УДК 519.6

Ю.В. БРАЗАЛУК, Р.А. ШУЛЬГА
Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

В работе последовательно излагаются алгоритмы метода дискретных особенностей, основанные на прямых формулировках, приведен анализ их достоинств и недостатков, схем регуляризации и точности удовлетворения граничных условий. Дана оценка точности интегрирования. Проведено позиционирование методов дискретных особенностей и дан краткий перечень задач, для решения которых целесообразно применять рассматриваемые методы.

Ключевые слова: метод дискретных особенностей, метод дискретных вихрей, прямая формулировка, потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости, вихревое течение, потенциальное течение сжимаемой жидкости.

Ю.В. БРАЗАЛУК, Р.О. ШУЛЬГА
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРЯМІ МЕТОДИ ДИСКРЕТНИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ

У роботі послідовно викладаються алгоритми методу дискретних особливостей, що ґрунтуються на прямих формулюваннях, надано аналіз їх переваг та недоліків, схем регуляризації та точності задовольняння крайових умов. Дано оцінку точності інтегрування. Проведено позиціювання методів дискретних особливостей та надано короткий перелік задач, для розв‘язку яких доцільно застосовувати розглянуті методи.

Ключові слова: метод дискретних особливостей, метод дискретних вихорів, пряме формулювання, потенційна течія ідеальної нестисливої рідини, вихорова течія, потенційна течія стисливої рідини

IU.V. BRAZALUK, R.O. SHULHA
Oles Honchar Dnipro National University

DIRECT DISCRETE SINGULARITY METHODS

Algorithms of discrete singularity method, which are based on direct formulations, are described in details in the article. An analysis of their advantages and disadvantages, regularization schemes and accuracy of boundary condition satisfaction is presented. An estimation of integration accuracy is given. Positioning of discrete singularity method is made. And a short list of problems, for solutions of which the considered methods are desirable, is presented.

Key words: discrete singularity method, discrete vortex method, direct formulation, potential flow of ideal incompressible fluid, vortical flow, potential flow of compressible fluid

Введение

В настоящее время, несмотря не впечатляющий рост инсталлированной базы вычислительной техники и не менее стремительный рост производительности отдельных вычислительных систем, все еще существует спрос на численные методы, предназначенные для грубого, оценочного расчета. В современной вычислительной гидродинамике к таким методам традиционно относят методы дискретных особенностей, в первую очередь, метод дискретных вихрей. Не останавливаясь подробно ни на основных этапах развития данного направления, ни на эволюции идей, положенных в его основу (что отчасти будет сделано ниже), отметим только, что исторически сложилась традиция формулировать алгоритмы метода дискретных особенностей на основе граничных интегральных уравнений в непрямой постановке. Следует признать, что определенная свобода выбора интегральных представлений решения краевой задачи и возможность выбора формы дискретной особенности, свойственные непрямым формулировкам, в свое время позволили разработчикам создать весьма широкий спектр мощных вычислительных алгоритмов, относящихся к рассматриваемому подходу. Особенно это относится к методу дискретных вихрей – наиболее успешной реализации метода дискретных особенностей в непрямых формулировках. Однако все та же свобода выбора, порождающая разнообразие расчетных алгоритмов, вынуждала проводить специальный анализ используемых расчетных схем, а это делалось не всегда, особенно в рамках метода дискретных вихрей, что нередко приводило к обоснованной критике данного подхода в среде специалистов в области вычислительной гидродинамики. К сожалению, несмотря на многолетнюю историю, до настоящего времени не выработан единый канон алгоритмической реализации традиционных методов дискретных особенностей, и не развита методика тестирования соответствующего программного обеспечения, как это сделано для многих других численных методов.

Нередко негативные оценки методов дискретных особенностей и, в первую очередь, метода дискретных вихрей, являются результатом безуспешных попыток использовать указанные методы вне рамок их естественного предназначения, например, для расчета диффузионных процессов в потоке или конвективно-диффузионного переноса некоей третьей субстанции. Такие негативные оценки никоим образом нельзя считать справедливыми, поскольку они проистекают из непонимания природы и предназначения методов дискретных особенностей. Дабы избежать подобных недоразумений, следует провести позиционирование рассматриваемых методов в современной вычислительной математике.

