УДК 517.9:519.6

В.П. ЛЯШЕНКО, О.Б. КОБИЛЬСЬКА, Т.С. БРИЛЬ
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
О.П. ДЕМ’ЯНЧЕНКО
Азовський морський інститут Національного університету "Одеська морська академія"

НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ТЕПЛООБМІНУ РУХОМОГО ОСЕСИМЕТРИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

Розглянуто застосування інтегрального рівняння типу Гаммерштейна при моделюванні процесу теплообміну рухомої циліндричної області з навколишнім середовищем, що нагрівається внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла. Побудовано функцію Гріна для спряженого диференціального оператора. Це дозволило нелінійну двовимірну крайову задачу звести до одновимірного нелінійного інтегрального рівняння. Розв’язок рівняння отримано чисельним модифікованим методом Ньютона. Проведені чисельні експерименти та побудовані графіки температурних розподілів. Отримане інтегральне рівняння може бути використане у якості математичної моделі теплового процесу під час термічної обробки рухомого дроту.

Ключові слова: математична модель, рівняння теплопровідності, крайова задача, інтегральне рівняння типу Гаммерштейна, функція Гріна.

В.П. ЛЯШЕНКО, Е.Б. КОБЫЛЬСКАЯ, Т.С. БРЫЛЬ
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
О.П. ДЕМЬЯНЧЕНКО
Азовский морской институт Национального университета "Одесская морская академия"

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕПЛООБМЕНА ДВИЖУЩЕЙСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрено применение интегрального уравнения типа Гаммерштейна при моделировании процесса теплообмена движущейся цилиндрической области, которая нагревается внутренними и внешними источниками тепла с окружающей средой. Построена функция Грина для сопряженного дифференциального оператора. Это позволило нелинейную двумерную краевую задачу свести к одномерному нелинейному интегральному уравнению. Решение уравнения получено модифицированным численным методом Ньютона. Проведены численные эксперименты и построены графики температурных распределений. Полученное интегральное уравнение может быть использовано в качестве математической модели теплового процесса во время термической обработки движущейся проволоки.

Ключевые слова: математическая модель, уравнение теплопроводности, краевая задача, интегральное уравнения типа Гаммерштейна, функция Грина.

V. LYASHENKO, E. KOBILSKAYA, T. BRYL
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University
O. DEMYANCHENKO
Azov maritime institute of National university "Odessa maritime academy"

NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS IN THE MATHEMATICAL MODELS OF HEAT TRANSFER IN A MOVING AXIAL-SYMMETRIC MEDIUM

The application of an integral equation of Hammerstein type in modeling the heat transfer process of a moving cylindrical area that is heated by internal and external heat sources with an environment is considered. The Green's function for the adjoint differential operator is constructed. This made it possible to reduce the nonlinear two-dimensional boundary value problem to a one-dimensional nonlinear integral equation. The solution of the equation was obtained by a modified numerical Newton's method. Numerical experiments have been carried out and graphs of temperature distributions have been constructed. The resulting integral equation can be used as a mathematical model of the thermal process during the heat treatment of a moving wire.

Key words: mathematical model, heat equation, boundary value problem, integral equation of Hammerstein type, Green's function

Постановка проблеми

В основі більшості математичних моделей фізичних та технологічних процесів лежать крайові та нелокальні задачі математичної фізики. Значна їх кількість є нелінійними, а розв’язки можна знайти лише чисельними методами із застосуванням комп’ютерної математики. Зниження розмірності крайової задачі дозволяє спростити алгоритм знаходження її розв'язку. Одним із шляхів зниження розмірності крайової задачі є зведення до інтегрального рівняння, лінійного або нелінійного, алгоритм розв'язку якого більш простий ніж алгоритм розв'язку крайової задачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Інтегральні рівняння знаходять широке застосування при розв'язанні задач математичної фізики та під час моделювання багатьох неперервних фізичних та технологічних процесів[1]. Зведення крайової задачі для рівняння з частинними похідними до відповідного інтегрального рівняння дозволяє у багатьох випадках спростити алгоритм її розв'язання методами комп'ютерної математики [1,2].

Мета дослідження

Побудувати алгоритм зведення третьої крайової задачі для рівняння теплопровідності до інтегрального рівняння та розв'язання її методами комп'ютерної математики.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо математичну модель температурного поля у рухомому осесиметричному середовищі, що розігрівається у обмеженій замкненій області Ω внутрішніми або зовнішніми джерелами тепла, і яка є однією з проблем металургії – дослідження температурних розподілів під час пластичної деформації та термічної обробки рухомого дроту внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла [3,4].

