513.88:517.44: 539.3

Т.Г. ВОЙТИК
Одесский национальный морской университет
Г.С. ПОЛЕТАЕВ
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
С.А. ЯЦЕНКО
Национальный университет "Одесская морская академия"

РОДСТВЕННЫЕ ТИПА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА ЗАДАЧИ СО ВЗАИМНО ОБРАТНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВИЛЬНО ФАКТОРИЗУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Изучаются родственные задачам типа Римана-Гильберта-Привалова из теории аналитических функций задачи со взаимно обратными рациональными правильно факторизуемыми коэффициентами. Краевые условия задаются на сомкнутой вещественной оси. Доказана, непосредственно, теорема о разрешимости. Метод основан на результатах, установленных вторым автором для абстрактных уравнений в кольце со специальной факторизационной парой. Процедура свободна от теории интегралов типа Коши и Фурье, требования гёльдеровости функций, индекса.

Ключевые слова: задача Римана, уравнение, факторизация, кольцо, проектор, факторизационная пара.

Т.Г. ВОЙТІК
Одеський національний морський університет
Г.С. ПОЛЄТАЄВ
Одеська державна академія будівництва та архітектури
С.А. ЯЦЕНКО
Національний університет "Одеська морська академія"

СПОРІДНЕНІ ТИПУ РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА ЗАДАЧІ З ВЗАЄМНО ОБЕРНЕНИМИ РАЦІОНАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ, ЩО ПРАВИЛЬНО ФАКТОРИЗУЮТЬСЯ

Вивчаються споріднені до задач Рімана-Гільберта-Привалова із теорії аналітичних функцій задачі, що мають взаємно обернені раціональні коефіцієнти, що правильно факторизуються. Крайові умови задаються на зімкнутій дійсній осі. Доведена, безпосередньо, теорема про можливість розв'язання. Метод заснований на результатах другого автора для абстрактних рівнянь в кільці з спеціальною факторизаційною парою. Процедура вільна від теорії інтегралів типу Коші та Фур'є, вимог виконання умов гьольдеровості функції, індексу.

Ключові слова: задача Рімана, рівняння, факторизація, кільце, проектор, факторизаційна пара.

T.G. VOYTIK
Odessa National Maritime University
G.S. POLETAEV
Odessa State Academy of Buildings and Architecture
S.A. YATSENKO
National University "Odessa Maritime Academy"

RELATED OF THE TYPE RIEMANN - HILBERT - PRIVALOV PROBLEMS WITH MUTUALLY INVERSE RATIONAL CORRECTLY FACTORABLE COEFFICIENTS

We study related problems of the Riemann-Hilbert-Privalov type from the theory of analytic functions of the problems with mutually inverse rational correctly factorable coefficients. The boundary conditions are given on a closed real axis. The theorem on solvability is proved directly. The method is based on the theory, which is derived from the second author's result for corresponding of abstract equations in ring with special factorization pair of subrings. Procedure is free from the theory of Cauchy integral and Fourier integrals, Holder requirements and index.

Keywords: the Riemann problem, equation, factorization, ring, projection, factorization pair.

Постановка проблемы

Напоминая требуемые положения [1], отметим важность теории уравнений, в частности, из задачи Римана (Римана-Гильберта, Римана-Гильберта-Привалова) для аналитических функций. Эта задача возникает или используется в теоретических и прикладных разделах математики, механики, в их приложениях. В том числе, в теории упругости, задачах о кручении. Она также возникает в теории некоторых видов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, интегральных уравнений типа свёртки, при изучении соответствующих дифференциальных уравнений математической физики [1–15]. Из указанных обстоятельств вытекает актуальность поиска общих упрощающих методов исследования родственных уравнений и задач, установления условий их разрешимости, представления решений в замкнутой форме, при их существовании. В том числе, актуальность исследований задач нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейным уравнениям с рациональными взаимно обратными правильно факторизуемыми коэффициентами.