Среди разнообразных алгоритмов метода дискретных особенностей своей историей, аргументацией и структурой выделяется метод дискретных вихрей. Основная идея этого метода вполне вписывается в общую идеологию методов дискретных особенностей и заключается в аппроксимации поля завихренности системой дискретных вихрей, которые с математической точки зрения представляют собой дискретные особенности. Однако в методе дискретных вихрей последние принято разделять на присоединенные (неподвижные) и свободные (подвижные). Для определения движения свободных вихрей рассматриваемый метод предполагает использование лагранжевой расчетной схемы. Таким образом, метод дискретных вихрей является уникальной комбинацией эйлеровых и лагранжевых подходов в вычислительной гидромеханике. Следует отметить, что метод дискретных вихрей возник как результат гидродинамических исследований, а не явился результатом работ по численным методам решения граничных интегральных уравнений, что и породило определенные проблемы с его обоснованием.

Недавно предложенный прямой метод дискретных особенностей в регулярной постановке оказался результатом исследований в областях граничных элементов и может быть истолкован как частный случай последних. Данный подход все еще находится в состоянии алгоритмической проработки. Не обладая разнообразием вариаций, свойственных классическому методу дискретных особенностей, прямой метод обоснован намного лучше классического (прежде всего, это относится к регулярному варианту метода).

Исходя из вышеизложенного, актуальность настоящего исследования определяется не только необходимостью повысить эффективность основанных на методе дискретных особенностей алгоритмов быстрого оценочного расчета, используемых в многочисленных прикладных исследованиях, но и нуждами внутреннего обоснования вычислительной теории потенциала.

Постановка проблемы

Неизбежной частью любого численного решения краевых задач, рассматриваемых в современной вычислительной математике, является аппроксимация искомого решения и, возможно, области решения, а также других функциональных параметров, которые могут входить в задачу. При этом, чем проще аппроксимация (аппроксимирующие функции и конструкции), тем легче с ними работать, но простая аппроксимация хуже отражает структуру искомого решения задачи. Различные численные подходы предлагают весьма разнообразные точки зрения на пути разрешения этой проблемы, во многом определяющей эффективность численного алгоритма. Рассматриваемый здесь метод дискретных особенностей предполагает аппроксимацию искомого решения при помощи полей дискретных сингулярностей или точечных источников – локальных объектов, размерами которых можно пренебречь по сравнению с расстояниями между ними. К счастью, для линейных задач влияние точечного источника на поле решения описывается фундаментальным решением соответствующей краевой задачи или функцией Грина той же задачи, что позволяет использовать в этом случае математический аппарат теории потенциала – хорошо известного и глубоко проработанного раздела математической физики. Таким образом, рассматриваемый подход предполагает аппроксимацию искомого решения при помощи относительно простых вычислительных примитивов, а, в силу данного выше определения, число таковых будет небольшое, поскольку они должны быть удалены друг от друга на значительное расстояние. Указанные обстоятельства обеспечивают вычислительную эффективность методов дискретных особенностей. Однако не следует ожидать, что при использовании относительно небольшого числа простейших аппроксимирующих объектов удается обеспечить высокую точность численного решения. Более того, для точек, лежащих в непосредственной близости от дискретных сингулярностей, не приходится говорить не только о точности численного решения, но даже об адекватности такового. То есть, точность метода дискретных особенностей можно понимать только в некотором интегральном смысле. При таких существенных проблемах с точностью остается только удивляться популярности метода дискретных особенностей, но, на самом деле, популярность приобрел, прежде всего, метод дискретных вихрей применяемый для течений несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса, а именно для такого класса внешних течений вихревые структуры, образующиеся в потоке, близки к дискретным вихрям или допускают эффективную аппроксимацию при помощи последних.

Поскольку многочисленные попытки усовершенствовать методы дискретных особенностей, в конечном итоге, не принесли желаемого результата, представляется целесообразным попытаться изменить алгоритмическую структуру этих методов, в частности, перейти от непрямых формулировок к прямым, благодаря чему улучшить обоснованность расчетной схемы и установить более четкую связь с исходной разрешаемой краевой задачей.

