УДК 539.3

Д. М. МАКСИМЧУК
Хмельницький національний університет

ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ КОНТАКТУ ПРУЖНОГО ШАРУ ТА СПІВВІСНИХ ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРІВ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ

В рамках лінеаризованної теорії пружності представлена осесиметрична задача про тиск двох співвісних циліндричних штампів на шар з початковими (залишковими) напруженнями. Дослідження та результати подані в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, перетворення Ханкеля, інтегральне рівняння типу Фредгольма, метод послідовних наближень, потенціал Бартенєва-Хазановича.

Д. Н. МАКСИМЧУК
Хмельницкий национальный университет

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КОНТАКТА УПРУГОГО ШТАМПА И СООСНЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ С НАЧАЛЬНЫМИ (ОСТАТОЧНЫМИ) НАПРЯЖЕНИЯМИ

В рамках линеаризованной теории упругости рассмотрена смешанная задача о давлении упругих цилиндрических штампов на слой с начальными (остаточными) напряжениями. Исследования выполнены в общем виде для теорий больших начальных деформаций и различных вариантов теорий малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

Ключевые слова: линеаризированая теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, преобразования Ханкеля, интегральное уравнение типу Фредгольма, метод последовательных приближений, потенциал Бартенева-Хазановича.

D.N. MAKSYMCHUK
Khmelnytskyi National University

PRESENTATION OF SOLUTIONS FOR CONTACT PROBLEM FOR CYLINDRICAL PUNCHES WHICH INTERACT WITH THE LAYER WITH INITIAL (RESIDIAL) STRESSES

The paper deals with the mixed type task of measuring pressure of an elastic cylinders dies upon a layer with initial (residual) stresses within the framework of linear elasticity theory. In general, the research was carried out for the theory of great initial deformations and different variants of the theory of small initial deformations with arbitrary structure of elastic potential.

Key words: the linearized elasticity theory, initial (residual) tension, Henkel integrals, the task to Fredholm equations, the method of consecutive approximations, the potential of Bartenev-Khasanovich.

Постановка проблеми

Актуальною проблемою фундаментальних розробок з механіки деформівного твердого тіла є дослідження впливу початкових напружень на контактні характеристики пружних тіл, які взаємодіють між собою, що важливо для практичного використання у різних галузях промислового комплексу. Незважаючи на існуючі досягнення у теорії контактної взаємодії пружних тіл, все ще залишається недостатньо розроблений ряд моментів, серед яких – врахування залишкових напружень у тілах на закон розподілу тиску в місцях їх дотику, що дозволить більш ефективно враховувати зносостійкість матеріалів шляхом правильної оцінки запасів міцності та достатньо знижувати їх матеріалоємність, зберігаючи у цілому потрібні функціональні характеристики. Тому є досить актуальним проведення нових теоретичних досліджень впливу початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружних тіл.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

На даний час проблеми, що відносяться до контактних задач пружних тіл, представлені у численних публікаціях періодичних видань. Вплив початкових напружень на закон розподілу контактних зусиль у пружних півплощині та півпросторі при їх контактній взаємодії з пружними штампами досліджено у статтях [1, 2] і подано загальний метод розв'язку контактних задач для півплощини та півпростору з початковими напруженнями, що взаємодіють з пружними тілами. Детальний огляд задач контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями представлений у роботах [3 – 5]. Вплив початкових напружень у пружному шарі при його контактній взаємодії з пружними співвісними штампами детально розглянуто у монографіях [6, 7]. Детальний огляд досліджень з контактної взаємодії пружних тіл з початковими напруженнями представлений статтями О. М. Гузя, В. Б. Рудницького, С. Ю. Бабича.

Мета дослідження

Метою даної роботи є розв'язок осесиметричної статичної задачі про контактну взаємодію двох співвісних пружних циліндричних штампів з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями. Розглядається випадок деформації шару під дією тиску двох співвісних кругових штампів різних радіусів і висоти без врахування сил тертя після виникнення у них початкового деформованого стану. Використовуючи співвідношення лінеаризованої теорії пружності в даній роботі представлено розв'язок змішаної осесиметричної задачі контактної взаємодії двох співвісних пружних циліндричних штампів з початковими напруженнями і пружного шару з початковими напруженнями. Дослідження виконано у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Викладення основного матеріалу дослідження

Припускаємо, що початкові стани у шарі та штампах однорідні та рівні, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна :

$$y_i = \lambda_i x_i\,,\quad \lambda_i = const,\quad y_i = x_i + U_i^0\,,\quad U_i^0 = \delta_{in}(\lambda_i - 1)x_i \quad (i,n = 1,2,3)$$

де δ_{in} – символ Кронекера, λ_m – коефіцієнт видовження вздовж координатної осі.