Анализ исследований и публикаций

Работа продолжает [1] и другие публикации. Существующие, точные методы исследования задачи Римана – Гильберта восходят, в частности, к работам И.И. Привалова, Ф.Д. Гахова, Ю.И. Черского, М.Г. Крейна и иным. На связь теории интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, и этой задачей, впервые, обратил внимание И.М. Рапопорт (1948). В силу отмеченного в [3] (С. 114), со ссылкой на книгу Н.И. Мусхелишвили (1945), можно заключить, что, обычно, эту задачу решали в предположении выполнения для соответствующих функций дополнительного условия Гёльдера на контуре. Использовался аппарат теории интеграла типа Коши, понятие индекса. В целом, основанные на применении теории функций комплексной переменной, аппарата теории интеграла типа Коши, подходы приводят к необходимости преодоления значительных аналитических трудностей. Не всегда оправданных. Среди работ, связанных с теорией задачи Римана-Гильберта, но посвящённых абстрактным уравнениям в ассоциативных кольцах со специальной парой подколец, а также реализациям их в конкретных кольцах, укажем [1, 9–16]. Плодотворные идеи и результаты других возможных подходов к исследованию, в новых предположениях и без требования гёльдеровости функций, заложены в [3]. Публикации, в том числе [7], подтверждают сохранение интереса к использованию задачи Римана. Наряду с другими, важен случай, когда в такого типа задаче Римана-Гильберта-Привалова коэффициенты являются рациональными функциями [2–4, 17]. Такой случай возникает, например, в связи с исследованием дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами на оси редукцией. В подобной ситуации, от задачи Римана-Гильберта-Привалова можно перейти к родственной задаче, поставленной далее в п. **4**. При этом, считая искомые, принадлежащими соответствующим подмножествам рациональных функций. Однако, свободных от использования аппарата интегралов типа Коши, достаточно простых и исчерпывающих, строго изложенных методов исследования такого типа задач не известно. Поэтому, актуально соответствующее исследование, в частности, таких родственных задач с взаимно обратными рациональными правильно факторизуемыми коэффициентами.

Цель исследования

Целью работы является доказательство теоремы о разрешимости сразу двух рассматриваемых уравнений (1), (2) и соответствующих им, поставленных ниже, двух взаимосвязанных задач. Именно, задач о нахождения двух рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейным уравнениям, на сомкнутой вещественной оси, с правильно факторизуемыми взаимно обратными рациональными коэффициентами вида:

$$A(x)X^{+}(x)+Y_{-}(x)=B(x); x\in\{-\infty;\infty\}, \tag{1}$$

$$A^{-1}(x)X_{1}^{+}(x)+Y_{1-}(x)=B(x); x\in\{-\infty;\infty\}. \tag{2}$$

Здесь и далее, $A^{-1}(x):=[A(x)]^{-1}, x\in\{-\infty;\infty\}$, $A^{-1}(z):=[A(z)]^{-1}, z\in C$.

В качестве контура здесь выступает сомкнутая вещественная ось [3].

Изложение основного материала исследования

1. Ниже будем использовать основные положения, обозначения и определения из [1, 12–16]. К изучению рассматриваемых ниже задач применяется решение нелинейной задачи факторизации по подкольцам. Используя [9–11, 14, 18, 19], приведём следующее.

1.1. ***Определение***. Всякое кольцо R с единицей e, рассматриваемое вместе с его фиксированной факторизационной парой подколец (R^{+},R^{-}) $[\equiv(R^{-},R^{+})]$, т.е. подколец, обладающих определёнными, аксиоматически заданными свойствами, будем называть "«кольцом с факторизационной парой".

1.2. Будем говорить, что элемент $a \in R$ допускает в коммутативном кольце R факторизацию по факторизационной паре (R^+, R^-) (– по ***ФП*** (R^+, R^-)), если существуют элементы $r^+ \in R^+$, $s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ такие, что: $a = r^+ s^0 t^-$. Эта факторизация называется: правильной факторизацией ***(п.ф.),*** если $r^+ \in R^+$, $s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ – обратимы в своих подкольцах; – нормированной факторизацией (***н.ф.***), если $t^0 = r^0 = e$; – нормированной правильной факторизацией (***н.п.ф.***), если она является (***п.ф.***) и $t^0 = r^0 = e$. Известно, что правильную факторизацию элемента из R по ***ФП*** (R^+, R^-) можно нормировать. Нормированная правильная факторизация единственна.

1.3. Обозначим через $\Re_r$ совокупность всех рациональных функций, вообще, комплексного переменного $z \in C$, все полюсы которых, при существовании, конечны и невещественны. Пределы функций из $\Re_r$ на бесконечности существуют и конечны.