Анализ последних исследований и публикаций

История методов дискретных особенностей столь длительна и многопланова, что заслуживает отдельного и весьма обширного исследования, и, конечно, не может быть изложена сколько-нибудь полно в ограниченных рамках настоящей работы. К счастью, наличие глубоких и содержательных монографий по данному вопросу [1-6] избавляет от необходимости исторического анализа классического метода дискретных особенностей. Ограничимся здесь только указанием на связь метода дискретных вихрей с проблемой движения точечных вихрей, впервые сформулированной в пионерской работе Г. Гельмгольца [7] и затем развитой большой группой выдающихся математиков, что подробно описано в монографии [8], в той же монографии, а также в обширном обзоре, содержащемся в работе [9], можно найти подробную информацию о современном состоянии вопроса. Что же касается других алгоритмов метода дискретных особенностей, то уместно вспомнить метод источников, предложенный в работе [10], который впоследствии развился в один из вариантов панельного метода.

Терминология «прямые» и «непрямые» методы является стандартной для метода граничных элементов и подробно рассматривается в соответствующих монографиях [11, 12]. Регулярные граничные интегральные уравнения теории потенциала, иногда также называемые функциональными уравнениями В.Д. Купрадзе, были предложены в монографии В.Д. Купрадзе [13] и получили некоторое распространение в методах граничных элементов, но не в методах дискретных особенностей. В работе [14] были предложены регулярные алгоритмы вычислительной теории потенциала с точкой коллокации внутри области решения, показаны преимущества этих алгоритмов по сравнению с традиционными сингулярными. В той же работе указана возможность построения регулярного прямого метода дискретных особенностей, но, поскольку основная тематика работы была связана с методом граничных элементов, идея прямого метода дискретных особенностей была изложена там конспективно и надлежащего развития не получила. Таким образом, настоящая работа представляется первой публикацией, в которой систематически излагаются вопросы, связанные с прямым методом дискретных особенностей, в первую очередь, в регулярной формулировке. Следует отметить, что попытки использовать регулярную формулировку для непрямых методов ранее уже предпринимались, смотри, например, работу [15].

Отметим, что еще одним притягательным моментом метода дискретных особенностей является его возможная связь с определенными асимптотическими моделями многофазных течений, впервые описанная в монографии [3]. Это обстоятельство побуждает рассмотрение намного более широкого спектра дискретных сингулярностей, чем предполагается традиционными алгоритмами.

Цель работы

Целью настоящей работы является систематическое изучение теоретических вопросов, связанных с регулярными и сингулярными прямыми методами дискретных особенностей, а также анализ преимуществ и недостатков этих методов.

Прямые методы дискретных особенностей

По давно установившейся традиции методов дискретных особенностей рассмотрим прямые алгоритмы на примере плоской задачи о течении идеальной жидкости – как известно [16], такое течение может быть описано либо в терминах функции тока, либо в терминах потенциала скоростей (использование комплексных потенциалов здесь рассматриваться не будет в силу специфики тематики данной работы). В терминах функции тока

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\omega, \qquad (1)$$

где ψ – функция тока, ω – завихренность, x, y – декартовы ортогональные координаты. В терминах потенциала скоростей

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=q, \qquad (2)$$

где φ – потенциал скоростей, q – некоторый источниковый член, который может иметь различную физическую природу, например, являться следствием сжимаемости жидкости. Уравнения (1) или (2) полностью описывают поставленную задачу только для случая потенциального ($\omega=0$) и несжимаемого ($q=0$) течения, когда краевые задачи для этих двух уравнений эквивалентны с физической точки зрения. В противном случае уравнение (1) или (2) нуждаются в дополнительных соотношениях, например, уравнение (1) должно быть дополнено уравнением переноса завихренности

$$\frac{\partial w}{\partial \tau}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}=0, \qquad (3)$$

где u, v – компоненты вектора скорости. Для уравнения (2) дополнительные соотношения связанные с физической природой величины q, например, если q порождено сжимаемой жидкостью, то в стационарном случае уравнение (2) должно быть дополнено соответствующим интегралом Бернулли [16]. Кроме того, рассматриваемые уравнения для полноты постановки соответствующих краевых задач, нуждаются в граничных, а для нестационарного случая и в начальных условиях, которые подробно обсуждаются в книге [16].

