УДК 519.8 (004.9)

Л.С. КОРЯШКИНА, Н.Н. ОДНОВОЛ, А.П. ЧЕРЕВАТЕНКО
Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет»
А.А. МИХАЛЁВА
Днепровский национальный университет им. О. Гончара

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОН СЕРВИСНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ЗАДАННОЙ ТЕРРИТОРИИ

Представлено математическое и программное обеспечение, разработанное для создания теоретических зон обслуживания с использованием характеристик сервисных центров и предположений о поведении клиентов. Впервые для описания процесса территориальной сегментации применены модели непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств, а при численной реализации алгоритмов их решения использовались ГИС-технологии. Представлены зоны обслуживания для подразделений МЧС, а также отделений управления труда и социальной защиты населения г. Днепра, полученные в результате вычислительных процедур.

Ключевые слова: зоны сервисного обслуживания, территориальная сегментация, непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств, геоинформационные системы и технологии

Л.С. КОРЯШКІНА, М.М. ОДНОВОЛ, А.П. ЧЕРЕВАТЕНКО
Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет»
О.О. МІХАЛЬОВА
Дніпровський національний університет ім. О. Гончара

МОДЕЛЮВАННЯ ЗОН СЕРВІСНОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ЗАДАНОЇ ТЕРИТОРІЇ

Представлено математичне і программне забезпечення, розроблене для створення теоретичних зон обслуговування з використанням характеристик сервісних центрів і припущень про поведінку клієнтів. Вперше для опису процесу територіальної сегментації застосовані моделі неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин, а при чисельній реалізації алгоритмів їх розв'язання були використані ГІС-технології. Представлені зони обслуговування для підрозділів МНС, а також для відділень управління праці та соціального захисту населення у м. Дніпро, які отримані у результаті обчислювальних процедур.

Ключові слова: зони сервісного обслуговування, територіальна сегментація, неперервні задачі оптимального мультиплексного розбиття множин, геоінформаційні системи і технології

L.S. KORIASHKINA, N.N. ODNOVOL, A.P. CHEREVATENKO
The State Higher Educational Institution "National Mining University"
O.O. MIKHALOVA
Dnipro National University named after O. Gonchar

MODELLING OF SERVICE ZONES ON A GIVEN AREA

A mathematical support and software for creating theoretical service areas using characteristics of service centers and assumptions about customers' behavior are described. For the first time, the models of continuous problems of optimal multiplex partitioning of sets were applied to describe the territorial segmentation process, and for the numerical implementation of algorithms for their solving GIS technologies are used. The article presents service areas for divisions of the Ministry of Emergency Situations, as well as for the Labor and Social Protection departments in Dnepr, received as the result of computational procedures.

Keywords: service areas, territorial segmentation, continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets, Geoinformation systems and technologies

Постановка проблемы

Объективной закономерностью современного развития мировой цивилизации является приоритет социальных аспектов, совокупность явлений и тенденций, формирующихся в социальной сфере [1]. В течение ряда десятилетий в отечественных и зарубежных управленческих системах укрепилось мнение, что именно экономический рост и экономическое развитие являются залогом обеспечения растущих человеческих потребностей. Однако обобщение опыта достаточно большого числа стран свидетельствует о том, что быстрый экономический рост не позволяет иногда удовлетворить даже основные материальные потребности значительной части населения, создать благоприятный социально-духовный климат, решить проблемы культуры, нравственности, общественной морали и этики.

Важным показателем развития социально-экономического комплекса любой страны является уровень развития непроизводственной сферы, отражающий всю совокупность социальных проблем, их динамику и перспективы. В непроизводственную сферу включают жилищно-коммунальное хозяйство и бытовое обслуживание населения; транспорт и связь по обслуживанию организаций населения; геологию и разведку недр (за вычетом глубокого разведочного бурения на нефть и природный газ); здравоохранение, физическую культуру и социальное обеспечение; просвещение; культуру и искусство; науку и научное обслуживание; финансово-кредитное и страховое обслуживание; управление; общественные организации. В последнее время возникли новые виды услуг, не учтенные старыми классификаторами: риэлтерская деятельность, кредитование под залог, обмен валюты и др. В ряде случаев к этому перечню отраслей присоединяют торговлю, снабжение и сбыт, заготовки, жилищное строительство, охрану общественного порядка. При этом подчеркивается теоретическая правомерность использования как инвариантов терминов «непроизводственная сфера», «сфера обслуживания населения», «сфера услуг».

Рынок услуг существует в единстве с товарным рынком и является одной из его разновидностей, развивающейся в рамках общих законов рыночной экономики и подчиняющейся этим законам. Вместе с тем он имеет ряд специфических черт, обусловливающих особый подход к предпринимательской и маркетинговой деятельности, призванной обеспечить удовлетворение спроса на услуги. К основным особенностям рынка услуг можно отнести территориальную сегментацию и высокую динамичность рыночных процессов. Формы предоставления услуг, спрос и условия функционирования сервисных предприятий зависит от характеристик территории, охваченной конкретным рынком. Поэтому территориальный (географический) критерий является в данном случае определяющим.