Розглянемо фізичну та математичну модель такого процесу. Під час виробництва тугоплавкого та важкодеформованого дроту відбувається його попередній розігрів перед пластичною деформацією. Термічна обробка рухомого дроту у більшості технологічних процесів відбувається під дією постійно діючих внутрішніх або зовнішніх джерел тепла. Основна проблема, що виникає під час дослідження процесу термічної обробки є визначення температурного розподілу у зоні нагрівання, а додаткова – визначення параметрів керування температурним полем [5,6]. Математична модель процесу нагрівання дроту внутрішніми джерелами тепла приводить до дослідження крайових задач для неоднорідного рівняння теплопровідності з граничними умовами I-III роду, які відображають втрати тепла з поверхні середовища, що нагрівається. У цій моделі джерела тепла у неоднорідному рівнянні задаються у вигляді функції, що залежить від просторових координат та невідомої функції. Математичну модель процесу нагрівання рухомого осесиметричного середовища зі сталою швидкістю v внутрішніми джерелами тепла можна задати у вигляді крайової задачі для рівняння теплопровідності в області $\Omega:\{0<z<l, 0<r<r_0\}$

$$\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-vc\rho_n\frac{\partial T}{\partial z}=-\frac{I^2\rho_0(1+\beta T)}{\pi^2 r_0{}^4}, \tag{1}$$

$$T(r,0)=u_0,\quad T(r,l)=u_l, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T(0,z)}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial T(a,z)}{\partial r}=\alpha(u_c-T)+\varepsilon\sigma(u_c^4-T^4), \tag{3}$$

де $T(r,z)$ – температурне поле дроту, I – величина струму, α,λ – відповідно коефіцієнти тепловіддачі, теплопровідності; c – теплоємність матеріалу; l – довжина зони нагрівання; r_0,ρ_n – відповідно радіус та щільність рухомого середовища; σ,ε – стала Стефана–Больцмана та ступінь чорноти середовища; u_0,u_l,u_c – початкова, кінцева та температура навколишнього середовища; ρ_0,β – питомий опір та температурний коефіцієнти опору[5].

Задачу (1)-(3) можна звести до нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку шляхом усереднення за радіусом[5,6].

У результаті перетворень отримаємо нелінійну крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку у області $Q:\{(z)|, 0<z<l\}$

$$\frac{d^2u}{dz^2}-v\chi\frac{du}{dz}+\gamma u=+\tau u^4-\omega_1, \tag{4}$$

$$u(0)=u_0,\qquad u(l)=u_l,$$

де $\chi=c\rho_n\lambda^{-1}$, $\gamma=\left(I^2\rho_0\beta-2\pi^2 r_0{}^3\alpha\right)\left(\pi^2 r_0{}^4\lambda\right)^{-1}$,

$\tau=2\varepsilon\sigma\left(r_0\lambda\right)^{-1}, \omega_1=\left(I^2\rho_0+2\alpha u_c\pi^2 r_0{}^3\right)\left(\pi^2 r_0{}^4\lambda\right)^{-1}+\tau u_c^4.$

При цьому враховується теплообмін поверхні рухомого середовища із навколишнім. Усереднення за радіусом дозволяє зменшити розмірність задачі та звести її до розв'язання нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку.Якщо покласти у задачі (4) $\varepsilon = 0$, то рівняння стає лінійним, точний розв'язок якого отримано у роботах[4,5].

Зведемо нелінійну задачу (4) до інтегрального рівняння типу Гаммерштейна з ядром у вигляді функції Гріна [1,7]. Напишемо рівняння задачі (4) в операторній формі

$$Lu = \tau u^4 - \omega_1, \tag{5}$$

де $L = \dfrac{d^2}{dz^2} - \nu\chi\dfrac{d}{dz} + \gamma$ – лінійний диференціальний оператор.

Для знаходження розв'язку будуємо функцію Гріна $G(z,\xi)$ для спряженого до $L = \dfrac{d^2}{dz^2} - \nu\chi\dfrac{d}{dz} + \gamma$ оператора $L^* = \dfrac{d^2}{dz^2} + \nu\chi\dfrac{d}{dz} + \gamma$, який є розв'язком однорідної задачі

$$L^* G(z,\xi) = \delta(z-\xi), \tag{6}$$

$$G(0,\xi) = 0, G(l,\xi) = 0, \tag{7}$$

де $\delta(z-\xi)$ – дельта-функція Дірака.

