УДК 539.3

В.О. ВАХНЕНКО
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ, Україна
Е.Дж. ПАРКЕС
Департамент математики та статистики, Страсклайдський університет, Глазго, Великобританія

ПРОСТИЙ ПОЛЮС ТА ПОЛЮС ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ДИСКРЕТНОМУ СПЕКТРІ ДЛЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ

Для дискретної частини спектральних даних у методі оберненої задачі розсіяння враховані двократні полюси та простий полюс. Обсяг застосування запропонованих спектральних даних демонструється через аналіз рівняння Вахненка-Паркеса, що дозволило отримати нові розв'язки. Цей підхід може бути використаний для інших інтегрованих нелінійних рівнянь.

Ключові слова: Обернена задача розсіяння, спектральні дані, двократні полюси.

В.А. ВАХНЕНКО
Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, Киев, Украина
Е.Дж. ПАРКЕС
Департамент математики и статистики, Страсклайдский университет, Глазго, Великобритания

ПРОСТОЙ ПОЛЮС И ПОЛЮС ВТОРОГО ПОРЯДКА В ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Для дискретной части спектральных данных в методе обратной задачи рассеяния учтены двукратные полюса и простой полюс. Область применения предложенных спектральных данных демонстрируется посредством анализа уравнения Вахненко-Паркеса, что позволило получить новые решения. Этот подход может быть применен к другим интегрируемым нелинейным уравнениям.

Ключевые слова: Обратная задача рассеяния, спектральные данные, двукратные полюса.

V.O. VAKHNENKO
Subbotin Institute of Geophysics, Kyïv , Ukraine
E.J. PARKES
Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Glasgow, UK

A SINGLE POLE AND THE TWO-MULTIPLE POLES IN THE DISCRETE SPECTRUM FOR INVERSE SCATTERING PROBLEM

For the discrete part of the spectral data in the inverse scattering transform method, the two-multiple poles with a single pole are taken into account. The scope for the suggested spectral data is demonstrated through the analysis of the Vakhnenko-Parkes equation that allows new solutions to be obtained. This approach can be applied to other integrable nonlinear equations.

Keywords: Inverse problem, spectral data, two-multiple poles.

Постановка проблеми

Низка задач, що досліджуються в різноманітних галузях фізики: оптиці, гідродинаміці, фізиці плазми [1–4], приводить до рівняння Вахненка-Паркеса (the Vakhnenko-Parkes equation (*VPE*)) [5–7]:

$$W_{XXT} + (1 + W_T) W_X = 0. \qquad (1)$$

Якщо рівняння *VPE* (1) спочатку викликáло інтерес з точки зору математичної фізики як одне з рівнянь, що інтегруються, то зараз воно використовується також для опису фізичних явищ, зокрема, гранично коротких електромагнітних імпульсів [2], високочастотних збурень у релаксивному середовищі [3, 4], магнітних солітонів [4].

Рівняння (1) пов'язане взаємнооберненим перетворенням з рівнянням Вахненка (the Vakhnenko equation (*VE*)) [8]:

$$(u_t + u u_x)_x + u = 0. \qquad (2)$$

Детальний опис властивостей рівняння *VPE* (1) можна знайти в огляді [7]. Подальший розвиток у вивченні рівняння *VPE* пов'язаний із дослідженням двократних полюсів у методі оберненої задачі розсіяння (ОЗР) [10]. Запропонований нами підхід [10] суттєво розширює стандартну процедуру ОЗР, в якій розглянуті тільки прості полюси. Такий підхід може бути з успіхом використаний і для інших інтегрованих рівнянь.

Мета роботи полягає у вивченні взаємодії солітона зі збуреннями, що відповідають полюсам другого порядку в спектрі для ОЗР.

Викладення основного матеріалу дослідження

Ми виходимо з того, що для рівняння (1) відома пара Лакса:

$$\psi_{XXX} + W_X \psi_X - \lambda\psi = 0\,, \quad 3\psi_{XT} + (1+W_T)\psi + \mu\psi_X = 0\,. \tag{3}$$

Тут $W = 6(\ln f)_X$, $\psi = f'/f$. Сумісність рівнянь у парі Лакса з необхідністю породжує початкове нелінійне рівняння. Перше рівняння з пари Лакса (3) визначає спектральні дані при заданих початкових умовах. За еволюцію спектральних даних відповідає друге рівняння (3), а така функціональна залежність виявляється досить простою. Часто вважається, що коли пара Лакса отримана, тобто доведена інтегрованість, то рівняння може бути розв'язане методом оберненої задачі розсіяння.