Имеется большое число работ ученых и практиков, в которых затрагиваются многие аспекты применения экономико-математического моделирования к решению задач территориального размещения предприятий. Однако методологические вопросы выработки научных методов для анализа и оценки мест размещения сервисных предприятий с выделением зон их влияния нуждаются в дальнейших исследованиях. Управленческие решения по размещению предприятий должны приниматься с учетом региональных особенностей, таких как плотность населения в рассматриваемом регионе; спрос на услуги; места расположения уже существующих сервисных предприятий; густота дорожной сети. Эти факторы могут стать причиной возникновения некоторых процессов и эффектов, влияние которых на развитие сферы услуг неоднозначно.

Выбор мест для размещения новых предприятий или перепрофилирование имеющихся предприятий на другие виды услуг нужно осуществлять с применением соответствующего прикладного инструментария. Разработке такого инструментария, а именно, - математического и программного обеспечения территориальной сегментации рынка услуг и посвящена данная работа.

Анализ последних исследований и публикаций

Задачи оптимального разбиения множеств (ОРМ) и связанные с ними задачи оптимальной организации сервисных или производственных сетей активно изучаются как отечественными, так и зарубежными учеными [2 – 12 и др.]. В англоязычной литературе такие задачи известны как «Optimal set partitioning problem», «Facility location problem», «Continuous Location-Allocation Problem». Родственными к ним являются задачи о k-центрах и p-медианах, задачи о покрытиях [2, 3]. Основная проблема, решаемая с помощью моделей и методов ОРМ, состоит в разделении рыночного региона на несколько сервисных подрегионов, каждый из которых может быть обслужен лишь одним сервисным центром. Решение о размещении сервисных предприятий, как правило, сопровождается множеством альтернативных вариантов разбиения клиентов, которых обслуживает каждый центр. Критерием выбора оптимального разбиения может быть минимизация затрат на оказание или получение той или иной услуги.

В подавляющем большинстве моделей задач разбиения принимают, что потребители размещены дискретно, как «центры притяжения» почтовых индексов. Такое предположение, в основном, продиктовано ограниченными возможностями способности различать объекты, а также вычислительной сложностью решения задач с большой плотностью размещения клиентов. В соответствующей научной литературе показано, что и дискретная модель, и задача размещения-разбиения на плоскости являются NP-полными задачами.

Подробный обзор дискретных задач ОРМ приведен в монографии [2]. Интересным представителем таких задач является обобщение задачи о p-медиане, когда клиенты выбирают поставщиков, исходя из собственных предпочтений [3]. Для решения этой задачи в указанном источнике разработан генетический алгоритм, использующий в качестве популяции локальные оптимумы по окрестности Лина-Кернигана. Для оценки качества получаемых решений используется техника сведения исходной задачи к задачам целочисленного линейного программирования.

Проблема размещения новых объектов на древовидной сети с целью свести к минимуму максимальные взвешенные расстояния между существующими и новыми объектами и между парами новых объектов сети изучается в работе [4]. Здесь приводится алгоритм двоичного поиска, имеющий полиномиальный порядок, основанный на рациональном представлении данных, применении параметрического подхода и идеи параллелизма.

Задачи, в которых разбиваемое множество является континуальным, в научной литературе называют непрерывными задачами разбиения. Такие задачи изучаются, например, в работах [5 – 15 и др.].

В некоторых научных трудах к задаче размещения-разбиения на плоскости с непрерывно распределенным спросом применяются методы вычислительной геометрии, в частности такие ее фундаментальные объекты, как диаграммы Вороного и различные их обобщения [10 – 12]. Так, например, использование диаграмм Вороного высших порядков при моделировании зон розничной торговли продемонстрировано в [12]. При этом под моделями торговой зоны Вороного понимают основанные на геометрии процедуры создания теоретических торговых зон с использованием характеристик магазина и предположений о поведении потребителя. В [12] приведены две модели Вороного, которые учитывают предположение о том, что потребитель выбирает k (k =1, 2, 3, ...) ближайших наиболее привлекательных объектов. Если покупатель считает k объектов одинаково привлекательными, торговые зоны можно представить в виде мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного k-го порядка. Если же клиент отдает предпочтение более близким магазинам, торговые зоны определяются упорядоченной мультипликативно взвешенной диаграммой Вороного k-го порядка. Обе модели позволяют получить перекрытие торговых зон. Кроме того, упорядоченная мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного k-го порядка позволяет исследовать влияние различных уровней предпочтения по оценкам продаж магазина. Одной из особенностей рассматриваемых моделей является то, что полученные в результате торговые зоны не являются взаимоисключающими.

Как уже отмечалось, типичными представителями непрерывных задач ОРМ, хорошо изученных до настоящего времени, являются задачи размещения сервисных центров с одновременным разбиением региона, непрерывно заполненного клиентами, на области потребителей, каждая из которых обслуживается только одним сервисным центром [5 – 10].