Пусть $\Re_r^{\ +}(\Re^{\ -})$ – совокупности функций из $\Re_r$, все полюсы которых, при существовании, расположены внутри нижней (верхней) полуплоскости $\Pi_-(\Pi_+)$, соответственно ([3]; С. 13–14). Проверяется, что $\Re_r$ – кольцо с мультипликативной единицей $e = f(z) := 1, z \in C$ относительно обычных операций сложения и умножения функций, а $\Re_r^{\ +}, \Re_r^{\ -}$ – его подкольца с единицей.

Проекторы на подкольца: $\Re_r \to \Re_r^{\ \mp}$ обозначим $P^{\mp}$, соответственно. Эти проекторы коммутирующие. Проектор P^+ (проектор P^-) каждой функции из $\Re_r$ ставит в соответствие часть её, оставшуюся после удаления из разложения этой функции, в сумму константы и простейших дробей первого и второго типов всех слагаемых с полюсами из Π_+ (из Π_-), соответственно.

Полагаем: $P^0 = P^+P^-, P_+ = P^+ - P^0, P_- = P^- - P^0, \Re_r^{\mp,0} = P^{\mp,0}(\Re_r)$, где $\Re_r^0 = \Re_r^+ \cap \Re_r^-$. Можно показать, что $\Re_r$ является кольцом с ***ФП*** **(** $\Re_r^{\ +}, \Re_r^{\ -}$).

2. Рассматриваются следующие задачи.

Задача 1. *Для заданных рациональных функций – коэффициентов* $A(x), B(x)$, $-\infty < x < \infty$ *найти пару рациональных функций* $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in \Re_-$, *все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй – в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси линейному уравнению* (1).

Задача 2. *Для заданных рациональных функций–коэффициентов* $A(x), B(x)$, $-\infty < x < \infty$, *найти пару рациональных функций* $X_1^+(z) \in \Re_r^+, Y_{1-}(z) \in \Re_-$, *все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй – в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси линейному уравнению* (2)**.**

3. ***Главный результат.*** Исходим из возможности продолжения (1), (2) на всю комплексную плоскость, не выходя из требуемых подклассов рациональных функций. Тогда:

$$A(z)X^+(z) + Y_-(z) = B(z), \ z \in C; \tag{3}$$

$$A^{-1}(z)X_1^+(z) + Y_{1-}(z) = B(z), z \in C, \tag{4}$$

где $A(z), B(z) \in \Re_r$, $z \in C$ – известные функции;

$X^+(z), X_1^+(z) \in \Re_r^+; Y_-(z), Y_{1-}(z) \in (\Re_r)_-, z \in C$ – искомые функции; C – расширенная комплексная плоскость. Непосредственно, или с помощью результатов из [9], или [10, 14], устанавливается следующее.

3.1. *Теорема.* Пусть функция $A(z) \in \Re_r$ не имеет вещественных нулей и

$$\lim_{z\to\infty} A(z) = const \neq 0 . \qquad (5)$$

Если, при этом, $A^{-1}(z)$ допускает нормированную правильную факторизацию по факторизационной паре ($\Re_r^{\ +}, \Re_r^{\ -}$):

$$A^{-1}(z) = \Gamma^{+}(z) S^{0}(z) T^{-}(z); \ z \in C , \qquad (6)$$

тогда уравнения (3), (4) и ***Задачи 1.***, ***2.***, относительно $X^{+}(z), X_{1}^{+}(z) \in \Re$; $Y(z), Y(z) \in \Re$, соответственно, при любых правых частях $B(z), B_1(z) \in \Re_r$ однозначно в $\Re_r$ разрешимы. Их решения можно найти по формулам, соответственно:

$$\begin{aligned} X^{+}(z) \ &= \Gamma^{+}(z) S^{0} P^{+}[T^{-}(z) B^{+}(z)] \ , \\ Y_{-}(z) &= B_{-}(z) + (T^{-}(z))^{-1} \cdot P_{-}[T^{-}(z) B^{+}(z)]; \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} X_1^{+}(z) &= (\Gamma^{+}(z) S^{0})^{-1} P^{+}[(T^{-}(z))^{-1} B_1^{+}(z)], \\ Y_{1-}(z) &= B_{1-}(z) + T^{-}(z) \cdot P_{-}[(T^{-}(z))^{-1} B_1^{+}(z)]. \end{aligned} \qquad (8)$$