Классическая теория потенциала [11, 12] ставит в соответствие уравнению Пуассона, а именно к этому классу относятся уравнения (1) и (2), следующие интегральные соотношения:

$$\chi(x_0, y_0)\, u(x_0, y_0) = \int_\Gamma g(x, x_0, y, y_0) \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) dS(x, y) - \int_\Gamma u(x, y) \frac{\partial g(x, x_0, y, y_0)}{\partial n(x, y)} dS(x, y) + \\ + \iint_D g(x, x_0, y, y_0) f(x, y) dx dy, \tag{4}$$

где u – искомые функции, совпадающие в данном случае либо с ψ, либо с φ, f – правая часть уравнения Пуассона, совпадающая в данном случае либо с ω, либо с q, D – область решения, Γ – ее граница; χ определяется как

$$\chi(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, \ (x_0, y_0) \in D; \\ 1/2, \ (x_0, y_0) \in \Gamma; \\ 0, \ (x_0, y_0) \notin D; (x_0, y_0) \notin \Gamma, \end{cases} \tag{5}$$

g – фундаментальное решение уравнения Лапласа в плоском случае

$$g(x, x_0, y, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}. \tag{6}$$

Не составляет особого труда показать, что, если исходная задача имеет единственное решение, и граничные интегральные уравнения (4) также имеют единственное решение, то эти решения совпадают.

Следуя стандартной процедуре методов вычислительной теории потенциала, разобьем границу области решения Γ некоторым образом на достаточно малые части (обычно такие малые части называют граничными элементами, но здесь этот термин использоваться не будет, дабы избежать терминологической путаницы), а саму область течения D – на достаточно малые части D_j (которые удобно назвать конечными элементами, но и этот термин использовать не будем в силу аналогичных соображений). Интегралы по соответствующим многообразиям в (4) очевидно можно представить в виде сумм по их составным частям. Полагая, что точка коллокации (x_0, y_0) лежит вне i-го участка интегрирования, разложим в ряд Тейлора ядра потенциалов простого и двойного слоя в окрестности точки (x_i, y_i), в качестве которой выберем середину участка интегрирования и которую в дальнейшем будем называть точкой наблюдения, тогда в локальной системе координат ξ, отсчитываемой от точки (x_i, y_i) получим

$$\int_{\Gamma_i} g(x, x_0, y, y_0) \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) dS(x, y) = \int_{\Gamma_i} \left(g(x_i, x_0, y_i, y_0) + \xi \frac{\partial g}{\partial \xi}(x_i, x_0, y_i, y_0) + \right. \\ \left. + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}(x_i, x_0, y_i, y_0) + \ldots \right) \frac{\partial u}{\partial n}(\xi) h_i(\xi) d\xi = \\ = g(x_i, x_0, y_i, y_0) \int_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n}(\xi) h_i(\xi) d\xi + \frac{\partial g}{\partial \xi}(x_i, x_0, y_i, y_0) \int_{\Gamma_i} \xi \frac{\partial u}{\partial n}(\xi) h_i(\xi) d\xi + \\ + \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}(x_i, x_0, y_i, y_0) \int_{\Gamma_i} \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial u}{\partial n}(\xi) h_i(\xi) d\xi + \ldots \quad , \tag{7}$$

$$\int_{\Gamma_i} u(x,y)\frac{\partial g(x,x_0,y,y_0)}{\partial n(x,y)}dS(x,y) = \int_{\Gamma_i}\left(\frac{\partial g}{\partial n}(x_i,x_0,y_i,y_0)+\xi\frac{\partial^2 g}{\partial\xi\partial n}(x_i,x_0,y_i,y_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{\xi^2}{2}\frac{\partial^3 g}{\partial\xi^2\partial n}(x_i,x_0,y_i,y_0)+\ldots\right)u(\xi)h_i(\xi)d\xi =$$
$$=\frac{\partial g}{\partial n}(x_i,x_0,y_i,y_0)\int_{\Gamma_i}u(\xi)h_i(\xi)d\xi+\frac{\partial^2 g}{\partial\xi\partial n}(x_i,x_0,y_i,y_0)\int_{\Gamma_i}\xi u(\xi)h_i(\xi)d\xi+ \tag{8}$$
$$+\frac{\partial^3 g}{\partial\xi^2\partial n}(x_i,x_0,y_i,y_0)\int_{\Gamma_i}\frac{\xi^2}{2}u(\xi)h_i(\xi)d\xi,$$

где $h_i(\xi)$ – функция формы кривой $h_i(\xi)=\left.\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2}\right|_{\Gamma_i}$. Первые слагаемые в правых частях (7) и (8) представляют собой дискретные особенности, следующие – особенности высших порядков сингулярности, которые быстро затухают при удалении точки (x_0,y_0) от точки (x_i,y_i). Кроме того, следует учесть, что порядки интегралов при высших сингулярностях соответственно $(\Delta S_i)^2,(\Delta S_i)^3$ и так далее, соответственно, где ΔS_i – длина $i-$го участка.