Нетрадиционный подход к решению задачи об оптимальном размещении нескольких логистических объектов с одновременной сегментацией логистических зон в случае, когда потребители непрерывно распределены на всем полигоне обслуживания, представлен в работе [9]. Здесь разработана модификация оптико-геометрического подхода, основанная на построении фронтов световой волны в случае, когда начальным источником возбуждения является некоторое многообразие. Как правило, для решения этого класса задач успешно применяются дискретные методы, однако при исследовании некоторых прикладных задач при этом возникает ряд сложностей, например, невозможность полного учета специфических условий задач (ландшафт, распределение населения, наличие естественных и искусственных барьеров). Одним из способов преодоления указанных трудностей, по мнению авторов, и является рассмотрение таких задач в непрерывной постановке, а также применение для их исследования оптико-геометрического подхода.

Другим способом учета территориальных особенностей является использование для сегментации карт геопространственного интеллектуального анализа данных, как например, в работе [11].

Вообще говоря, вопросы, связанные с интеграцией современных геоинформационных технологий и методов решения задач оптимального размещения логистических или сервисных центров с одновременной сегментацией области на зоны обслуживания, являются актуальным направлением современных научных исследований. Целью настоящей работы является демонстрация возможности совместного применения моделей и методов решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств (ОМРМ) [13 – 15] и ГИС-систем в качестве инструментария, применяемого для территориальной сегментации произвольной ограниченной области.

Задачи ОМРМ состоят в том, чтобы разбить ограниченное множество на такие подмножества точек, каждое из которых отвечало бы (в соответствии с определенным критерием) одному и тому же набору k точек из N выделенных (или размещаемых), называемых центрами. Критерий оптимальности мультиплексного разбиения выбирается с оглядкой на специфику самих центров. Чаще всего, это или минимизация суммарного взвешенного расстояния от центров до всех точек, им соответствующих, или оптимизация наихудшего варианта, когда минимизируется максимальное расстояние от центров до самой отдаленной точки соответствующего им подмножества. Вопросам, связанным с теоретическим обоснованием методов решения непрерывных линейных задач ОМРМ в различных постановках, а также исследованию свойств решений и практических приложений таких задач, посвящены работы [13 – 15].

ГИС-технологии позволяют учитывать тип расселения населения. Компактный тип характеризуется плотной сетью поселений, взаимосвязанных системой дорог, хорошо развитой инфраструктурой. Для дисперсного типа характерно существование небольших поселений, находящихся на таком расстоянии друг от друга, когда взаимодействие между ними затруднено. ГИС хранит информацию о реальном мире в виде набора тематических слоев, которые объединены на основе географического положения. Электронные карты, как правило, содержат полную информацию о протяженности дорог, их связности и условиях перемещения по ним (скоростные режимы, запрещенные съезды, наличие перевалочных пунктов и так далее).

В настоящей работе ГИС (а именно, библиотека Google Maps Distance Matrix API) используется для поиска кратчайшего пути между любыми двумя точками региона, учитывая дорожный граф.

Математическая постановка непрерывной задачи ОМРМ с ограничениями

Пусть Ω – ограниченное, замкнутое множество из пространства E_2; $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}\right) \in \Omega$, для всех $i = \overline{1, N}$, – некоторые точки, называемые «центрами», координаты которых неизвестны заранее и подлежат определению, $\tau^N = \left(\tau_1, ..., \tau_N\right) \in \underbrace{\Omega \times ... \times \Omega}_{N} = \Omega^N$.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathrm{N} = \{1, 2, ..., N\}$ – набор всех индексов центров; $\mathrm{M}(\mathrm{N}, k)$ – множество всех k-элементных подмножеств множества N, $\left|\mathrm{M}(\mathrm{N}, k)\right| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, ..., j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$, – элементы из $\mathrm{M}(\mathrm{N}, k)$.

С каждым элементом σ_l множества $\mathrm{M}(\mathrm{N}, k)$ будем ассоциировать подмножество Ω_{σ_l} точек из Ω, а с подмножеством Ω_{σ_l} – набор центров $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, ..., \tau_{j_k^l}\}$, $l = \overline{1, L}$.

Пусть $\Sigma_{\Omega}^{N,k}$ – класс всех возможных разбиений k-го порядка множества Ω на его непересекающиеся подмножества $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, ..., \Omega_{\sigma_L}$:

$$\Sigma_{\Omega}^{N,k} = \left\{\bar{\omega} = \left\{\Omega_{\sigma_1}, ..., \Omega_{\sigma_L}\right\} : \bigcup_{l=1}^{L} \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \operatorname{mes}\left(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}\right) = 0; \sigma_i, \sigma_j \in \mathrm{M}(\mathrm{N}, k), i \neq j, i, j = \overline{1, L}\right\}.$$

Непрерывная линейная задача оптимального мультиплексного разбиения множества $\Omega \subset E_2$ при ограничениях с размещением центров формулируется следующим образом [13, 14].