Доказательство. При условиях теоремы, соответствующие заданным $B(z), B_1(z) \in \Re_r$ правые части формул (7), (8) определяют некоторые функции $X^{+}(z), X_1^{+}(z) \in \Re_r^{+}; Y_{-}(z), Y_{1-}(z) \in \Re_{-}$. Подстановкой, убеждаемся, что эти функции удовлетворяют уравнениям (3), (4) при $B(z), B_1(z) \in \Re_r$, соответственно. В самом деле,

$$A(z) X^{+}(z) + Y_{-}(z) = [T^{-}(z)]^{-1} \cdot [S^{0}(z)]^{-1} \cdot [\Gamma^{+}(z)]^{-1} \{ \ \Gamma^{+}(z) S^{0}(z) \ p^{+}[T^{-}(z) B^{+}(z)] \ \} +$$

$$+ B_{-}(z) + [T^{-}(z)]^{-1} p_{-}[T^{-}(z) B^{+}(z)] = [T^{-}(z)]^{-1} \cdot \{ \ p^{+}[T^{-}(z) B^{+}(z)] + p_{-}[T^{-}(z) B^{+}(z)] \ \} + B_{-}(z) =$$

$$= [T^{-}(z)]^{-1} \cdot [T^{-}(z) B^{+}(z)] + B_{-}(z) = [T^{-}(z)]^{-1} \cdot T^{-}(z) B^{+}(z) + B_{-}(z) = B^{+}(z) + B_{-}(z) = B(z) .$$

$$A^{-1}(z) X_1^{+}(z) + Y_{1-}(z) = T^{-}(z) S^{0}(z) \Gamma^{+}(z) \{ \ (\Gamma^{+}(z) S^{0}(z))^{-1} \ p^{+}[(T^{-}(z))^{-1} B_1^{+}(z)] \ \} +$$

$$+ B_{1-}(z) + T^{-}(z) p_{-}[(T^{-}(z))^{-1} B_1^{+}(z)] = T^{-}(z) \cdot \{ \ p^{+}[(T^{-}(z))^{-1} B_1^{+}(z)] + p_{-}[(T^{-}(z))^{-1} B_1^{+}(z)] \ \} +$$

$$+ B_{1-}(z) = T^{-}(z) \cdot [(T^{-}(z))^{-1} B_1^{+}(z)] + B_{-}(z) =$$

$$= T^{-}(z) \cdot (T^{-}(z))^{-1} B_1^{+}(z) + B_{1-}(z) = B_1^{+}(z) + B_{1-}(z) = B_1(z) .$$

Таким образом, при сделанных предположениях, и любых правых частях $B(z), B_1(z) \in \Re_r$ уравнения (3), (4) в $\Re_r$ разрешимы. Их решения в $\Re_r$ действительно, можно определить по формулам (7), (8), соответственно.

Установим ***единственность*** решения в $\Re_r$ для каждого из уравнений (3), (4). Пусть, при условиях теоремы, кроме решений $X^{+}(z), X_1^{+}(z) \in \Re_r^{+}; Y_{-}(z), Y_{1-}(z) \in \Re_{r-}$ уравнений (3), (4) с фиксированными правыми частями, определяемых формулами (7), (8), соответственно, существуют ещё, какие-нибудь решения. Например, ${}^{1}X^{+}(z) \in \Re_r^{+}, {}^{1}Y_{-}(z) \in \Re_{-}$ – для уравнения (3); ${}^{1}X_1^{+}(z) \in \Re_r^{+}, {}^{1}Y_{1-}(z) \in \Re_{r-}$ – для уравнения (4). Тогда, очевидно, функции $X_o^{+}(z) := (X^{+}(z) - {}^{1}X^{+}(z)) \in \Re_r^{+}$; $Y_{o-}(z) := (Y_{-}(z) - {}^{1}Y_{-}(z)) \in \Re_{-}$ – образуют решение в $\Re_r$ соответствующего (3) уравнения с правой частью, тождественно равной нулю, а функции $X_{1o}^{+}(z) := (X_1^{+}(z) - {}^{1}X_1^{+}(z)) \in \Re_r^{+}$; $Y_{1o-}(z) := (Y_{1-}(z) - {}^{1}Y_{1-}(z)) \in \Re_{r-}$ – образуют решение в $\Re_r$ соответствующего (4) уравнения с правой частью, тождественно равной нулю. Следовательно,

$$[T^{-}(z)]^{-1} \cdot [S^{0}(z)]^{-1} \cdot [\Gamma^{+}(z)]^{-1} \left[X^{+}(z) - {}^{1}X^{+}(z) \right] + [Y_{-}(z) - {}^{1}Y_{-}(z)] = 0 ,$$

$$T^{-}(z) S^{0}(z) \Gamma^{+}(z) \left[X_1^{+}(z) - {}^{1}X_1^{+}(z) \right] + [Y_{1-}(z) - {}^{1}Y_{1-}(z)] = 0 .$$