Замечание. Если в ряд разложить не одно ядро, а всю подынтегральную функцию в правой части (7) или (8), то аналоги формул (7) и (8) будут иметь вид

$$\int_{\Gamma_i} g(x,x_0,y,y_0)\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)dS(x,y) = g(x_i,x_0,y_i,y_0)\frac{\partial u}{\partial n}(x_i,y_i)h_i(x_i,y_i)\Delta S_i+$$
$$+\left(\frac{\partial g}{\partial\xi}(x_i,x_0,y_i,y_0)\frac{\partial u}{\partial n}(x_i,y_i)h_i(x_i,y_i)+g(x_i,x_0,y_i,y_0)\frac{\partial^2 u}{\partial n\partial\xi}(x_i,y_i)h_i(x_i,y_i)+\right. \tag{9}$$
$$\left.+g(x_i,x_0,y_i,y_0)\frac{\partial u}{\partial n}(x_i,y_i)\frac{\partial h_i}{\partial\xi}(x_i,y_i)\right)\int_{\Gamma_i}\xi\,d\xi+\ldots,$$

$$\int_{\Gamma_i} u(x,y)\frac{\partial g(x,x_0,y,y_0)}{\partial n(x,y)}dS(x,y) = \frac{\partial g}{\partial n}(x_i,x_0,y_i,y_0)u(x_i,y_i)h_i(x_i,y_i)\Delta S_i+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial n\partial\xi}(x_i,x_0,y_i,y_0)u(x_i,y_i)h_i(x_i,y_i)+\frac{\partial g}{\partial n}(x_i,x_0,y_i,y_0)\frac{\partial u}{\partial\xi}(x_i,y_i)h_i(x_i,y_i)+\right. \tag{10}$$
$$\left.+\frac{\partial g}{\partial n}(x_i,x_0,y_i,y_0)u(x_i,y_i)\frac{\partial h_i}{\partial\xi}(x_i,y_i)\right)\int_{\Gamma_i}\xi\,d\xi+\ldots\quad,$$

и так далее. При этом очевидно, что если (x_i,y_i) середина $i-$го участка, то $\int_{\Gamma_i}\xi\,d\xi=0$, то есть, представления (9), (10) при учете только первой особенности в правой части оказывается точнее, чем (7), (8). Однако с физической точки зрения представления (7), (8) являются более корректными, поскольку нет никакой гарантии, что

$$u(x_i,y_i)h_i(x_i,y_i)\Delta S_i = \int_{\Gamma_i}u(\xi)h_i(\xi)d\xi, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_i,y_i)h_i(x_i,y_i)\Delta S_i = \int_{\Gamma_i}\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)h_i(\xi)d\xi, \tag{12}$$

то есть, что среднее значение функций $u,\frac{\partial u}{\partial n},h_i$ достигается в точке (x_i,y_i). В противном же случае аппроксимации (9), (10) могут не сохранять некоторые интегральные характеристики исходной задачи, например, для дискретных вихрей не обеспечивать сохранение циркуляции. Однако это противоречие, скорее, кажущееся. Действительно, если плотность потенциала неизвестна, то коэффициент при дискретной сингулярности подлежит определенно из решения задачи, то есть, процедура решения не меняется, а вопрос о том, как трактовать полученное значение имеет, в основном, терминологический смысл. Если плотность потенциала известна, то речь идет о криволинейном интеграле от известных функций по известной кривой, которой, вообще говоря, в аппроксимациях (7) - (10) не передается, а может быть вычислен при помощи известных приемов численного определения интегралов с любой практически необходимой точностью. Поэтому теоретическая оценка точности аппроксимации в данном случае существенной роли не играет.

