

УДК 539.3:517.9

О.В. КУДІН, О.В. СПЕЛЬЧУК
Запорізький національний університет**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ СТАТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ КРУГЛИХ ТРИШАРОВИХ
ПЛАСТИН З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ МЕТОДОМ
ПОСЛІДОВНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

Запропоновано функціонал повної енергії тришарових круглих пластин симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами і нелінійно-пружним ізотропним заповнювачем. Описано методу розв'язання задачі статичної стійкості, яка включає застосування метода Рітца та метода послідовних навантажень. В якості чисельного прикладу, розглянуто задачу визначення критичних навантажень тришарової круглої пластини в нелінійно-пружній постановці за Каудерером, виконано порівняння отриманого розв'язку з іншими дослідженнями.

Ключові слова: тришарова пластина, статична стійкість, нелінійна пружність.

А.В. КУДИН, О.В. СПЕЛЬЧУК
Запорожский национальный университет**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГЛЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН
С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ
НАГРУЖЕНИЙ**

Предложен функционал полной энергии трехслойных круглых пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и нелинейно-упругим изотропным заполнителем. Описана методика решения задачи статической устойчивости, которая включает применение метода Ритца и метода последовательных нагружений. В качестве численного примера, рассмотрена задача определения критических нагрузок трехслойной круглой пластины в нелинейно-упругой постановке по Каудереру, выполнено сравнение полученного решения с другими работами.

Ключевые слова: трехслойная пластина, статическая устойчивость, нелинейная упругость.

O.V. KUDIN, O.V. SPELCHUK
Zaporizhzhya National University**BUCKLING PROBLEM OF SANDWICH PLATES WITH NONLINEAR CORE SOLVED BY
METHOD OF CONSECUTIVE LOADING**

Full energy functional for sandwich round plates of a symmetric structure with isotropic outer layers and a nonlinearly elastic isotropic core are proposed. A technique for solving the static buckling problem is described, which includes the Ritz method and the method of consecutive loading. As a numerical example, we consider the problem of determining the critical loads of a sandwich circular plate in a nonlinearly elastic formulation by the Kauderer. The obtained solution is compared with other works.

Keywords: sandwich plates, static buckling, nonlinear elasticity.

Постановка проблеми

Розробка підходів до розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих елементів конструкцій є досить актуальною задачею. Це зумовлено широким застосуванням, зокрема, тришарових пластин та оболонок в авіа- та суднобудуванні, космічній промисловості, цивільному будівництві, радіоелектроніці та інших галузях народного господарства. Актуальною є проблема розробки ефективних підходів до розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла з урахуванням фізичної нелінійності матеріалів шарів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На даний момент опубліковано значну кількість досліджень з теорії тришарових пластин та оболонок. Однією з перших публікацій в області моделювання тришарових конструкцій є робота [10], яка присвячено визначенню критичних навантажень тришарових пластин.

Постановці і розв'язанню нелінійно-пружних задач присвячені монографії [3, 6, 9]. Задачі згину й стійкості тришарових пластин, виконаних з нелінійно-пружних матеріалів, досліджуються в роботах [1, 4, 7, 8].

Посилання на роботи з моделювання тришарових елементів конструкцій можна знайти в оглядах [11, 14]. Детальний аналіз класичних та уточнених моделей розрахунку тришарових і багатошарових конструкцій проводиться в статтях [12, 13].

Виходячи з аналізу проблемної області, можна зробити висновок, що порівняно невелика кількість робіт присвячена моделюванню шаруватих елементів конструкцій з урахуванням фізично-нелінійних матеріалів. Це пов'язано з необхідністю розв'язання достатньо складних систем нелінійних диференціальних рівнянь. Одним з методів розв'язання таких систем може бути метод продовження розв'язку за параметром та його варіації. Більш докладно про застосування цього методу в нелінійних задачах пластин та оболонок йдеться в роботах [2, 5, 6].

Формулювання мети дослідження

Метою статті є визначення критичних навантажень тришарової пластини з нелінійно-пружним заповнювачем при дії стискаючого навантаження в площині пластини. Для розв'язання задачі використовується підхід на базі методу Рітца та методу послідовних навантажень В.В. Петрова.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглядається задача статичної стійкості тришарової круглої пластини при дії стискаючого навантаження P в площині пластини. Будемо вважати, що P настільки мале, що плоска форма рівноваги пластини є стійкою. Визначимо критичне значення $P_{кр}$, при перевищенні якого початкова плоска форма рівноваги може стати нестійкою і пластина під дією малих збурень перейде до нової стійкої форми рівноваги з викривленою серединною поверхнею. Задача розглядається в вісесиметричній постановці.