Отсюда

$$(\Re_r^+ \supset)[S^0(z)\Gamma^+(z)]^{-1}[X^+(z) - {}^1X^+(z)] = T^-(z)[{}^1Y_-(z) - Y_-(z)](\subset \Re_{r-}), \quad (9)$$

$$(\Re_r^+ \supset)S^0(z)\Gamma^+(z)[X_1^+(z) - {}^1X_1^+(z)] = (T^-(z))^{-1}[{}^1Y_{1-}(z) - Y_{1-}(z)](\subset \Re_{r-}). \quad (10)$$

Применяя к уравнениям из (9), (10) последовательно проекторы P^+, P_-, получим равенства:

$$[S^0(z)\Gamma^+(z)]^{-1}[X^+(z) - X_1^+(z)] = 0, T^-(z)[Y_{1-}(z) - Y_-(z)] = 0,$$

$$S^0(z)\Gamma^+(z)[X_1^+(z) - {}^1X_1^+(z)] = 0, (T^-(z))^{-1}[{}^1Y_{1-}(z) - Y_{1-}(z)] = 0.$$

Учитывая свойства, *н.п.ф.* и очевидные преобразования, отсюда заключаем, что ${}^1X^+(z) = X^+(z); {}^1Y_-(z) = Y_-(z); {}^1X_1^+(z) = X_1^+(z); {}^1Y_{1-}(z) = Y_{1-}(z)$.

Единственность, а с нею и однозначная разрешимость уравнений (3), (4) при любой правой части рассматриваемого класса функций, доказана.

Заметим, что всякая, являющаяся решением уравнения (3), пара рациональных функций $X^+(z) \in \Re_r^+; Y_-(z) \in \Re_{r-}$, сужением на сомкнутую вещественную ось, порождает решение уравнения (1):

$$X^+(x) = X^+(z)\downarrow_{z=x}; Y_-(x) = Y_-(z)\downarrow_{z=x}; x \in \{-\infty;\infty\} \quad (11)$$

А, стало быть, порождает и решение соответствующей ***Задачи 1.*** Аналогично, всякая, являющаяся решением уравнения (4), пара рациональных функций $X_1^+(z) \in \Re_r^+; Y_{1-}(z) \in \Re_{r-}$, сужением на сомкнутую вещественную ось, порождает решение уравнения (2), а, стало быть, порождает и решение соответствующей ему ***Задачи 2.*** Следовательно, в рассматриваемой ситуации ***Задачи 1.,2. ,*** также однозначно разрешимы в $\Re_r$. Теорема полностью доказана.

3.2. ***Следствие 1.*** При условиях теоремы, единственные решения в $\Re_r$ уравнений (3), (4) и ***Задач 1., 2.,*** с конкретными правыми частями ($\Re_r^- \supset$) $B(z) = B^-(z), B_1(z) = B_1^-(z); z \in C$, в силу (7), (8), можно найти в виде:

$$X^+(z) = \Gamma^+(z)S^0B^0, Y_-(z) = B_-(z) + (T^-(z))^{-1}T_-(z)B^0(z). \quad (12)$$

$$X_1^+(z) = (\Gamma^+(z)S^0)^{-1}B_1^0, Y_{1-}(z) = B_{1-}(z) + (T^-(z)\cdot P_-[(T^-(z))^{-1}])B_1^0, \quad (13)$$

где $B^0 = B^0(z), B_1^0 = B_1^0(z)$ – постоянные, равные соответствующим предельным значениям на бесконечности. В частности,

а) при $B(z) = B_-(z), B_1(z) = B_{1-}(z)(= P_-(B_1(z))); z \in C$ будет:

$$X^+(z) = 0, Y_-(z) = B_-(z); X_1^+(z) = 0, Y_{1-}(z) = B_{1-}(z); \quad (14)$$

б) соответствующие правой части $B(z) = B^0 \in C, B_1(z) = B_1^0 \in C; z \in C$ единственные решениия в $\Re_r$ уравнений (3), (4) и *Задач 1.,2.* обозначаем и получаем из (7), (8) или из (12), (13), соответственно, в виде:

$$X^+(z) := X_{B^0}^+(z) = \Gamma^+S^0B^0, Y_-(z) := Y_{B^0-}(z) = (T^-(z))^{-1}T_-(z)B^0, \quad (15)$$

$$X_1^+(z) := X_{1B^0}^+(z) = (\Gamma^+S^0)^{-1}B_1^0, Y_-(z) := Y_{1B_1^0-}(z) = (T^-(z)P_-[(T^-(z))^{-1}])B_1^0. \quad (16)$$

Решения, соответствующие отличной от нуля константе в правой части рассматриваемого вида уравнений и ***Задач***, играют в их теории особо важную роль.