Функція Гріна $G(z,\xi)$ в області $\Omega = \{z < \xi,\ \ z > \xi\}$ повинна задовольняти однорідному рівнянню та однорідним умовам. У кожній із під областей області $\Omega = \{z < \xi,\ \ z > \xi\}$ знаходимо загальний розв'язок задачі (6)-(7) та функцію Гріна

$$\begin{aligned} &\frac{d^2G}{dz^2} + \nu\chi\frac{dG}{dz} + \gamma G = 0,\ \ 0 < z < \xi,\ \ \xi < z < l \\ &G(0,\xi) = G(l,\xi) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$G(z,\xi) = \begin{cases} \{C_1(\xi)e^{k_1 z} + C_2(\xi)e^{k_2 z}, \forall z \le \xi \\ \{C_3(\xi)e^{k_1 z} + C_4(\xi)e^{k_2 z}, \forall z \ge \xi \end{cases}, \tag{9}$$

де $k_{1,2} = -(\nu\chi/2) \pm \sqrt{(\nu\chi/2)^2 - \gamma}$ – корені характеристичного рівняння для рівняння задачі (8). Коефіцієнти $C_1 \div C_4$, визначаємо із розв'язку наступної системи скориставшись однорідними граничними умовами (7) та властивостями функції Гріна[1].

$$\begin{cases} C_1(\xi) + C_2(\xi) = 0 \\ C_3(\xi)e^{k_1 l} + C_4(\xi)e^{k_2 l} = 0 \\ C_1(\xi)e^{k_1\xi} + C_2(\xi)e^{k_2\xi} = C_3(\xi)e^{k_1\xi} + C_4(\xi)e^{k_2\xi} \\ -C_1(\xi)k_1e^{k_1\xi} - C_2(\xi)k_2e^{k_2\xi} + C_3(\xi)k_1e^{k_1\xi} + C_4(\xi)k_2e^{k_2\xi} = -1 \end{cases}. \tag{10}$$

Звідки коефіцієнти $C_1(\xi) \div C_4(\xi)$ мають вигляд

$$C_1(\xi) = \frac{e^{k_2\xi} - e^{k_2 l + k_1(\xi - l)}}{(k_1 - k_2)\left(e^{(k_1+k_2)\xi}\left(1 - e^{(k_1+k_2)l}\right)\right)},\ C_2(\xi) = -\frac{e^{k_2\xi} - e^{k_2 l + k_1(\xi - l)}}{(k_1 - k_2)\left(e^{(k_1+k_2)\xi}\left(1 - e^{(k_1+k_2)l}\right)\right)},$$

$$C_3(\xi)=-\frac{-e^{(-k_1+k_2)l}\left(e^{k_1\xi}\left(1-e^{k_2\xi}\right)\right)}{(k_1-k_2)\left(e^{(k_1+k_2)\xi}\left(1-e^{(-k_1+k_2)l}\right)\right)},\ C_4(\xi)=\frac{e^{k_1\xi}-e^{k_2\xi}}{(k_1-k_2)\left(e^{(k_1+k_2)\xi}\left(1-e^{(-k_1+k_2)l}\right)\right)}.$$

Підставивши значення коефіцієнтів $C_1(\xi)\div C_4(\xi)$ у (10) отримаємо функцію Гріна. Після перетворень рівняння Гаммерштейна можна записати у вигляді [7]

$$u(\xi)=u_L(\xi)-\tau\int_0^l G(z,\xi)u^4dz, \tag{11}$$

де
$$u_L(\xi)=u_0G'_z(0,\xi)-u_lG'_z(l,\xi)+\omega_1\int_0^l G(z,\xi)dz. \tag{12}$$

Рівняння (11) нелінійне. Тому для знаходження його чисельного розв'язку застосуємо модифікований метод Ньютона[7]. Напишемо (11) у вигляді

$$u(\xi)=u-\tau\bar{u}\,G(z;\xi)dz, \tag{13}$$

де $\bar{u}$ – додатній корінь рівняння, середнє значення температури по координаті z

$$\bar{u}=A-B\bar{u}^4, \tag{14}$$

де
$$A=\frac{1}{l}\int_0^l u_L(\xi)d\xi,\qquad B=\frac{\tau}{l}\int_0^l d\xi\int_0^l G(z;\xi)dz. \tag{15}$$

Дещо інший вигляд мають математичні моделі температурного поля зони нагрівання дроту зовнішніми джерелами тепла. У таких моделях температурне поле визначається із розв'язку крайової задачі для однорідного рівняння теплопровідності, де зовнішні джерела тепла висвітлюються у граничних умовах. Визначення стаціонарного температурного розподілу у зоні нагріву рухомого середовища,через поверхню, зовнішніми джерелами тепла(променевий нагрів) з врахуванням перерозподілу температури за рахунок теплопровідності приводить до розв'язання наступної задачі для рівняння теплопровідності $\Omega_1:\{0<z<l, 0<r<r_0\}$

$$\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\lambda\frac{\partial^2T}{\partial z^2}-vc\rho_n\frac{\partial T}{\partial z}=0, \tag{16}$$

$$T(r,0)=u_0,\ \ T(r,l)=u_l, \tag{17}$$

$$\frac{\partial T(0,z)}{\partial r}=0,\ \ \frac{\partial T(a,z)}{\partial r}=-\varepsilon\sigma(u_c^4-T^4).$$