Вважається, що зовнішні шари однакової товщини δ виготовлені з ізотропного матеріалу з модулем Юнга E , коефіцієнтом Пуассона μ та підкоряються закону Гука, приймаються гіпотези Кірхгофа. Середній шар товщини $2h$ виготовлено з нелінійно-пружного, у формі Г. Каудерера, ізотропного матеріалу та приймається гіпотеза про лінійний закон розподілення тангенціальних напружень по товщині заповнювача.

Фізичні співвідношення для матеріалу заповнювача мають наступний вигляд [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 3\tilde{K}(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2)(\varepsilon_r - \varepsilon_0), \\ \sigma_\varphi &= 3\tilde{K}(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2)(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_0), \\ \tau_{r\varphi} &= \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{r\varphi}, \quad \tau_{rz} = \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{rz}, \quad \tau_{\varphi z} = \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \varepsilon_{\varphi z}, \end{aligned} \tag{1}$$

де \tilde{G} , \tilde{K} – модулі зсуву та об'ємної пружності матеріалу; ε_0 , ψ_0 – середнє відносне подовження і інтенсивність деформацій зсуву.

Параметр γ_2 характеризує зміну форми елемента конструкції в нелінійно-пружній стадії деформації і визначається експериментально [3, 9]; параметр χ_2 характеризує зміну об'єму елемента, далі вважаємо $\chi_2 = 0$.

Основні рівняння теорії пружності для даної задачі наведено в статті [4]. Випишемо далі функціонал повної енергії в загальному вигляді відносно невідомих функцій: переміщення в площині пластини $u(r)$ та прогину $w(r)$:

$$\begin{aligned} E = & \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\int_h^{h+\delta} \frac{EI1\left(\frac{1}{r} + \mu I2\right)}{2r(1-\mu^2)} + \frac{EI2\left(\frac{\mu I1}{r} + I2\right)}{2(1-\mu^2)} dz + \int_{-h-\delta}^{-h} \frac{EI3\left(\frac{1}{r} + \mu I4\right)}{2r(1-\mu^2)} + \frac{EI4\left(\frac{\mu I3}{r} + I2\right)}{2(1-\mu^2)} dz + \right. \\ & \left. + \int_{-h}^h \frac{I5}{8rh} (2\tilde{G}I12(I13\gamma_2 + 1) + 3\tilde{K}I14) + \frac{I10}{2} (2\tilde{G}I15(I16\gamma_2 + 1) + 3\tilde{K}I14) + \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{G}}{32h^2} I8^2 (I13\gamma_2 + 1) dz - P \left(\frac{dw(r)}{dr} \right)^2 \right) r dr d\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

В (2) використовуються наступні позначення:

$$\begin{aligned}
 A1 &= \frac{2}{3} \frac{9\tilde{K}^2 - 4\tilde{G}^2}{(3\tilde{K} + \tilde{G})(\tilde{K} + 2\tilde{G})}, I1 = u(r) + \frac{dw(r)}{dr} \left(z - h - \frac{\delta}{2} \right), I2 = \frac{d^2w(r)}{dr^2} \left(z - h - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{du(r)}{dr}, \\
 I3 &= -u(r) + \frac{dw(r)}{dr} \left(z + h + \frac{\delta}{2} \right), I4 = \frac{d^2w(r)}{dr^2} \left(z + h + \frac{\delta}{2} \right) - \frac{du(r)}{dr}, I5 = -2z\delta \frac{dw(r)}{dr} + 4zu(r), \\
 I6 &= \frac{z\delta}{2h} \frac{d^2w(r)}{dr^2}, I7 = \frac{du(r)}{dr} \left(1 - \frac{h-z}{h} \right), I8 = \frac{dw(r)}{dr} (4h - 2\delta) + 4u(r), \\
 I9 &= \frac{I5}{4rh} - I6 + I7, I10 = -I6 + I7, I11 = I6 + I7, I12 = I5 + \frac{A1}{6} I9 + \frac{I11}{3}, \\
 I13 &= \frac{I5^2}{18r^2h^2} - \frac{2I11I5}{9rh} + \frac{A1}{9rh} I5I9 + \frac{4A1}{9} I9I10 + \frac{I8^2}{24h^2} + \frac{8}{9} I10^2 + \frac{2}{9} A1^2 I9^2, \\
 I14 &= \frac{I5}{12rh} - \frac{A1}{6} I9 + \frac{1}{3} I10, I15 = -\frac{I5}{12rh} + \frac{A1}{6} I9 + \frac{2}{3} I10, I16 = I13 + \frac{2}{9rh} I5(I11 - I10).
 \end{aligned} \tag{3}$$

В якості апроксимацій переміщень відповідно методу Рітца обрано наступні координатні функції. Для защемлення на контурі:

$$w(r) = H_0 + \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^2 \sum_{i=1}^n H_i \left(\frac{r}{R} \right)^{2i}, \quad u(r) = L_0 + \left(1 - \frac{r}{R} \right) \sum_{i=1}^n L_i \left(\frac{r}{R} \right)^{2i+1}. \tag{4}$$

Тут $H_i, L_i, i = \overline{0, n}$ – параметри, які визначаються за методом Рітца.