Очевидно, что при условиях теоремы и ($\Re_r^+ \supset$) $B(z) = B^+(z), B_1(z) = B_1^+(z); z \in C$, в формулах (7), (8) решений следует положить: $B_-(z) = 0, B_{1-}(z) = 0; z \in C$, соответственно.

Имеет место такое свойство решений уравнений (3), (4), а, стало быть, и аналогичное свойство уравнений (1), (2) и ***Задач 1., 2.***, соответствующих правой части $B(z) = B^-(z), B_1(z) = B_1^-(z); z \in C$.

3.3. ***Общее свойство.*** *При условиях* ***Теоремы,*** *произведения: 1) – составляющих* $X_{B^-}^+(z), X_{1B_1^-}^+(z) \in \Re_r^+$ *и 2) – их проекций* $X_{B^-}^0(z), X_{1B_1^-}^0(z) \in \Re_r^0$, *а также 3) – разности между* $B^-(z)$ *и* составляющей $Y_{B^- -}(z)$ *на разность между* $B_1^-(z)$ *и* составляющей $Y_{B_1^- -}(z)$ *– решений уравнений* (3), (4) *и*

Задач 1., 2. *при правых частях* $B(z) = B^-(z), B_1(z) = B_1^-(z); z \in C$ *равны произведению* $B^0(z)B_1^0(z) = B^0B_1^0; z \in C$.

Формульным выражением свойства являются следующие соотношения:

$$X^+_{B^-}(z)X^+_{1B_1^-}(z) = B^0B_1^0; X^0_{B^-}(z)X^0_{1B_1^-}(z) = B^0B_1^0,$$
$$[B^-(z) - Y_{B^-\_}(z)] \cdot [B_1^-(z) - Y_{B_1^-\_}(z)] = B^0B_1^0; z \in C. \tag{17}$$

Если, при этом, $B^0(z)B_1^0(z) = B^0B_1^0 = 1; z \in C$, тогда:

$$X^+_{B^-}(z)X^+_{1B_1^-}(z) = 1; X^0_{B^-}(z)X^0_{1B_1^-}(z) = 1,$$
$$[B^-(z) - Y_{B^-\_}(z)] \cdot [B_1^-(z) - Y_{B_1^-\_}(z)] = 1; z \in C. \tag{18}$$

Действительно. Перемножая преобразованные уравнения (3), (4), при условиях теоремы, очевидным образом, устанавливаем, что:

$$X^+_{B^-}(z)X^+_{1B_1^-}(z) = [B^-(z) - Y_{B^-\_}(z)] \cdot [B_1^-(z) - Y_{B_1^-\_}(z)] \quad . \tag{19}$$

В силу кольцевых свойств подколец ***ФП*** ($\Re_r^+, \Re_r^-$) ясно, что левая часть последнего равенства принадлежит $\Re_r^+$, а правая принадлежит $\Re_r^-$. Следовательно, обе они равны одной и той же функции из $\Re_r^0$, имеющей постоянное значение при любом значении аргумента. Применяя к обеим частям соотношения (19), последовательно, проекторы P^+, P^0, P^-, устанавливаем равенства (17). Из (17), при $B^0(z)B_1^0(z) = B^0B_1^0 = 1; z \in C$, следует (18). Свойство доказано.

Изложенный результат, существенно, обобщает приведенный автором [16].