Ключовий момент у методі оберненої задачі розсіяння полягає в дослідженні спектрального рівняння (3), оскільки спектр (величина λ), як відомо з [5], зберігається. Розв'язок спектрального лінійного рівняння (3) знайшов Каудрей [11] у вигляді функцій Йоста $\phi_j(X,\zeta)$ через $\Phi_j(X,\zeta) = \exp\{-\lambda_j(\zeta)X\}\,\phi_j(X,\zeta)$, $\lambda_j(\zeta) = \omega_j\zeta$, $\lambda_j^3(\zeta) = \lambda$, $\omega_j = e^{2\pi i(j-1)/3}$. Комплексна площина ζ розбивається на декілька областей таких, всередині яких знак числа $\mathrm{Re}(\lambda_j(\zeta))$ сталий (див. рис. 1 у [10]). Функція Йоста $\phi_j(X,\zeta)$ регулярна на площині ζ , за виключенням полюсів і меж між виділеними областями (рис. 1 у [10]). Всередині окремої області розв'язок спектрального рівняння (3) підпорядковується співвідношенню (2.12) з [11]. Це – пряма спектральна задача.

Ми будемо вважати, що спектральні дані відомі та зосередимося на реконструкції розв'язку W нелінійного рівняння, тобто ми розглядаємо тільки обернену спектральну задачу. Інформація про сингулярність функцій Йоста $\boldsymbol{\varphi}_j(X,\zeta)$ утримується в спектральних даних.

Прості полюси. Розпочинаючи з простих полюсів, ми використаємо добре відомі співвідношення з [11] для того, щоб порівняти з новими результатами для кратних полюсів, зокрема, для двократних полюсів. Як доведено в [11] лишок простого полюса може бути вирахуваний так:

$$\mathrm{Res}\ \boldsymbol{\varphi}_i(X,\zeta_i^{(k)}) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \gamma_{ij}^{(k)}\ \boldsymbol{\varphi}_j(X,\zeta_i^{(k)}). \tag{4}$$

Величини $\zeta_i^{(k)}$ і $\gamma_{ij}^{(k)}$ визначають дискретну частину спектральних даних у випадку простих полюсів.

Заключним кроком у методі ОЗР є реконструкція розв'язку $W(X,T)$ зі спектральних даних. Каудрей довів, що для простих полюсів спектральні дані визначають $\Phi_1(X,\zeta)$ однозначно у вигляді (див. співвідношення (6.20) у [11]):

$$\Phi_1(X,T;\zeta) = 1 - \sum_{j=2}^{3} \gamma_{1j}^{(k)}(T)\frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta_1^{(k)})]X\}}{\lambda_1(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta)}, \tag{5}$$

Рівняння (5) утримує спектральні дані, а саме, K простих полюсів з величинами $\gamma_{1j}^{(k)}$ для спектра зв'язаних станів.

З придатним вибором величини ζ ліва сторона в (5) може бути $\Phi_1(X,T;\omega_j\zeta_1^{(k)})$, що веде до системи лінійних рівнянь для невідомих $\Phi_1(X,T;\omega_j\zeta_1^{(k)})$ [10]. Розв'язок системи цих рівнянь дає можливість визначити $\Phi_1(X,T;\zeta)$ з (5). Знаючи $\Phi_1(X,T;\zeta)$ та враховуючи екстра інформацію, а саме, вид розвинутої функції $\Phi_1(X,T;\zeta)$ в асимптотичний ряд за $\lambda_1^{-1}(\zeta)$, знаходимо зв'язок з розв'язком $W(X,T)$ [7]

$$\Phi_1(X,T;\zeta) = 1 - \frac{1}{3\lambda_1(\zeta)}\big[W(X,T) - W(-\infty)\big] + O(\lambda_1^{-2}(\zeta)). \tag{6}$$

Отже, розв'язок $W(X,T)$ вдається реконструювати зі спектральних даних.

Двократні полюси. Для простих полюсів справедлива формула (5). Зараз знімаємо обмеження щодо простих полюсів та врахуємо двічі вироджені полюси для дискретної частини спектральних даних [10]. Для цього розглянемо додаткове рівняння до спектрального рівняння (3):

$$\chi_{XXX} + W_{\zeta X}\psi_X + W_X\chi_X - \zeta^3\chi - 3\zeta^2\psi = 0. \tag{7}$$

Для $\chi = \psi_\zeta$ рівняння (7) випливає з (3) після диференціювання його за ζ. Зручно спектральний параметр λ подати як: $\lambda = \zeta^3$.