Також дія штампів викликає в шарі мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0;\quad S_0^{33} = 0;\quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$$

Розглядатимемо пружні ізотропні тіла з довільною формою пружного потенціалу, а у випадку ортотропних тіл, вважатимемо, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформівному стані. Припускається, що пружні (скінченні) циліндричні штампи та шар виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів, які взаємодіють на площі основ штампа.

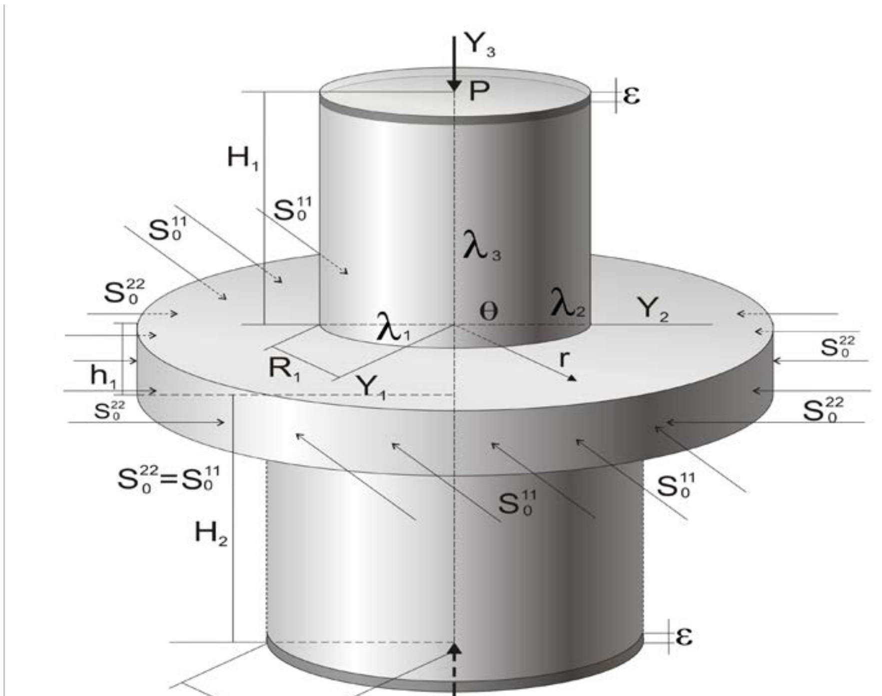

Рис. 1. Тиск двох співвісних циліндричних штампів на шар з початковими (залишковими) напруженнями.

Пружний необмежений шар з початковими напруженнями деформується під дією тиску двох співвісних попередньо напружених циліндричних штампів (рис. 1.) різної висоти і радіусів. Товщина шару в початковому деформованому стані пов'язана з товщиною у недеформованому стані відношенням $h_1 = \lambda_3 h_2$. Зовнішнє навантаження P викликає переміщення вільних торців в напрямку осі симетрії Oy_3. Бокові поверхні штампів, а також поверхні шару за межею контакту вільні від зовнішніх зусиль, а в області контакту тіл дотичними зусиллями нехтуємо. Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил.

У системі кругових циліндричних координат $(r,\ \theta,\ z_i)$ $(i=\overline{1,2})$ такій постановці задачі відповідають граничні умови:

1) на торцях пружних штампів з початковими напруженнями:

$$u_z^{(1)}=-\varepsilon_+;\quad \tau_{rz}^{(1)}=0;\quad \forall(r)\in[0,R_1],\quad y_3=h+H_1, \tag{1}$$

$$u_z^{(2)}=-\varepsilon_-;\quad \tau_{rz}^{(2)}=0;\quad \forall(r)\in[0,R_2],\quad y_3=-h-H_2, \tag{2}$$

2) на боковій поверхні пружних штампів

$$\sigma_z^{(1)}=0;\quad \tau_{rz}^{(1)}=0;\quad \forall(y_3)\in[0,H_1],\quad r=R_1, \tag{3}$$

$$\sigma_z^{(2)}=0;\quad \tau_{rz}^{(2)}=0;\quad \forall(y_3)\in[0,H_2],\quad r=R_2, \tag{4}$$