Аналогичным образом рассмотрим и последний интеграл в (4) в плоской системе координат (ξ,η)

$$\iint\limits_{D_i} g(x_i,x_0,y_i,y_0)f(x,y)dxdy = g(x_i,x_0,y_i,y_0)\iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy +$$
$$+\left(\frac{\partial g}{\partial \xi}(x_i,x_0,y_i,y_0)\iint\limits_{D_i}\xi\, f(\xi,\eta)d\xi d\eta + \frac{\partial g}{\partial \eta}(x_i,x_0,y_i,y_0)\iint\limits_{D_i}\eta\, f(\xi,\eta)d\xi d\eta\right)+\ldots \quad . \tag{13}$$

Вместо соотношения (13) могут быть использованы формулы, полученные разложением в ряд всего подинтегрального выражения. При этом в первом случае точку (x_i,y_i) следует выбирать так, чтобы

$$\iint\limits_{D_i}\xi\, f(\xi,\eta)d\xi d\eta = 0,\ \iint\limits_{D_i}\eta\, f(\xi,\eta)d\xi d\eta = 0 \quad , \tag{14}$$

а во втором

$$\iint\limits_{D_i}\xi\, d\xi d\eta = 0,\ \iint\limits_{D_i}\eta\, d\xi d\eta = 0 \quad , \tag{15}$$

то есть, печь идет о своеобразном «центре масс». К сожалению, такой выбор точки (x_i,y_i) не всегда возможно осуществить, но он обеспечивает четвертый порядок точности предложенных аппроксимаций.

В целом, следует отметить высокий порядок аппроксимаций, не свойственный, например, методам конечных разностей или конечных элементов. Это обстоятельство является прямым следствием интегральной природы методов вычислительной теории потенциала.

Рассмотрим теперь проблему расчетов вблизи сингулярностей, получившихся при отбрасывании в правых частях соотношений (7) - (10), (13) всех членов, кроме первых. Именно такая практика свойственна, прежде всего, для метода дискретных вихрей. Однако отметим, что в методе дискретных вихрей поле распределенной в потоке завихренности изначально в силу физических соображений, представляется в виде подобной системы дискретных особенностей, а система присоединенных вихрей в методе дискретных вихрей в силу несколько иных, но тоже физических соображений моделируется первыми слагаемым в правых частях (7) или (9). Это еще раз показывает, что дискретные вихри не являются самостоятельной физической, и соответственно, математической моделью, а должны рассматриваться как частный случай аппроксимации граничных интегральных представлений теории потенциала, полученных для задач движения идеальной несжимаемой жидкости. Нефизично большие скорости жидкости, рассчитываемые вблизи дискретных сингулярностей, традиционно считаются одним из наиболее существенных недостатков этих методов. Однако, если речь идет о дискретных вихрях в идеальной несжимаемой жидкости, которые «вморожены» в жидкие частицы, то в этом случае нет механизма сближения дискретных вихрей, то есть, подобные сближения просто не представляют собой угрозы, если они не заложены изначально. В общем случае теория метода дискретных вихрей предлагает использование регуляризации, то есть, замену сингулярности поля скоростей в окрестностях дискретных вихрей на некоторое регулярное распределение скорости. К сожалению, в подавляющем большинстве алгоритмов регуляризации не удалось оценить дополнительную погрешность, например, специфические изменения схемной вязкости, присущей этим алгоритмам. Хотя возможно, что регуляризация и «улучшит» расчетную схему в некотором смысле, без специальных исследований рассчитывать на это не приходится. Поясним эту мысль: в методах дискретных особенностей искомые гладкие, и как правило, ограниченные поля аппроксимируются сингулярностями, неограниченным и на конечном множестве точек, понятно, что здесь о традиционной локальной аппроксимации далее говорить не приходится. Аппроксимацию в методе дискретных особенностей следует понимать в некотором интегральном или статистическом смысле. Очевидно также, что возможно указать смысл, в котором понимается аппроксимация, таким образом, что при регуляризации аппроксимация улучшается, но насколько известно авторам, подобные исследования не проводились. С другой стороны, выше было показано, что полученная при аппроксимации дискретными особенностями формулировка является следствием исходных дифференциальных уравнений, а регуляризованная формулировка таким следствием не является, то есть, нарушаются законы сохранения, изначально заложенные в математическую модель последующего процесса. В тоже время, жидкая частица, оказавшаяся в непосредственной близости от дискретного вихря, под влиянием последнего совершает вокруг него круговое движение и, если под действием других вихрей она и изменяет радиус окружности, по которой движется, то незначительно, в результате, за конечный промежуток времени движение выглядит так, как будто жидкая частица совершает случайные блуждания около положения дискретного вихря. На другие дискретные сингулярности, а именно дискретные источники и стоки, дискретные диполи и так далее, аналогичные соображения распространяются с известными оговорками.