Задача А- k. $\quad F(\bar{\omega}, \tau^N) \to \min\limits_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k} \\ \tau^N \in \Omega^N}}$,

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l:\, i \in \sigma_l}}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l:\, i \in \sigma_l}}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}. \tag{2}$$

Здесь функция $\rho(x)$ − ограниченная, измеримая, неотрицательная на множестве Ω; $b_i \geq 0, i = \overline{1, N}$, − заданные числа. Коэффициенты γ_j^l в левых частях ограничений таковы, что для всех $j = \overline{1, N}$, $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, ..., j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$ имеют место соотношения:

$$0 \leq \gamma_j^l \leq 1, \ \gamma_{j_1^l}^l + \gamma_{j_2^l}^l + ... + \gamma_{j_k^l}^l = 1. \tag{3}$$

Пара $\left(\bar{\omega}^*, \tau^{N*}\right)$, удовлетворяющая ограничениям (1), (2), при которой достигается минимальное значение функционала F, называется **оптимальным решением задачи А-** k.

Если в задаче **А-** k либо зафиксировать центры $\tau_i, i = \overline{1, N}$, либо отменить ограничения (1), (2), то получим частные случаи задачи ОМРМ [13] – с фиксированными центрами или без ограничений соответственно.

Для того, чтобы в задаче **А-** k при любом наборе центров τ_i, $i = \overline{1, N}$, класс допустимых разбиений k-го порядка множества Ω был непустым, достаточно выполнения следующих условий [13]:

$$0 \leq b_i \leq S, \quad i = \overline{1, N}; \quad \sum_{i=1}^{p} b_i \leq S \leq \sum_{i=1}^{N} b_i, \tag{4}$$

где $S = \int\limits_{\Omega} \rho(x) dx$.

При $k = 1$ задачи **А-** k представляют собой непрерывные линейные задачи оптимального разбиения множеств [9].

Замечание. Как уже отмечалось, выбор критерия оптимальности мультиплексного разбиения определяется спецификой самих центров. Критерий качества разбиения $F(\overline{\omega},\tau^N)=F_1(\overline{\omega},\tau^N)$, где

$$F_1(\overline{\omega},\tau^N)=\sum_{l=1}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\sum_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i\right)\rho(x)dx, \tag{5}$$

состоящий в минимизации суммарного расстояния от центров до всех клиентов, ими обслуживаемых, используется в случае необходимости разбить данную область Ω на регионы, каждый из которых охватывал бы клиентов с одними и теми же k ближайшими соседними сервисными центрами. Примерами пар «сервисный центр – клиент» в этом случае могут выступать предприятия и потребители, почтовые отделения и абоненты, станции сбора анализов и пациенты и т.п. Такие задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств полезно формулировать для изучения конкуренции между сервисными центрами, определения для каждого центра реальной сферы деятельности, учитывая его мощность, а также дополнительную информацию о возможностях конкурентов и о спросе на предоставляемую услугу в рассматриваемой области. Если центры представляют собой крайне необходимые предприятия или службы (аварийные, полицейские, медицинские учреждения и т.п.), то критерием оптимальности может служить минимизация расстояния (или времени) от центра обслуживания до самой отдаленной точки региона, то есть оптимизация наихудшего варианта, что математически может быть записано так: $F(\overline{\omega},\tau^N)=F_4(\overline{\omega},\tau^N)$, где

$$F_4(\overline{\omega},\tau^N)=\max_{l=\overline{1,L}}\ \sup_{x\in\Omega_{\sigma_l}}\ \max_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\tau_i)/w_i+a_i\right)\rho(x). \tag{6}$$

Здесь $x=\left(x^{(1)},x^{(2)}\right)\in\Omega$; $c\left(x,\tau_i\right)$, $i=\overline{1,N}$ – ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega\times\Omega$ функции, измеримые по аргументу x при любом фиксированном векторе τ_i, $w_i>0,\ a_i\ge 0,\ i=\overline{1,N}$, – заданные числа.

И в том, и в другом случае предполагается, что клиенты каждого региона могут обслуживаться любым из k соответствующих центров, например, когда самые близкие из них по каким-то причинам не смогут предоставить услугу.

Схема метода решения задачи А-k

В работе [14] приведен единый подход, на котором базируются методы и алгоритмы решения задач ОМРМ. Особенностью этого подхода, например, для линейных задач ОМРМ, является тот факт, что решение исходных бесконечномерных задач оптимизации удается получить в явном виде. При этом в аналитическое выражение могут входить параметры, являющиеся решениями вспомогательных конечномерных задач оптимизации негладких целевых функций. Далее приведем лишь идею метода решения задачи ОМРМ с ограничениями и основные формулы.