3) на межі пружного шару в області контакту

$$u_3=u_z^{(1)};\quad \tilde{Q}_{33}=\sigma_z^{(1)};\quad \tilde{Q}_{3r}=t_{rz}^{(1)}=0,\quad \forall(r)\in[0,R_1],\quad y_3=-h_1, \tag{5}$$

$$u_3=u_z^{(2)};\quad \tilde{Q}_{33}=\sigma_z^{(2)};\quad \tilde{Q}_{3r}=t_{rz}^{(2)}=0,\quad \forall(r)\in[0,R_2],\quad y_3=-h_2 \tag{6}$$

4) на межі пружного шару поза областю контакту

$$\tilde{Q}_{33}=\tilde{Q}_{3r}=0,\quad \forall(r)\in[r,+\infty],\quad y_3=\pm h \tag{7}$$

Умови рівноваги приводять до співвідношення:

$$\int_0^{R_1}\rho\cdot Q_{33}(0,\rho)\Big|_{y_3=h_1}d\rho=\int_0^{R_2}\rho\cdot Q_{33}(0,\rho)\Big|_{y_3=h_2}d\rho.$$

А рівнодіюча зовнішніх сил визначаються рівністю:

$$P=-2\pi\int_0^{R_1}\rho\cdot Q_{33}(0,\rho)\Big|_{y_3=h_1}d\rho=-2\pi\int_0^{R_2}\rho\cdot Q_{33}(0,\rho)\Big|_{y_3=h_2}d\rho.$$

Крім того, у випадку осесиметричної задачі використовуємо циліндричні координати $(r,\ \theta,\ z_i)$ $(i=\overline{1,2})$, де $z_i=y_3n_i^{-0,5}$.

Загальний розв'язок $\tilde{\chi}^{(i)}=\tilde{\chi}_1^{(i)}+v_1z_1\tilde{\chi}_2^{(i)}$ поставленої задачі для випадку рівних коренів $n_1=n_2$ будемо шукати у вигляді:

$$\tilde{\chi}^{(i)}=\varepsilon_\pm\Big\langle v_1z_1(1+z_1)\Big[(m_2-1)^{-1}+\chi_0^{(i)}\Big((1-m_2)^{-1}-2E^{(i)}(3H^{(i)}\theta_2^{(i)})^{-1}(3r^2-2z_1^2)\Big)\Big]+$$

$$+R^{(i)}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k^{(i)}\Big[J_0(\alpha_kr)\mu_k^{-1}\Big(\tilde{S}_2(\alpha_k^{(i)}z_1)+z_1\tilde{S}_3(\alpha_k^{(i)}z_1)\Big)+$$

$$+R^{(i)}(2\gamma_k)^{-1}b_{1k}^{(i)}\left(H^{(i)}\left(1+\frac{s_0(1-I_0(v_1\gamma_kR^{(i)}))}{v_1\gamma_kR^{(i)}I_1(v_1\gamma_kR^{(i)})}\right)+z_1\right)I_0(\gamma_kv_1r)S_1(\gamma_kz_1v_1)\Big]\Big\rangle \tag{8}$$

Для випадку нерівних коренів $n_1\neq n_2$:

$$\tilde{\chi}^{(i)}=\frac{(z_1+z_2)E^{(i)}}{H^{(i)}}(3r^2-2(z_1^2-z_1z_2+z_2^2))\chi_0^{(i)}+\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{b_2^{(i,k)}\Bigg[s_0\frac{I_1(\gamma_kv_2R^{(i)})}{I_1(\gamma_kv_1R^{(i)})}I_0(\gamma_kv_1r)\sin(\gamma_kz_1v_1)-I_0(\gamma_kv_2r)\sin(\gamma_kz_2v_2)\Bigg]+$$

$$+J_0(\alpha_k^{(i)}r)\Big[\tilde{S}_2(\alpha_k^{(i)}z_1)+\tilde{S}_3(\alpha_k^{(i)}z_2)\Big]\Bigg\}\chi_k^{(i)},\ (i{=}1,\ 2). \tag{9}$$

Напружено - деформівний стан у пружному шарі з початковими (залишковими) напруженнями для нерівних коренів $n_1\neq n_2$ визначимо через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля.