Что касается присоединенных вихрей, то вышеизложенные соображения относятся к ним точно в такой же степени. Одной из наибольших проблем метода дискретных особенностей в традиционной трактовке является невыполнение граничных условий на участке границы между точкой коллокации и дискретной особенностью, которое тем сильнее проявляется, чем ближе к последней. Однако в случае дискретных вихрей, если приписывать жидкой частице, находящейся в непосредственной близости от вихря, не линейную, а окружную скорость, то есть в силу вышесказанного, приписывать ей случайные блуждания около вихря, то проблема невыполнения граничных условий, хотя и не будет разрешена полностью, но во многом утратит свою остроту. Аналогичное рассуждение можно развить и для метода поверхностных источников. Рассмотрим теперь вопрос об оптимальном выборе положений точек коллокации, то есть, вопрос о предпочтении регулярного или сингулярного алгоритма дискретных особенностей. Следует отметить, что метод дискретных вихрей в традиционной формулировке, предложенной С.М. Белоцерковским, уже является регуляризованным из физических соображений, однако, соотношения (4) позволяют строить и сингулярные варианты этого метода. Однако, по мнению авторов настоящей работы, регулярные алгоритмы предпочтительнее. Действительно, введем в точке наблюдения (x_i, y_i) ось η, перпендикулярную оси ξ, то есть, коллинеарную нормали $\vec{n}$, и сместим точку коллокации (x_0, y_0) внутрь области решения вдоль оси η на расстояние η_0 от точки (x_i, y_i). Из разложения искомой функции u по координате η в ряд Тейлора (сохранив первые два члена ряда) получим

$$u(x_0, y_0) = u(x_i, y_i) \pm h_0 \frac{\partial u}{\partial n}(Y_i, y_i), \tag{16}$$

где знак $\pm$ использован, поскольку изначально о направлении нормали ничего не было сказано. Подставив (16) в левую часть соотношения (4) при $\chi = 1$, получим приближенное регулярное граничное интегральное уравнение второго рода. Применение к полученному интегральному уравнению метода дискретных особенностей совершенно очевидно и никаких сложностей не представляет.

Отметим, что в точке коллокации (x_0, y_0), расположенной внутри области решения, то есть, при $\chi = 1$, соотношение (4) можно почленно дифференцировать сколь угодно большое число раз по x_0 или y_0 как по параметрам:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^{k+m} u}{\partial x_0^k \partial y_0^m} = \int\limits_\Gamma \frac{\partial^{k+m} g}{\partial x_0^k \partial g_0^m}(x, x_0, y, y_0) \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) dS(x, y) - \int\limits_\Gamma u(x, y) \frac{\partial^{k+m+1} u(x, x_0, y, y_0)}{\partial n(x, y) \partial x_0^k \partial y_0^m} dS(x, y) + \\ + \iint\limits_D \frac{\partial^{k+m} g}{\partial x_0^k \partial y_0^m}(x, x_0, y, y_0) f(x, y) dx dy,\end{gathered} \tag{17}$$

при этом соотношения (17) будут справедливы, пока последний интеграл в правой части будет сходящимся в некотором смысле (правда, уже существуют преобразования, позволяющие решить проблему сходимости этого интеграла), а при $f = 0$, правая часть (17) будет сходится всегда. Обозначив правую часть (4) через Φ, а через η' направление, противоположное η, заменим значения граничных функций $u(x_i, y_i)$ и $\frac{\partial u}{dn}(x_i, y_i)$ при помощи разложения в ряд Тейлора в окрестности точки коллокации (x_0, y_0):

$$u(x_i, y_i) = u(x_0, y_0) + \eta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta'}(x_0, y_0) + \frac{\eta_0}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta'^2}(x_0, y_0) + \ldots, \tag{18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_i, y_i) = \frac{\partial u}{\partial n}(x_0, y_0) + \eta_0 \frac{\partial}{\partial \eta'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)(x_0, y_0) + \frac{\eta_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta'^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)(x_0, y_0) + \ldots, \tag{19}$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0, y_0)$ может быть получено дифференцированием соотношения (4) по η или по η' в зависимости от направления нормали n. При помощи соотношений (18), (19) постановка задачи может быть уточнена, однако это предполагает весьма громоздкую процедуру, что противоречит общей идеологии метода дискретных особенностей.