Після підстановки (4) в функціонал (2) та диференціювання за параметрами координатних функцій, отримаємо в загальному випадку систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$f_i(H_i, L_i, P) = \frac{\partial E}{\partial H_i} = 0, \quad g_i(H_i, L_i, P) = \frac{\partial E}{\partial L_i} = 0. \quad (i = \overline{1, n}) \tag{5}$$

Одним з методів, що використовуються для розв'язку нелінійних задач механіки деформівного твердого тіла є метод послідовних навантажень, розроблений В.В. Петровим [5, 6]. Узагальненням цього методу є метод продовження розв'язку за параметром. Використання методу послідовних навантажень разом з наближеними аналітичними методами при розв'язанні задач нелінійної механіки описано в монографії [6].

Будемо вважати, що параметри координатних функцій залежать від навантаження $H_i = H_i(P), L_i = L_i(P)$. Після диференціювання системи (5) за параметром P отримаємо систему диференціальних рівнянь, лінійних відносно $\frac{dH_i}{dP}$ і $\frac{dL_i}{dP}$

$$\begin{aligned}
 \frac{df_i}{dH_i} \frac{dH_i}{dP} + \frac{df_i}{dL_i} \frac{dL_i}{dP} + \frac{df_i}{dP} &= 0, \\
 \frac{dg_i}{dH_i} \frac{dH_i}{dP} + \frac{dg_i}{dL_i} \frac{dL_i}{dP} + \frac{dg_i}{dP} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Початкові умови впливають з фізичного змісту задачі: $H_i(0) = L_i(0) = 0$.

Згідно з методом послідовних навантажень, розв'язок системи (6) визначається наступною розрахунковою схемою

$$H_{i,j+1} = H_{i,j} + \Delta \bar{H}_{i,j}, \quad L_{i,j+1} = L_{i,j} + \Delta \bar{L}_{i,j}, \quad P_{j+1} = P_j + \Delta P_j, \tag{7}$$

де ΔP_j – крок навантаження, який задається, а $\Delta \bar{H}_{i,j}$ і $\Delta \bar{L}_{i,j}$ визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
 \frac{df_i}{dH_i} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta H_{i,j} + \frac{df_i}{dL_i} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta L_{i,j} + \frac{df_i}{dq_j} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta P_j &= 0, \\
 \frac{dg_i}{dH_i} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta H_{i,j} + \frac{dg_i}{dL_i} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta L_{i,j} + \frac{dg_i}{dq_j} (H_{i,j}, L_{i,j}, P_j) \Delta P_j &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\frac{df_i}{dH_i} \left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta \bar{H}_{i,j} + \frac{df_i}{dL_i} \left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta \bar{L}_{i,j} + \frac{df_i}{dP_j} \left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta P_j = 0,$$

$$\frac{dg_i}{dH_i} \left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta \bar{H}_{i,j} + \frac{dg_i}{dL_i} \left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta \bar{L}_{i,j} + \frac{dg_i}{dP_j} \left(H_{i,j} + \frac{\Delta H_{i,j}}{2}, L_{i,j} + \frac{\Delta L_{i,j}}{2}, P_j \right) \Delta P_j = 0.$$

Наведена розрахункова схема має порядок точності $O(\Delta P_j^3)$ [4].

Як чисельний приклад розглянемо задачу визначення критичного стискаючого навантаження для тришарової круглої пластини з параметрами: товщина середнього шару $2h = 16 \cdot 10^{-3}$ м, товщина зовнішніх шарів $\delta = 1 \cdot 10^{-3}$ м, радіус пластинки $R = 0,4$ м; модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона зовнішніх шарів – $G = 8 \cdot 10^4$ МПа та $\mu = 0,27$ відповідно, модуль зсуву та модуль об’ємної деформації заповнювача – $\tilde{G} = 2,77 \cdot 10^4$ МПа, $\tilde{K} = 6 \cdot 10^4$ МПа (сплав алюмінію Д16Т). При врахуванні нелінійної пружності матеріалу Д16Т розглянутих елементів конструкцій, приймаємо наступні значення коефіцієнтів: $\gamma_2 = -3,878 \cdot 10^5$, $\chi_2 = 0$ [4]. В розрахунках розглядається тільки жорстке защемлення країв пластини.

Табл. 1 містить порівняння отриманих в статті результатів з розрахунками роботи [4].