Врахувавши граничні умови запишемо:

$$U_3=\theta_3\left[\int_0^{\infty}\gamma(\xi)\xi^{-1}J_0(\xi\rho)d\xi-\int_0^{\infty}\gamma(\xi)\xi^{-1}F(\xi h^{(i)})J_0(\xi\rho)d\xi\right] \tag{10}$$

$$Q_{33} = \theta_1 \int_0^\infty \gamma(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi \text{ де}$$

$$\theta_1 = c_{44} l_1 (1 + m_1) \tilde{k},\ h^{(i)} = \frac{h}{R^{(i)}}\ \theta_3 = \frac{m_1(s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1}}\ \tilde{k} = \begin{cases} s_0 - s_1,\ \text{для } n_1 = n_2, \\ 1 + s,\ \text{для } n_1 \neq n_2. \end{cases}\quad f(\xi) = \frac{\xi^3 B_2}{\left(R^{(i)}\right)^3 (1 - F(\xi))}$$

З граничних умов визначаємо невідому функцію $\gamma(\xi)$ із парних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^\infty \frac{\gamma(\xi)}{\xi} J_0(\xi\rho) d\xi = g(\rho), \text{ при } \rho < R^{(i)},\ \left(i = \overline{1,2}\right) \int_0^\infty \gamma(\xi) J_0(\xi\rho) d\xi = 0, \text{ при } \rho > R^{(i)},\ \left(i = \overline{1,2}\right)$$

де при $n_1 = n_2$

$$g(\rho) = -\frac{\varepsilon^{(i)}}{\theta_3}\left[1 - \chi_0^{(i)} - \frac{2}{\theta_2}(m_2 - 1)\left(R^{(i)}\right)^2 \chi_0^{(i)} + \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k^{(i)} J_0(\mu_k \rho) + \frac{\left(R^{(i)}\right)^2}{2}(m_2 - 1)\sum_{k=1}^\infty \overline{b}_{1i}^{(k)} \chi_k^{(i)} I_0\left(\gamma_k^{(i)} \sqrt{n_1}\rho\right)\right] + \int_0^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} F\left(\xi h^{(i)}\right) J_1(\xi\rho) d\xi,$$

$$\text{де } \theta_2 = E^{(i)}\left(\frac{8}{n_1} m_1\left(1 + H^{(i)}\right) - \frac{4H^{(i)}}{\sqrt{n_1}} + (1 - m_2)\frac{\left(R^{(i)}\right)^2}{H^{(i)}}\right),\ \theta_4 = \frac{1}{n_1}\left(\sqrt{n_1}(m_2 - 1) - m_1 s_0\right),\ \left(i = \overline{1,2}\right)$$

$$\rho = \frac{r}{R^{(i)}},\ 0 \le \rho \le 1$$

при $n_1 \neq n_2$:

$$g(\rho) = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\theta_3}\left[\chi_0^{(i)} - 1 - \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k^{(i)} J_0(\mu_k \rho) + \frac{\theta_3}{\varepsilon^{(i)}} \int_0^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} F\left(\xi h^{(i)}\right) J_1(\xi\rho) d\xi\right],\ \left(i = \overline{1,2}\right)$$

Визначимо невідомі коефіцієнти $A_0^{(i)}$, $A_k^{(i)}, C_0^{(i)}$, $B_k^{(i)}$, $E_k^{(i)}$, $F_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$ через константи χ_k $(k = 0,1,2,...)$ для $n_1 = n_2$:

Тоді отримаємо інтегральне рівняння ФредгольмаII роду відносно функції $f(\xi)$:

$$\frac{\gamma(\xi)}{\xi} = -\frac{2}{\pi\theta_3}\overline{P}(\xi) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(t) F\left(t h^{(i)}\right) \psi_0(\xi, t)}{t} dt\quad (i = \overline{1,2}),$$

$$\psi_n(x, y) = \int_0^1 t^n \cos xt \cos yt dt, \text{ для } n_1 \neq n_2:$$

$$\frac{\gamma(\xi)}{\xi} = \frac{2\varepsilon^{(i)}}{\pi\theta_3}\left[\left(\chi_0^{(i)} - 1\right)\psi_0(\xi, 0) - \theta_4 \sum_{k=1}^\infty \chi_k^{(i)} \psi_0(\xi, \mu_k) + \frac{\theta_3}{\varepsilon^{(i)}}\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} F\left(t h^{(i)}\right) \psi_0(\xi, t) dt\right], (i = \overline{1,2})$$