3.3. ***Следствие 2.*** При условиях теоремы, зная решение уравнения (3) (***Задачи 1.)*** с правой частью $(\Re_r^- \supset) B(z) = B^-(z), B^0 = B^0(z) \neq 0; z \in C$, можно найти решение уравнения (4) и, стало быть, ***Задачи 2.*** с правой частью $(\Re_r^- \supset) B_1(z) = B_1^-(z), B_1^0 = B_1^0(z) \neq 0; z \in C$ по формулам:

$$X^+_{1B_1^-}(z) = (X^+_{B^-}(z))^{-1} B^0B_1^0,$$
$$Y_{B_1^-\_}(z) = [B^-(z) - Y_{B^-\_}(z)]^{-1}[B^-(z)B_1^-(z) - B^0B_1^0 - Y_{B^-\_}(z)B_1^-(z)]. \tag{20}$$

3.4. Иллюстративные примеры

1. Решим ***Задачи 1.***, ***2.***, поставленные по краевым условиям на сомкнутой вещественной оси, заданными уравнениями (1), (2) при:

$$A(x) = \frac{x^2 + 25}{x^2 + 9}; A^{-1}(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 + 25}; \; B(x) = B_1(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4)\left(x + 5i\right)}.$$

Тогда, $A^{-1}(z) = \dfrac{z + 3i}{z + 5i} \cdot 1 \cdot \dfrac{z - 3i}{z - 5i}$. Отсюда,

$$S^0 = 1, \quad \Gamma^+(z) = \frac{z + 3i}{z + 5i}, \quad T^-(z) = \frac{z - 3i}{z - 5i}; \; (S^0)^{-1} = 1, \; (\Gamma^+(z))^{-1} = \frac{z + 5i}{z + 3i}, \; (T^-(z))^{-1} = \frac{z - 3i}{z - 5i}.$$

Разложение для $B(z) = B_1(z)$ устанавливаем в виде:

$$\frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4)\left(z + 5i\right)} = -\frac{1}{4(z + 2i)} + \frac{3}{28(z - 2i)} + \frac{8}{7(z + 5i)}.$$

Поэтому:

$$B^{+}(z)=\frac{1}{28}\cdot\frac{25z+29i}{(z+2i)(z+5i)};\ B_{-}(z)=\frac{3}{28(z-2i)}.$$

По формулам (7), находим решение уравнения (3), ***Задачи 1***:

$$X^{+}(z)=\frac{z+3i}{140(z+5i)}[\frac{128}{z+5i}-\frac{25}{z+2i}];\ Y_{-}(z)=\frac{1}{140}\cdot[\frac{15}{z-2i}+\frac{22}{z-3i}].$$

По формулам (8), находим решение уравнения (4) и, стало быть, ***Задачи 2***:

$$X_{1}^{+}(z)=\frac{z+5i}{140(z+3i)}[\frac{200}{z+5i}-\frac{49}{z+2i}];\ Y_{1-}(z)=\frac{1}{140}\cdot[\frac{15}{z-2i}-\frac{26}{z-5i}].$$

Подстановкой, соответственно, в (3), (4) проверяется, что это действительно решения.

2. Решим ***Задачи 1., 2.,*** поставленные по краевым условиям на сомкнутой вещественной оси, заданными уравнениями (1), (2) при:

$$A(x)=\frac{5x^{2}+45}{2x^{2}+2};\quad A^{-1}(x)=\frac{2x^{2}+2}{5x^{2}+45};\quad B(x)=50, B_{1}(x)=\frac{1}{50}.$$

Тогда, $A^{-1}(z)=\frac{z+i}{z+3i}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{z-i}{z-3i}$.

Отсюда,

$$S^{0}=\frac{2}{5};\ \Gamma^{+}(z)=\frac{z+i}{z+3i};\ T^{-}(z)=\frac{z-i}{z-3i};\ (S^{0})^{-1}=\frac{5}{2},\ (\Gamma^{+}(z))^{-1}=\frac{z+3i}{z+i},\ [T^{-}(z)]^{-1}=\frac{z-3i}{z-i}.$$

По формулам (7) или (15), находим решение уравнения (3), ***Задачи 1.***:

$$X^{+}(z)=\frac{20z+20i}{z+3i};\ Y_{-}(z)=\frac{100i}{z-i}.$$

Теперь, с помощью (20), вычисляем решение уравнения (4), а, стало быть, и ***Задачи 2.***:

$$X_{1}^{+}(z)=\frac{z+3i}{20z+20i};$$

$$Y_{1-}(z)=-\frac{100i}{z-i}\cdot\frac{1}{50}[50-\frac{100i}{z-i}]^{-1}=-\frac{2i}{50z-150i}=-\frac{i}{25z-75i}.$$

Такой же результат для решения ***Задачи 2.*** можно получить, используя (8) или (16), непосредственно. Подстановкой, соответственно, в (3), (4) проверяется, что это действительно решения.

