_1(\frac{\lambda}{a_1}R_1))]-$$

$$-u_{11}^{01}(\frac{\lambda}{a_1}R_0)[\frac{\lambda_1^*}{a_1}N_0(\frac{\lambda}{a_2}R_1)N_1(\frac{\lambda}{a_1}R_1)-\frac{\lambda_2^*}{a_2}N_1(\frac{\lambda}{a_2}R_1)(N_0(\frac{\lambda}{a_1}R_1)-b_1\frac{\lambda}{a_1}N_1(\frac{\lambda}{a_1}R_1))]\equiv$$

$$\equiv u_{11}^{02}\Psi_{21}^1-u_{11}^{01}\Psi_{22}^1;$$

$$\sigma_1=\frac{\lambda_1^*}{\lambda_2^*}\frac{1}{a_1^2},\quad \sigma_2=\frac{1}{a_2^2},\quad \Omega_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda[\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)]};\quad V_1(R_0,\lambda)=\frac{4}{\pi^2}\frac{\lambda_2^*\alpha_{11}^0}{R_0R_1};$$

$$W_{11}(t,r)=\frac{8\lambda_1^*\lambda_2^*}{\pi^3R_1^2}\int_0^\infty e^{-\lambda^2t}[u_{11}^{01}(\frac{\lambda}{a_1}R_0)N_0(\frac{\lambda}{a_1}r)-u_{11}^{02}(\frac{\lambda}{a_1}R_0)J_0(\frac{\lambda}{a_1}r)]\frac{d\lambda}{\lambda[\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)]};$$

$$W_{12}(t,r)=\frac{4\lambda_1}{\pi^2R_1}\int_0^\infty e^{-\lambda^2t}\frac{w_1(\lambda)N_0(\frac{\lambda}{a_2}r)-w_2(\lambda)J_0(\frac{\lambda}{a_2}r)}{\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)}d\lambda; \qquad (14)$$

$$\square_{jk}(t,r,\rho)=\int_0^\infty e^{-\lambda^2t}\frac{V_j(t,\lambda)V_k(\rho,\lambda)}{\lambda[\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda)]}d\lambda;\ j,k=1,2. \qquad (15)$$

Згідно формул (12) при $j=1,2$ одержуємо функції

$$T_j(t,r)=\int_0^t W_{1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau+\int_{R_0}^{R_1}\mathrm{H}_{j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)\sigma_1\rho d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{\infty}\mathrm{H}_{j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)\sigma_2\rho d\rho+\int_0^t\int_{R_0}^{R_1}a_1^2\mathrm{H}_{j1}(t-\tau,r,\rho)f_1(\tau,\rho)\sigma_1\rho d\rho d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{R_1}^{\infty}a_2^2\mathrm{H}_{j2}(t-\tau,r,\rho)f_2(\tau,\rho)\sigma_2\rho d\rho d\tau,\ j=1,2. \qquad (16)$$

Якщо теплові джерела відсутні ($f_1=f_2=0$), в початковий момент часу двошаровий простір знаходився при нульовій температурі ($g_1=g_2=0$), а на поверхні порожнини здійснюється тепловий удар із скінченною швидкістю поширення температури ($\alpha_{11}^0=0$, $\beta_{11}^0=1$), то згідно формул (16) нестаціонарне температурне поле опишуть функції

$$T_1(t,r)=\int_0^t W_{11}^I(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau=\frac{T_0}{t_0}\int_0^t W_{11}^I(t-\tau,r)[(I-B_\tau^{\tau_0})(\tau S_+(\tau))]d\tau=$$

$$=\frac{T_0}{t_0}(I-B_t^{t_0})[\int_0^t W_{11}^I(\tau,r)(t-\tau)d\tau S_+(t)]=$$

$$=\frac{8\lambda_1^*\lambda_2^*T_0}{t_0\pi^3R_1^2}(I-B_t^{t_0})[\int_0^\infty\frac{\lambda^2t-1+e^{-\lambda^2t}}{\lambda^5w_{1I}(\lambda)}(J_0(\frac{\lambda}{a_1}R_0)N_0(\frac{\lambda}{a_1}r)-J_0(\frac{\lambda}{a_1}r)N_0(\frac{\lambda}{a_1}R_0))d\lambda S_+(t)]; \qquad (17)$$

$$T_2(t,r)=\frac{4\lambda_1^*T_0}{\pi^2R_1t_0}(I-B_t^{t_0})[\int_0^\infty\frac{\lambda^2t-1+e^{-\lambda^2t}}{\lambda^4w_{1I}(\lambda)}(w_{11}(\lambda)N_0(\frac{\lambda}{a_2}r)-w_{21}(\lambda)J_0(\frac{\lambda}{a_2}r))d\lambda S_+(t)];$$

$$w_{1I}(\lambda)=w_{11}^2(\lambda)+w_{21}^2(\lambda)\equiv[N_0(\frac{\lambda}{a_1}R_0)\Psi_{11}^1(\lambda)-J_0(\frac{\lambda}{a_1}R_0)\Psi_{12}^1(\lambda)]^2+$$

$$+[N_0(\frac{\lambda}{a_1}R_0)\Psi_{21}^1(\lambda)-J_0(\frac{\lambda}{a_1}R_0)\Psi_{22}^1(\lambda)]^2. \qquad (18)$$

Якщо ж на поверхні циліндричної порожнини відбувається миттєвий тепловий удар ($t_0\to 0$), то нестаціонарне температурне поле має структуру:

$$T_{11}(t,r)=T_0\frac{8\lambda_1^*\lambda_2^*T_0}{\pi^3R_1^2}\int_0^\infty\frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^3}[J_0(\frac{\lambda}{a_1}R_0)N_0(\frac{\lambda}{a_1}r)-J_0(\frac{\lambda}{a_1}r)N_0(\frac{\lambda}{a_1}R_0)][w_{11}^2(\lambda)+w_{21}^2(\lambda)]^{-1}d\lambda; \qquad (19)$$

$$T_{21}(t,r)=T_0\frac{4\lambda_1^*}{\pi^2R_1}\int_0^\infty\frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^2}\frac{w_{11}(\lambda)N_0(\frac{\lambda}{a_2}r)-J_0(\frac{\lambda}{a_2}r)w_{21}(\lambda)}{w_{11}^2(\lambda)+w_{21}^2(\lambda)}d\lambda. \qquad (20)$$

З плином часу ($t\to\infty$) нестаціонарне температурне поле, яке описується функціями (17) – (20), набуває стаціонарного стану T_0 ($T_1=T_2\equiv T_0=const$).

Список використаної літератури

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1956. – 468 с.
5. Блажевський С.Г., Ленюк М.П. Термопружний стан багатошарових симетричних тіл. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. – 130 с.