Пропускаючи деякі викладки, матимемо у результаті, що невідома функція, яка входить у вирази вектора переміщень і тензора напружень для попередньо напруженого шару, визначається шляхом зведення задачі до парних інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду із застосуванням методу послідовних наближень при $\lambda_1 > \lambda_{kr}$. Враховуючи що даний метод збіжний, розв'язок представлено у вигляді рядів через нескінченну систему констант, які визначаються з системи регулярних лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\eta_k^{(i)} \chi_k^{(i)} + \sum_{n=0}^\infty \eta_{kn}^{(i)} \chi_n^{(i)} = \beta_k^{(i)},\ (i = \overline{1,2}; k = 0,1,2,...) \tag{11}$$

Визначивши невідомі константи χ_i $(i = 0,1,2,..)$, можна обчислити силу, переміщення і напруження у пружних штампах [6, 7] та шарі з початковими напруженнями по формулах (8-9).

При обчисленні напружень та переміщень для шару з початковими напруженнями більшість інтегралів у кінцевому вигляді не обчислюються. Тому, починаючи із другого наближення, підінтегральні функції розкладаємо у ряди за степенями h^{-1}, що дозволяє обчислити коефіцієнти (8) наближено [8].

Система була розв'язана методом редукції, числові значення для потенціалів конкретної структури представлені в таблиці 1

Таблиця 1

Значення для потенціалів конкретної структури

λ_1 \ k	Гармонічний потенціал	Потенціал Трелоара	Потенціал Бартенєва-Хазановича
0.595	∞	-	-
0.667	1.739	∞	-
0.693	1.541	4.160	∞
0.7	1.506	3.448	19.791
0.9	1.116	1.077	1.165
1	1	1	1

Висновки

Вплив початкових напружень на напружено-деформований стан шару і співвісних штампів, а також рекомендації щодо застосування отриманих результатів полягають у наступному:

1) початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень у циліндричних штампах, а при розтягненні – до їх збільшення (для переміщень все відбувається навпаки);

2) найбільший вплив початкових напружень відзначений на бічній поверхні штампів у зрізах $0 \le \xi \le 1$.

3) вплив початкових напружень для пружного шару аналогічний, причому на характер дії початкових напружень його товщина не впливає, а впливає лише на їх значення;

4) наявність попередньо напруженого стану під час контактної взаємодії пружних тіл дає змогу регулювати контактні напруження та переміщення при розрахунках на міцність деталей машин та конструкцій;

4) початкові напруження більш суттєво у кількісному плані, діють у високоеластичних матеріалах в порівнянні з більш жорсткими, але якісно їхній вплив буде збережено;

5) небезпечною є ситуація, коли початкові напруження наближаються до значень поверхневої нестійкості, оскільки контактні напруження і переміщення різко змінюють свої значення.

Отже, вплив початкових напружень, що виявлений при дослідженні, є суттєвим для стисливих та нестисливих тіл. Це підтверджено одержаними аналітичними, графічними та числовими результатами і дає можливість використовувати їх в інженерних розрахунках.

Список використаної літератури

1. Гузь А.Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика – 2004. – 40, № 7. – С.41– 69.
2. Гузь А. Н. Контактная задача о давлении упругого штампа на упругое полупространство с начальными напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 8. – с. 3 - 11.
3. Guz, A.N. Contact problems for elastic bodies with initial stresses. Focus on Ukrainian research / A.N. Guz, S.Y. Babich, V.B. Rudnitsky // Apple Mech. Rev. Vol. 51, nos May 1998. – P. 343 – 371.
4. Александров В. М. Контактная задача для предварительно напряженного физически нелинейного упругого слоя / В. М. Александров, В. С. Порошин//Инж. журн. «Механика твердого тела».– 1984. - № 6. – с. 79 – 85.
5. Гузь А. Н. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, В. Б. Рудницкий // Развитие идей Л. А. Галина в механике. – М. – Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2013. – 480 с.
6. Гузь А. Н. Контактные задачи для упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. – Хмельницкий, изд. ПП Мельник. – 2004. – 682 с.
7. Гузь А. Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. - Хмельницкий, изд. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
8. Максимчук Д. М. Розв’язання контактної задачі для попередньо напруженого шару та двох співвісних пружних штампів з початковими (залишковими) напруженнями / Д. М. Максимчук // Доповіді Національної Академії наук України : Науково-теоретичний журнал. - 2015. - № 4. - С. 49-55