Детальний аналіз системи рівнянь (3), (7), який викладено в [10], приводить до розв'язку через функції Йоста:

$$\begin{aligned}\Phi_1(X;\zeta) &= 1 - \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{3}\left\{\gamma_{1j}^{(k)}\frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta_1^{(k)})]X\}}{\lambda_1(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta)}.\Phi_1(X;\omega_j\zeta_1^{(k)})\right.\\ &\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta_1^{(k)}}\left[\gamma_{1j+3}^{(k)}\frac{\exp\{[\lambda_j(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta_1^{(k)})]X\}}{\lambda_1(\zeta_1^{(k)}) - \lambda_1(\zeta)}..\Phi_1(X;\omega_j\zeta_1^{(k)})\right]\right\},\end{aligned} \tag{8}$$

де полюси $\zeta_1^{(k)}$ ($k = 1,2$) – двократно вироджені. Крім того, у співвідношенні (8) утримуються спектральні дані $\gamma_{1j}^{(k)}$ з $j = 1\ldots6$. Зручно позначити величини h_k через співвідношення $\gamma_{1j+3}^{(k)} = \frac{1}{2}h_k\gamma_{1j}^{(k)}$, щоб узгодити (8) зі співвідношеннями (3.14), (5.1) з [11].

Як було доведено в [5, 12] полюси з'являються парами:

$$\zeta_1^{(1)} = \mathrm{i}\omega_2\xi_1, \quad \zeta_1^{(2)} = -\mathrm{i}\omega_3\xi_1, \tag{9}$$

де ξ_1 – дійсна стала. Більш того, $\omega_2\gamma_{12}^{(1)} = \gamma_{13}^{(2)}$. Обмежимося однією парою двократних полюсів. З (9) ясно, що $h_1 = \mathrm{i}\omega_2 h,\ h_2 = -\mathrm{i}\omega_3 h,$ де h – дійсна стала.

Тут необхідно відмітити, що часова еволюція спектральних даних для двократних полюсів більш складна, ніж для простих полюсів і з'являється у вигляді [10]:

$$\xi_1 = \mathrm{const}, \quad h = \mathrm{const}, \quad \gamma_{1j}^{(k)}(T) = \gamma_{1j}^{(k)}(0)\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{T}{\xi_1}\right). \tag{10}$$

Співвідношення (8) спільно з (6) дають

$$W(X,T) - W(-\infty) = 3\frac{\partial}{\partial X}\ln(\det\mathbf{M}(X,T)), \tag{11}$$

де $\det\mathbf{M}(X,T)$ – детермінант деякої матриці $\mathbf{M}(X,T)$, явний вид якої можна знайти в [10]. Метод підрахунку детермінанта викладено в [10]. Ми наводимо його значення через допоміжну функцію $F_{2p}(X,T) = \sqrt{\det\mathbf{M}(X,T)}$. Індекс $2p$ відносить функцію до двократного полюса:

$$F_{2p}(X,T) = 1 + \left[s_2 + r_2\left(X + \frac{T}{3\xi_1^2}\right)\right]\exp(\theta_2) + p_2\exp(2\theta_2), \tag{12}$$

$$s_2 = c_2\left(1 + \frac{h}{2\xi_1}\right), \quad r_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}hc_2, \quad p_2 = -\frac{h^2c_2^2}{3\cdot2^4\xi_1^2}, \quad c_2 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{3}\xi_1}, \quad \theta_2 = \sqrt{3}\xi_1 X - \frac{T}{\sqrt{3}\xi_1}.$$

Сталі ξ_1, h – дійсні. Існує одна довільна стала β_1. Вона повинна бути дійсна для дійсних розв'язків.

Оскільки $p_2 < 0$ для довільної дійсної β_1, тому маємо $\lim\limits_{X\to-\infty} F = 1$, а також $\lim\limits_{X\to+\infty} F = -\infty$, значить існує X_r таке, що $F(X_r) = 0$. Отже, дійсний розв'язок (11) з (12) є сингулярним. Якщо визначити величину β_1 як уявну, то розв'язки будуть гладкі, але комплексні. Вибір дійсних розв'язків з комплексних є відкритою задачею.