Выводы

Для рассмотренных двух задач, родственных задаче типа Римана-Гильберта-Привалова, с правильно факторизуемыми рациональными взаимно обратными коэффициентами, установлена теорема существования, ряд формул решений, следствия, общее свойство решений. Приведены примеры. Общее свойство характеризует связь между решениями рассматриваемых двух задач. Его использование в изученной ситуации, позволяет при правых частях из $\Re_{r}^{-}$, уравнений и ***Задач***, исчерпать вопрос нахождения решения уравнения (4) и ***Задачи 2.*** с взаимно обратными коэффициентами по известному решению уравнения (3) и, стало быть, ***Задачи 1.*** Исчерпать в явном виде формулами (20), минуя процедуру факторизации. Решения, соответствующие отличным от нуля постоянным в правых частях рассмотренных уравнений и задач играют в их теории важную роль.

Элементы статьи: "Постановка проблемы, анализ исследований и публикаций, цель исследования, изложение основного материала исследования (п.п. 1-3.3), выводы", подготовлены вторым, а остальные, - при участии всех соавторов.

Список использованной литературы

1. Войтик Т.Г. Метод нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // НАУКОВІ НОТАТКИ. – Луцьк, 2016. – Вип. 54. – С. 65-70.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 640 с.
3. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / М.Г. Крейн // Успехи мат. наук. – 1958. – Т. 13. – Вып. 5(83). – С. 3-120.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
5. Гахов Ф.Д. Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
6. Мхитарян С.М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учётом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях / С.М. Мхитарян // Изв. АН Армянской ССР. Серия: Механика. – 1968. – Т. XXI. – №5–6. – С. 3-20.
7. Акопян В.Н. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом / В.Н. Акопян, Л.Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тезисы докладов международной научной конференции (Одесса, 23-26 августа 2013 г.). – Одесса: ОНУ, 2013. — С. 12.
8. Черский Ю.И. Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. – Одесса: Астропринт, 2010. – 552 с.
9. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами / Г.С. Полетаев. – Киев, 1988. – 20 с. – (Препринт / АН УССР. Институт математики: 88.31).
10. Полетаев Г.С. Об однопроекторн. II порядка уравн. с правильно факторизуемыми коэфф. в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // Вестик ХГТУ. – 2000. – № 2 (8). – С. 191-195.
11. McNabb A. Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples / A. McNabb, A. Schumitzky // J. Functional Analysis. – 1972. – Vol. 9. – № 3. – P. 262-295.
12. Полетаев Г.С. Нахождение двух рациональных функций с полюсами из полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Г.С. Полетаев, Т.Г. Войтик, С.А. Яценко // Глушковські читання: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (Київ,10-13 вересня 2013 р.). – К.: НТУУ "КПІ", 2013. – С. 74-77.
13. Полетаев Г.С. Подвид двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемым коєффициентом в кольце с факторизационной парой // XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation": Abstracts of conference reports (Kiev, Ukraine. May 27-29, 2015). — К.: НТУУ "КПІ", 2015. — С. 46.
14. Полетаев Г.С. Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары / Г.С. Полетаев // Математика в сучасному технічному університеті: Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 24-25 грудня 2015 р.). – К.: НТУУ "КПІ", 2015. – С. 85-88.
15. Войтик Т.Г. Проекторный поход к нахождению двух рациональных линейно связанных на оси функций с полюсами из разных полуплоскостей / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // Необратимые процессы в природе и технике: Труды 8-ой Всероссийской конференции. Часть II. (Москва, 27-29 января 2015 г.). – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – С. 125-129.
16. Полетаев Г.С. Общее свойство решений родственных Римана-Гильберта-Привалова задач с взаимно обратными рациональными коэффициентами / Г.С. Полетаев // НАУКОВІ НОТАТКИ.– Луцьк, 2016. – Вип. 56. – С. 187-192.
17. Попов Г.Я. Метод факторизации и его численная реализация / Г.Я. Попов, П.В. Керекеша, В.Е. Круглов; под ред. проф. Г.Я. Попов. – Одесса: Одесский гос. университет, 1976. – 82 с.
18. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // Укр. матем. журнал. – 1991. – Т. 43. – № 9. – С. 120-1213.
19. Полетаев Г.С. Некоторые результаты о парных уравнениях в кольцах с факторизационными парами / Г.С. Полетаев //Вісник Харківського національного ун-ту. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. –2002. – Вип.52. – № 582.– С. 143-149.