Таблиця 1

Критичні навантаження тришарової пластини

	$P_{кр} \cdot 10^6, \text{Н/м}$		
	1	2	3
Лінійний випадок	4,712	4,712	5,402
Нелінійний випадок	4,491	4,691	-

Математичні моделі, що використовуються при розрахунках, позначені в табл. 1 наступним чином: 1 – аналітична модель [4], 2 – метод послідовних навантажень, 3– скінченно-елементна модель [4].

Рис. 1 містить ілюстрацію кроків методу послідовних навантажень. Критерієм втрати стійкості в даному випадку є необмежене зростання прогину при досягненні критичного навантаження.

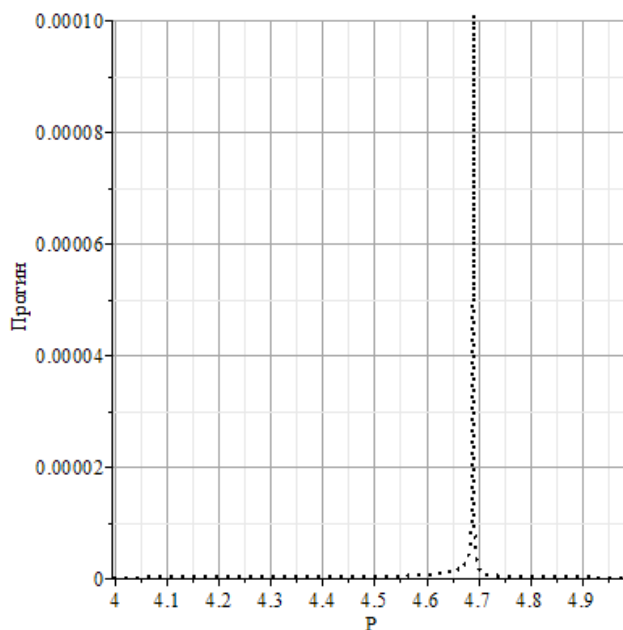


Рис. 1. Кроки методу послідовних навантажень. Нелінійний випадок.

Висновки

1. Наближено розв'язано задачу визначення критичних навантажень круглої тришарової пластини з нелінійно-пружним заповнювачем.
2. При порівнянні отриманих в статті результатів з іншими роботами показано, що відхилення значень критичних навантажень від інших моделей складає 4% – 12%.
3. В цілому, метод послідовних навантажень в поєднанні з методом Рітца є досить ефективним при дослідженні нелінійних задач, оскільки дозволяє звести нелінійну задачу до послідовності лінійних та легко алгоритмізується.
4. Перспективи подальших досліджень пов'язані із застосуванням метода послідовних навантажень до задач стійкості підкріплених пластин та оболонок з врахуванням геометричної та фізичної нелінійності.

Список використаної літератури

1. Зеленський А.Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини / А. Г. Зеленський // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія механіка. – 2012. – Т. 20, №5. – С. 60-66.
2. Ильин В.П. Численные методы решения задач строительной механики: Справ. Пособие / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников – Мн.: Выш. шк., 1990. – 349 с.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер ; пер. с нем. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
4. Кудін О.В. Статична стійкість круглих тришарових пластин з нелінійно-пружним заповнювачем / О.В. Кудін // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. — 2015. — № 3. — С. 127-135.
5. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек / В.В. Петров. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. – 119 с.
6. Петров В.В. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В.В. Петров. М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
7. Тамуров Ю.Н. Вариант обобщённой теории трёхслойных пологих оболочек с учётом обжатия физически нелинейного заполнителя / Ю.Н. Тамуров // Прикл. механика. –1990. – Т. 26, №12. – С. 39-45.
8. Тамуров Ю.Н. Уравнения изгиба и устойчивости трехслойных оболочек с ортотропными и нелинейно-упругими свойствами материалов / Ю.Н. Тамуров // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – 1990. – №20. – С. 102-112.
9. Цурпал И.А. Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов / И.А. Цурпал. Техника, 1976. – 176 с.
10. Hoff N.J. Buckling of sandwich-type panels / N.J. Hoff and S.E. Mautner // Journal of the Aeronautical Sciences. – 1945. – vol. 12(3). – pp. 285-297.
11. Carrera E., Brischetto S. A Survey With Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for the Analysis of Sandwich Plates // Applied Mechanics Reviews, Vol. 62, 2009.
12. Kien T Nguyen. A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates / Kien T Nguyen, Tai H. Thai and Thuc PVo // Steel and Composite Structures. – 2015. – vol. 18(1). – pp. 91-120.
13. S.M.R. Khalili. Buckling analysis of composite sandwich plates with flexible core using improved high-order theory / S.M.R. Khalili, M.M. Kheirikhah, Fard K. Malekzadeh // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2015. – vol. 22(4).
14. Noor A.K. Computational Models for Sandwich Panels and Shells // Applied Mechanics Reviews, Vol. 49, No. 3, 1996. – pp. 155–199.