Характеристической вектор-функцией подмножества Ω_{σ_l}, входящего в разбиение k-го порядка множества Ω, называется вектор-функция $\lambda^l(x)=(\lambda_1^l(x),...,\lambda_N^l(x))$, определенная на множестве Ω, с координатами, которые задаются следующей формулой: $\forall x\in\Omega_{\sigma_l}$, $l=\overline{1,L}$

$$\lambda_i^l(x)=\begin{cases}1,\ x\in\Omega_{\sigma_l}\ \&\ i\in\sigma_l,\\ 0\ \text{ в противном случае,}\end{cases}\qquad i=\overline{1,N},$$

где $\sigma_l=\{j_1^l,j_2^l,...,j_k^l\}$ – набор индексов центров $\{\tau_{j_1^l},\tau_{j_2^l},...,\tau_{j_k^l}\}$, ассоциируемых с подмножеством Ω_{σ_l}.

Исходная задача **А-**k записывается как задача бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными.

Задача В-k. Найти $\min\limits_{(\lambda(\cdot),\tau^N)\in\Gamma^k\times\Omega^N} I(\lambda(\cdot),\tau^N)$,

$$\Gamma^k=\left\{\lambda(\cdot):\lambda(\cdot)\in\Gamma_0^k,\ \int_{\Omega}\sum_{l=1}^{L}\gamma_i^l\lambda_i^l(x)\rho(x)dx=b_i,\quad i=\overline{1,p},\ \int_{\Omega}\sum_{l=1}^{L}\gamma_i^l\lambda_i^l(x)\rho(x)dx\le b_i,\quad i=\overline{p+1,N}\right\};$$

$$\Gamma_0^k=\left\{\lambda^l(\cdot)=(\lambda_1^l(\cdot),...,\lambda_N^l(\cdot)):\lambda_i^l(x)=0\vee 1\ \ \forall x\in\Omega,i=\overline{1,N},l=\overline{1,L},\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i^l(x)=k,\ l=\overline{1,L},\ \text{п.в. для } x\in\Omega\right\}.$$

Если функционал задачи **А-** k имеет вид (5), то функционал $I(\lambda(\cdot),\tau^N)$ задачи **В-** k запишется так:

$$I(\lambda(\cdot),\tau^N)=I_1(\lambda(\cdot),\tau^N),$$

$$I_1(\lambda(\cdot),\tau^N)=\int_\Omega \sum_{l=1}^{L}\left(\sum_{i=1}^{N}(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i)\lambda_i^l(x)\right)\rho(x)dx.$$

Оптимальное решение задачи **В-** k получено в следующем виде: для всех $i=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,L}$ и почти всех $x\in\Omega$

$$\lambda_i^{*l}(x)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ c(x,\tau_i^*)/w_i+a_i+\gamma_i^l\psi_i^*\le c(x,\tau_j^*)/w_j+a_j+\gamma_j^l\psi_j^*,\\ \quad\forall i\in\sigma_l,\ \mathrm{j}\in\mathrm{N}\backslash\sigma_l,\\ 0\ \ \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

в качестве $\tau_1^*,\ldots,\ \tau_N^*$, $\psi_1^*,\ldots,\ \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение следующей задачи конечномерной оптимизации:

$$G(\psi)=\min_{\tau^N\in\Omega^N} G_1(\tau,\psi)\to\max, \tag{7}$$

при условиях

$$\psi_i\ge 0,\quad i=\overline{p+1,N}, \tag{8}$$

где

$$G_1(\tau^N,\psi)=\int_\Omega \min_{\substack{\sigma_l\in \mathrm{M(N},k)\\ l=\overline{1,L}}}\sum_{i\in\sigma_l}[c(x,\tau_i)/w_i+a_i+\gamma_i^l\psi_i]\rho(x)dx-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i.$$

И, таким образом, решение непрерывной задачи ОМРМ сводится к решению конечномерной задачи (7), (8) любым известным методом негладкой оптимизации.

Если же в задаче **А-** k функционал представляет собой радиус k -кратного шарового покрытия области, то есть записан в виде (6), то после введения характеристических функций подмножеств разбиения k -го порядка множества Ω критерий качества задачи бесконечномерного программирования **В-** k запишется в следующем виде:

$$I(\lambda(\cdot),\tau^N)=I_4(\lambda(\cdot),\tau^N),$$

где

$$I_4(\lambda(\cdot),\tau^N)=\max_{l=\overline{1,L}}\sup_{x\in\Omega}\max_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\tau_i)/w_i+a_i\right)\rho(x)\lambda_i^l(x).$$

В силу нелинейности функционала $I_4(\lambda(\cdot),\tau^N)$ решение задачи **В-** k с таким критерием качества на порядок усложняется. Описание и обоснование метода решения такой задачи объемно и не представляется возможным в рамках данной работы.

Если в приведенных формулах зафиксировать вектор $\tau^N\in\Omega^N$, считая, что он известен заранее, то можно получить оптимальное решение задачи оптимального мультиплексного разбиения с ограничениями при фиксированных центрах.