Двократний та простий полюси. Зараз розглянемо взаємодію солітона з хвилею, що асоціюється з двократним полюсом. Вважаємо, що солітону відповідає простий полюс з ξ_3. Солітон характеризується тоді величинами $c_3 = \frac{\beta_3}{2\sqrt{3}\xi_3}$, $\theta_3 = \sqrt{3}\xi_3 X - \frac{T}{\sqrt{3}\xi_3}$.

Для зручності перепишемо (12) у вигляді:

$$F_{2p}(X,T) = 1 + c_2(1+gh)\exp(\theta_2) + p_2\exp(2\theta_2), \qquad g = \frac{1}{2\xi_1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(X + \frac{T}{3\xi_1^2}\right). \tag{13}$$

Доповнюючи це збурення (13) солітоном, можна отримати розв'язок:

$$W(X,T) - W(-\infty) = 6\frac{\partial}{\partial X}\ln(F_{2ps}(X,T)) \tag{14}$$

через допоміжну функцію:

$$\begin{aligned} F_{2ps}(X,T) = \; & 1 + c_2(1+gh)\exp(\theta_2) + c_3\exp(\theta_3) + p_2\exp(2\theta_2) \\ & + b_{13}[1+(g+g_3)h]c_2c_3\exp(\theta_2)\exp(\theta_3) + p_2 b_{13}^2 c_3\exp(2\theta_2)\exp(\theta_3), \end{aligned} \tag{15}$$

де

$$g_3 = -\frac{1}{2\xi_3}\frac{b_{13p}}{b_{13}}, \quad b_{13} = \frac{(y-1)^3}{(y+1)^3}\frac{y^3+1}{y^3-1}, \quad y = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad b_{13p} = \frac{db_{13}}{dy}.$$

Таким чином, ми отримали розв'язок, що асоціюється з простим полюсом (солітон) та двократним полюсом у дискретному спектрі для оберненої задачі розсіяння.

Висновки

Для дискретної частини спектральних даних у методі оберненої задачі розсіяння враховані двократні полюси та простий полюс. Цей підхід може бути використаний для інших інтегрованих нелінійних рівнянь.

Список використаної літератури

1. Kraenkel, R.A. An integrable evolution equation for surface waves in deep water / R.A. Kraenkel, H. Leblond, M.A. Manna // J. Phys. A: Math. Theor. – 2014. – V. 47, № 2. – 025208 (17pp).
2. Сазонов, С.В. Нелинейное распространение векторных предельно коротких импульсов в среде симметричных и несимметричных молекул / С.В. Сазонов, Н.В. Устинов // ЖЭТФ. – 2017. – Т. 151, Вып. 2. – С. 249–269.
3. Vakhnenko, V.O. High frequency soliton-like waves in a relaxing medium / V.O. Vakhnenko // J. Math. Phys. – 1999. – V.40, N 3. – PP. 2011 – 2020.
4. Kuetche, V.K. Inhomogeneous exchange within ferrites: Magnetic solitons and their interactions / V.K. Kuetche // J. Magnetism Magnetic Materials. – 2016. – V.398. – PP. 70–81.
5. Vakhnenko, V.O. The calculation of multisoliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2002. – V.13, № 9. – PP. 1819 – 1826.
6. Ye, Y. New coherent structures of the Vakhnenko-Parkes equation / Y. Ye, J. Song, S. Shen, Y. Di // Results in Physics. – 2012. – V.2. – PP. 170–174.
7. Vakhnenko, V.O. Approach in theory of nonlinear evolution equations: the Vakhnenko-Parkes equation / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Advances in Mathematical Physics. – 2016. – V. 2016. – Article ID 2916582. – 39 p.
8. Vakhnenko, V.A. Solitons in a nonlinear model medium / V.A. Vakhnenko // J. Phys.A: Math.Gen. – 1992. – V.25. – PP. 4181–4187.
9. Roshid, H. Investigation of solitary wave solutions for Vakhnenko-Parkes equation via exp-function and -expansion method / H. Roshid, M. R. Kabir, R. C. Bhowmik, B. K. Datta // SpringerPlus – 2014. – V. 3. – 692 (10pp).
10. Vakhnenko, V.O. Inverse problem for some special spectral data / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2016. – V. 82. – PP. 116–124.
11. Caudrey, P. J. The inverse problem for a general *N*x*N* spectral equation / P.J. Caudrey // Physica D. – 1982. – V. 6. – PP. 51 – 66.
12. Vakhnenko, V.O. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2012. – V. 45, № 6. – PP. 846–852.