Анализ полученных результатов

Ограниченные рамки настоящей работы не позволяют привести результаты численного расчета тестовой задачи в числовом или графическом представлении, поэтому довольствуемся здесь количественным анализом этих результатов. При тестировании использовалась методика тестирования и тестовые задачи из работы [17]. Сравнение численных решений тестовых задач с их же аналитическим решениями в квадратурах дали следующие результаты: переход от непрямой к прямой формулировке уменьшает погрешность численного решения на 12-18% в зависимости от конкретной задачи и формы области решения. Более точное определение граничных интегралов, содержащих известные функции, улучшает точность еще на 5-9%. При этом время счета возрастает на 18-25%.

Выводы

На основании вышеизложенного можно заключить, что применение прямых формулировок в методе дискретных особенностей вполне допустимо и имеет преимущества с точки зрения точности численного решения. При этом регулярная формулировка с точками коллокации внутри области решения представляется более перспективной. Тем не менее, эти усовершенствования не устраняют известные недостатки методов дискретных особенностей – сингулярного аппроксимирующего поля и, как следствие, нефизично больших скоростей вблизи сингулярностей, а также невыполнение граничных условий вблизи присоединенных особенностей, хотя и в этом направлении в настоящей статье достигнут определенный прогресс. Несмотря на улучшение точности численного решения, предложенные алгоритмы все еще существенно уступают по точности методу граничных элементов, но проще и быстрее его.

Очевидным продолжением настоящей работы является широкое тестирование предложенных алгоритмов и их использование в прикладных расчетах. К сожалению, нелокальный характер аппроксимаций в методах дискретных особенностей не позволяет применять их совместно с методами локальной аппроксимации, например, методами конечных элементов и конечных разностей. Остается только сожалеть по поводу многочисленных подобных попыток и удивляться сообщению об их успехах.

Список использованной литературы

1. Белоцерковский С.М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью / С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ // – М.: Наука, 1978. –352 с.

2. Белоцерковский С. М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С. М. Белоцерковский, В. Н. Котовский, М. И. Ништ, П. М. Федоров // – М.: Наука, 1988. – 309 с.

3. Белоцерковский С. М. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей / С.М. Белоцерковский, А.С. Гиневский // – М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература», 1995. – 368 с.

4. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов // – М.: Наука, 1985. – 256 с..

5. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И.К. Лифанов // – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.

6. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Ю.В. Гандель // – Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2000. – 90 с.

7. Helmholtz H. Uber Integrale hydroddynamischen Glelchungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine. angew. Math. – 1858. 55. – S. 25-55.

8. Мелешко В.В. Динамика вихревых структур / В.В. Мелешко, М.Ю. Константинов // – К.: Наукова думка, 1993. – 269 с.

9. Борисов А. В. Математические методы динамики вихревых структур / А. В. Борисов, И. С. Мамаев // В кн.: Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей / Под ред. А.В.Борисова, И.С.Мамаева, М. А. Соколовского. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – с. 2 - 201.

10. Hess J.L. Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies / Hess J.L., Smith A.M.O. // Progress in Aeronautical Sciences, Vol.8, Pergamon Press, London, 1967. – p. 1-131.

11. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел // – М.: Мир, 1987. – 524 с.

12. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд // – М.: Мир, 1984. – 494 с.

13. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости / В.Д. Купрадзе // – М.: Физматгиз, 1963. – 525 с.

14. Евдокимов, Д.В. Разработка прямых регулярных алгоритмов вычислительной теории потенциала с точками коллокации внутри области решения / Д.В. Евдокимов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 2015, №2/7 (74). – С. 16-25.

15. Гуржий А.А. Адаптация метода дискретных особенностей к задачам переноса поверхностных загрязнений морскими течениями / А.А. Гуржий, Д.И Черний, В.В. Процан // Труды XVIII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» / – Харьков, 2017. – с. 82 - 85.

16. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика. / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе // – М.: Физматгиз, 1965. – Т. 1. – 758 с., Т. 2. – 772 с.

17. Евдокимов Д. В. Особенности применения комбинированного метода граничных элементов и дискретных вихрей для решения плоских внешних задач гидродинамики / Д. В. Евдокимов, Э. К. Бевза // Труды Х Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» - Херсон, 2001 – с. 51-55.