Особенности вычислительной технологии

Практическая реализация описанного подхода для территориальной сегментации конкретного региона предполагает, в первую очередь, проведения подготовительного этапа обработки электронных карт с помощью любого графического редактора. При этом из рисунка карты местности исключаются реки, водоемы, части суши, не принадлежащей территории региона. Полученная допустимая область Ω вписывается в прямоугольник Π, который покрывается затем прямоугольной сеткой. В каждой точке сетки определяется функция плотности:

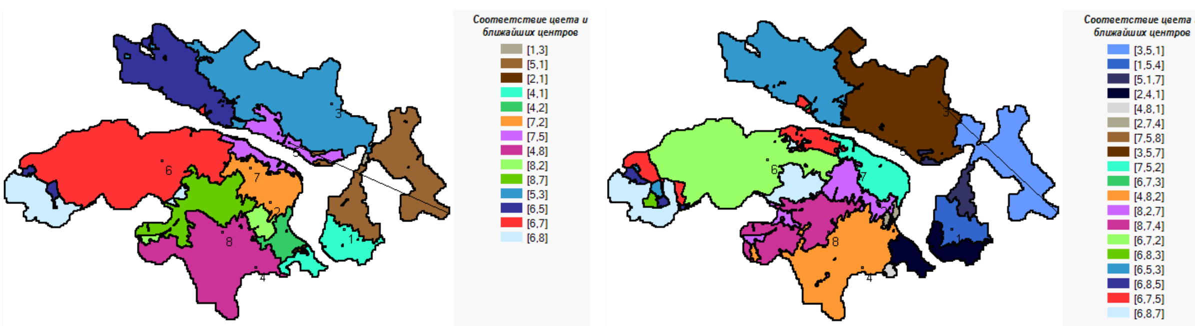
$$\overline{\rho}(x)=\begin{cases}\rho(x),\ x\in\Omega\\ 0,\ x\in\Pi\setminus\Omega\end{cases}$$

Решение задач безусловной недифференцируемой оптимизации вида (7), (8) в разработанном программном обеспечении осуществляется с помощью модификации r-алгоритма Шора. Для того, чтобы не допустить размещение центра на недопустимой (запретной) территории, разработан следующий подход: на каждой итерации r-алгоритма Шора проверяется принадлежность текущих координат центров допустимой области. В случае, когда какой-либо центр попадает в запретную зону, определяется его «псевдопроекция» на разбиваемое множество. Под псевдопроекцией точки $z \in E_2$ на замкнутое множество $\Omega \subset E_2$ понимается точка $v \in \Omega \bigcap D(z)$, для которой выполняется условие: $dist(z,v) = \min\limits_{x \in \Omega \bigcap D(z)} dist(z,x)$, где $dist(z,v)$ – расстояние между точками, множество $D(z) = \{v = z + \gamma w, \gamma \in R, w \in \{e_1, e_2\}\}$, e_1, e_2 – орты осей координат.

Решение задачи ОМРМ с размещением центров производится в два этапа. На первом этапе решается задача, в которой в качестве функций $c\left(x, \tau_i\right)$, $i = \overline{1,N}$, выступает одна из известных метрик (в рамках города, обычно, манхэттенская). На втором этапе, подключая ГИС для поиска фактического расстояния между найденными центрами и точками региона, определяется оптимальное разбиение k-го порядка заданного региона. Такой подход позволяет сократить число обращений к библиотеке Google Maps Distance Matrix API, а, следовательно, и количество задействованных вычислительных ресурсов – объема оперативной памяти и времени, требуемого на выполнение как одного запроса, так и в целом всех запросов.

Результаты территориальной сегментации города

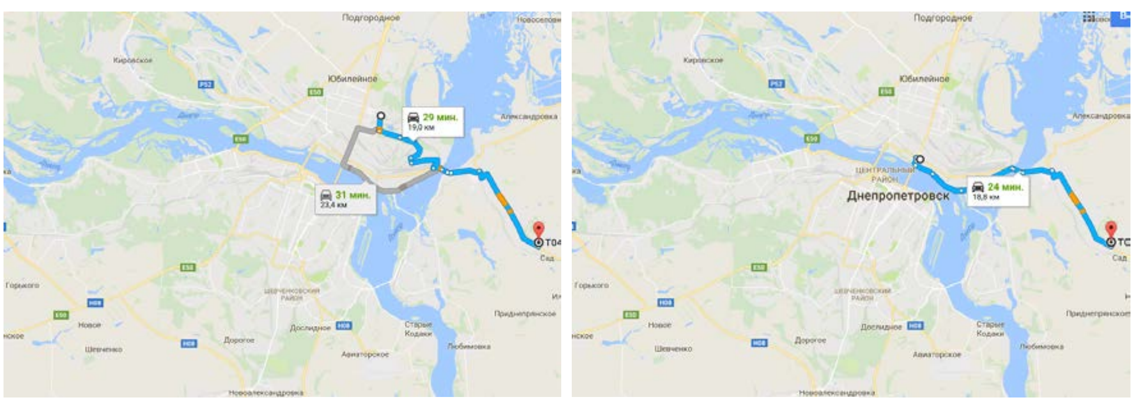
Разработанный математический аппарат, а также программный продукт с интегрированной функцией обращения к ГИС применялись для решения реальных практических задач территориальной сегментации. Далее представим результаты разделения г. Днепра на зоны оптимального (оперативного) реагирования подразделений МЧС, с учетом перекрытия зон двукратно или даже трехкратно. На сегодняшний день на территории города расположено восемь самостоятельных государственных пожарных частей. Их координаты, также как и значения расстояний между любыми двумя точками на карте города, были получены при помощи Google Maps. Для решения поставленной проблемы была сформулирована задача ОМРМ с фиксированными центрами τ_i и критерием минимизации (5) со следующими значениями параметров: $w_i = 1, a_i = 0, i = \overline{1,N}$. По найденному разбиению подсчитывалось значение функционала $F_4(\overline{\omega}, \tau^N)$. На рис. 1 приведены два варианта разбиения территории города на зоны обслуживания МЧС-частей: дуплексное и триплексное.