Після перетворень, шляхом усереднення за радіусом, задача в області $\Omega=\left\{0<z<\xi,\ \ \xi<z<l\right\}$ трансформується у наступну[7]

$$\frac{d^2u}{dz^2}-v\chi\frac{du}{dz}=\tau\left(u^4-u_c^4\right), 0<z<l, \tag{18}$$

$$u(0)=u_0,\qquad u(l)=u_l \tag{19}$$

або в операторній формі

$$Lu=\tau u^4-\tau u_c^4,\qquad L=\frac{d^2}{dz^2}-v\chi\frac{d}{dz}. \tag{20}$$

Будуємо функцію Гріна в області $\Omega=\left\{0<z<\xi,\ \ \xi<z<l\right\}$ аналогічно(6)–(10). Корені однорідного характеристичного рівняння лінійного оператора (20) будуть

$$x^2+v\chi x=0\Rightarrow x_1=0; x_2=-v\chi=k. \tag{21}$$

Тоді згідно визначення функція Гріна має вигляд

$$G(z;\xi)=\begin{cases}C_1(\xi)+C_2(\xi)\mathrm{e}^{-\kappa z}, z<\xi\\ C_3(\xi)+C_4(\xi)\mathrm{e}^{-\kappa z}, z>\xi\end{cases}, \tag{22}$$

$$C_1(\xi)=\frac{1-e^{k(\xi-l)}}{k(1-e^{-kl})},\ C_2(\xi)=\frac{e^{k(\xi-l)}-1}{k(1-e^{-kl})},$$

$$C_3(\xi)=\frac{e^{-kl}-e^{k(\xi-l)}}{k(1-e^{-kl})},\ C_4(\xi)=\frac{e^{k\xi}-1}{k(1-e^{-kl})}. \tag{23}$$

Рівняння Гаммерштейна задачі (18),(19) буде мати вигляд, аналогічний (11)

$$u(\xi)=u_L(\xi)-\tau\int_0^l G(z;\xi)u^4dz, \tag{24}$$

де

$$u_L(\xi)=\frac{(u_l+u_0)\left(e^{k(\xi-l)}-e^{-kl}\right)}{\left(1-e^{-kl}\right)}+\tau u_c^4\int_0^l G(z;\xi)dz. \tag{25}$$

Його розв'язок знаходимо аналогічно (13) модифікованим методо Ньютона[7].

Висновки

Розроблено алгоритм зведення крайової задачі, що моделює процес теплообміну рухомої циліндричної області з навколишнім середовищем, до інтегрального рівняння типу Гаммерштейна. Розглянуто випадки нагрівання середовища внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла. Побудовано функцію Гріна для спряженого диференціального оператора, яка використана у якості ядра рівняння типу Гаммерштейна. Це дозволило звести нелінійну двовимірну крайову задачу до одновимірного нелінійного інтегрального рівняння. Розв'язок рівняння отримано чисельним модифікованим методом Ньютона. Отримані інтегральні рівняння можуть бути використані у якості математичної моделі термічної обробки рухомого дроту.

Список використаної літератури

1. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа /Лизоркин П.И. – М.: Наука, 1981.–381с.
2. V. Lyashenko, E. Kobilskaya Control of Heat Source in a Heat Conduction Problem // AIP Conference Proceedings. – Sophia (Bulgaria), 2014. – 85(2014), P. 94–101.
3. V. Lyashenko, E. Kobilskaya. Methods for Solving of Inverse Heat Conduction Problems // Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, AIP Conference Proceedings– 2016. – P. 040005-1–040005-7.
4. Ляшенко В.П., Бриль Т.С. Математична модель температурнго поля рухомого дроту, що нагрівається зовнішніми джерелами тепла // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2012. – Вип. 1/2012 (72), – С. 50–53.
5. Ляшенко В.П., Григорова Т.А. Моделювання процесів спікання у контейнері. // ВестникХерсонскогонациональноготехническогоуниверситета. Вып. 3(39). – Херсон: ХНТУ, 2010. – С. 292 – 296.
6. Ляшенко В. П. Застосування методу Роте до розв′язання однієї нелінійної задачі теплопровідності / В. П. Ляшенко, Н. Г. Кирилаха // Вестник Херсонского государственного технического университета. – Вып. 3 (19), Херсон, 2003. – С. 235–239.
7. Верлань А.Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / Верлань А.Ф., Сизиков В.С.–К. Наукова думка 1978.–291с.