а) б)

Рис. 1. Территориальная сегментация г. Днепра на зоны реагирования восьми пожарных частей с учетом перекрытия зон: а) второго, б) третьего порядка

Тонкой черной линией соединены концы соответствующих минимальных радиусов покрытия зон. Фактические расстояния, определяющие эти радиусы и полученные с помощью ГИС, приведены на рис. 2.



а) б)

Рис. 2. Минимальный радиус покрытия для полученного разбиения г. Днепра с перекрытием зон: а) второго порядка, б) третьего порядка

Представленные в работе модели мультиплексного разбиения множеств позволяют получить перекрытие сервисных зон. Так, на рис. 3 приведены зоны обслуживания для каждого из восьми центров при разбиении 3-го порядка. И таким образом, полученные в результате зоны позволяют учитывать те ситуации, когда ближайший к клиенту центр (в данном случае пожарная часть) занят и не может ответить на вызов, и обслуживание клиента передается другому ближнему центру.

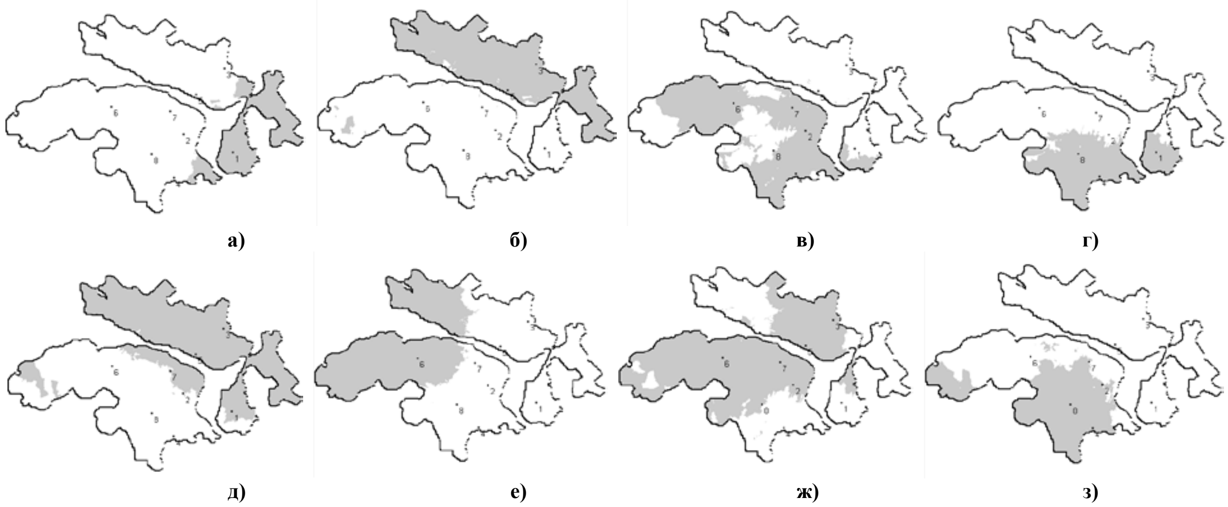


Рис. 3. Разбиение 3-го порядка. Зоны обслуживания центров МЧС:
а) – первого, б) – второго, в) – третьего и т. д. з) – восьмого

Кроме того, определение с помощью представленного подхода районов обслуживания для подразделений управления МЧС, так же как и любых других типов центров социальной защиты населения, позволяет оценить и так называемые "мощности" центров. По количеству населения, охваченного выделенной территорией – зоной обслуживания конкретного центра, можно условно рассчитать те силы и средства, которые необходимы подразделению для оказания той или иной услуги своим клиентам.

Как известно, в условиях компактного рынка, особенно в случае существования крупных агломераций, взаимосвязанных с окружающими территориями, проявляет свое действие закон Рейли. Согласно этому закону, с увеличением числа жителей города увеличивается число посторонних потребителей, не проживающих в его черте. Аналогичный процесс наблюдается и внутри городских образований, когда густонаселенный район как бы «притягивает» к себе потребителей малонаселенных районов. Закон Рейли объясняет это явление как «распределение уходящей за пределы населенного пункта покупательной силы».

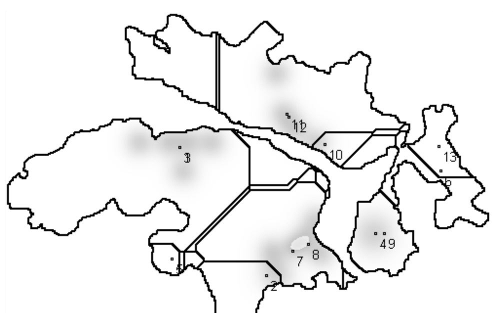


Рис. 4. Иллюстрация действия закона Рейли при размещении тринадцати центров социальной защиты населения г. Днепра

Результаты территориальной сегментации города с размещением сервисных центров с помощью описанной в статье методики также подтверждают проявление действия этого закона – предприятия услуг, как правило, размещаются в районах или населенных пунктах с большой концентрацией населения.

На рис. 4 представлены результаты размещения тринадцати (по количеству жилых массивов г. Днепра) центров социальной защиты населения. Здесь – чем темнее цвет точки региона, тем больше в ней плотность населения.

Заключение и перспективы дальнейшего развития направления исследований

Таким образом, представленные задачи мультиплексного разбиения множеств как модели задач территориальной сегментации позволяют получать перекрытия сервисных зон. Это означает, что сервисные зоны не являются взаимоисключающими и в большей степени соответствуют реальности, например, по сравнению с моделями, которые приводят к разбиению первого порядка и определяют зоны как пространственные монополии.

Использование ГИС позволяет при планировании размещения новых сервисных центров учитывать такие факторы как наличие коммуникаций в местах предполагаемого размещения центров, возможные дополнительные расходы на строительство собственных коммуникаций, фактические расстояния между сервисными центрами и их клиентами и т.п.

В дальнейшем при совершенствовании математических моделей задач оптимального размещения логистических или социальных центров на заданной территории с одновременным ее зонированием принцип территориальной сегментации может быть дополнен демографическим, социальным, поведенческим и другими критериями. Также остаются открытыми вопросы разработки научно-обоснованных способов работы с геоинформационными системами при решении указанных задач.

Список использованной литературы

1. Климович Л.К. Роль и место сферы услуг в общественном производстве / Л.К. Климович, И.А. Ткаченко // Вестник Белорусского государственного экономического университета. – 2005. – № 1. – С. 67 – 73.

2. Farahani R.Z. Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Springer – Verlag. / R.Z. Farahani, M. Hekmatfar (eds.). – Berlin, Heidelberg. – 2009. – 530 pp.

3. Алексеева Е.В. Генетический локальный поиск для задачи о p–медиане с предпочтениями клиентов / Е.В. Алексеева, Ю.А. Кочетов //Дискретный анализ и исследование операций. – 2007. – Серия 2. – Том 14. – № 1. – С. 3 – 31.

4. Erkut E. Distance-constrained multifacility minimax location problems on tree network / E. Erkut, R.L. Francis, A. Tamir // Networks. – 1992. – V.22. – P. 37 – 54.

5. Drezner T. Replacing continuous demand with discrete demand in a competitive location model / T. Drezner, Z. Drezner // Naval Research Logistics 1997. – V. 44. – P. 81 – 95.

6. Wang C.Y. An algorithm for continuous type optimal location problem. / C.Y. Wang , C.Y. Gao , Z.J. Shi // Computational Optimization and Applications 1997. – V. 7. – P. 239 – 253.

7. Dasci A. A continuous model for production-distribution system design / A. Dasci, V. Verter // European Journal of Operational Research 2001. – V. 129. – P. 287 – 298.

8. Murat A. A Continuous Analysis Framework for the Solution of Location-Allocation Problems with Dense Demand / A. Murat, V. Verter , G. Laporte // Les Cahiers du GERAD. – 2008. – 42 pp.

9. Казаков А.Л. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей /А.Л. Казаков, А.А. Лемперт, Д.С. Бухаров // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 6. – С. 87 – 100.

10. Киселева Е.М. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи: монография / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наукова думка, 2013. – 606 с.

11. Lee I. Map segmentation for geospatial data mining through generalized higher-order Voronoi diagrams with sequential scan algorithms / I. Lee, C. Torpelund-Bruin, K. Lee // Expert Systems with Applications. – 2012. – Vol. 39, Issue 12. – P. 11135–11148.

12. Boots B. Modeling Retail Trade Areas Using Higher-Order, Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams / B. Boots, R. South. // Journal of Retailing 73(4). – 1997. – P. 519 – 536.

13. Koriashkina L.S. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. – 2015. – Vol. 119, N 2. – P. 15 – 32.

14. Коряшкина Л.С. Непрерывные линейные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями / Л.С. Коряшкина, А.П. Череватенко // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. – (Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»). – 2015. – Вип. 28. – С. 77 – 91.

15. Михальова О.О. Про зв’язок задач оптимізації багатократного кульового покриття обмежених множин та їх мультиплексного розбиття / О.О. Михальова // Компютерні технології. – Львів: ЛНУ, 2015. – С. 266 – 273.