

УДК 681.324:516.15

І.В. МЕЛЬНИК, В.В. ГАЙДАМАКА

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**ДОЛГОСРОЧНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ**

В статье приведен обзор методов анализа самоподобного трафика телекоммуникационных сетей путём расчёта функции корреляции и параметра Хёрста. Показана связь этих методов расчёта с методами фрактального анализа. Показано, что при определенном значении параметра Хёрста для самоподобного трафика пропускная способность телекоммуникационной системы может быть ниже, чем для классической односерверной с однородным входным информационным потоком. Указывается на значение методов фрактального анализа в современных научных исследованиях, включая анализ самоподобных свойств объектов природы и эстетических особенностей произведений искусства.

Ключевые слова: случайный процесс, функция корреляции, долгосрочный процесс, самоподобный процесс, параметр Хёрста, фрактальный анализ, фрактальное броуновское движение, фрактальный гауссовский шум.

І.В. МЕЛЬНИК, В.В. ГАЙДАМАКА

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**ДОВГОСТРОКОВІ ЗАЛЕЖНОСТІ ТА ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ**

У статті наведений огляд методів аналізу самоподібного трафіка телекомунікаційних мереж через розрахунок функції кореляції та параметра Хьорста. Показаний зв'язок цих методів розрахунку з методами фрактального аналізу. Також показано, що за певних значень параметра Хьорста для самоподібного трафіка пропускна здатність телекомунікаційної мережі може бути меншою, ніж для класичної одно серверної з однорідним вхідним інформаційним потоком. Вказується на важливе значення методів фрактального аналізу у сучасних наукових дослідженнях, а також для аналізу естетичних особливостей мистецьких творів.

Ключові слова: випадковий процес, функція кореляції, довгостроковий процес, самоподібний процес, параметр Хьорста, фрактальний аналіз, фрактальний броунівський рух, фактальний гаусівський шум

I.V. MELNYK, V.V. HAIDAMAКА

National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorskiy Kyiv Politechnical Institute"**LONG-TIME DEPENDENCES AND FRACTAL ANALYSE**

The review of methods of analyzes of self-similar traffic in the telecommunication networks through calculation the correlation function and Hurst parameter is presented in this article. Connection between this calculation method and methods of fractal analyze is shown. It is pointed out also, that for special values of Hurst parameters for the self-similar traffic the throughput of communication systems can be smaller, than for classic system with one server with homogeneous input information flux. The significance of fractal analyse methods for the modern science, including analyse of self-similar properties of natural phenomena and aesthetics particularities of art works, is also described.

Keywords: random process, correlation function, long-time process, self-similar process, Hurst parameter, fractal analyze, fractal Brown motion, fractal Gauss noise.

Введение

Сегодня в теории телекоммуникаций и в теории компьютерных сетей большое значение приобретают методы анализа самоподобных процессов [1, 2], которые основаны на методах теории систем массового обслуживания [3] и на методах фрактального анализа [4], однако имеют свои особенности. В целом методы фрактального анализа являются достаточно универсальными и используются для анализа разных явлений природы, от астрономических исследований до биологических объектов и кристаллических наноструктур [4], поэтому математический аппарат теории фракталов заслуживает особого внимания. В связи с этим целью данной обзорной статьи является анализ особенностей использования существующих методов фрактального анализа для описания самоподобных долгосрочных временных зависимостей. В качестве примера приводится анализ самоподобного трафика компьютерной сети.

Постановка задачі

Задача анализа трафика долгосрочных зависимостей тесно связана с методами определения функции корреляции [3] и с фрактальным анализом самоподобных структур [4]. Определение долгосрочных временных зависимостей в теории сигналов и в теории телекоммуникационных систем непосредственно связано с классическим понятием функции корреляции [1 – 3]. Долгосрочными называются такие сигналы или потоки событий, для которых существует связь между значениями сигнала в разные, достаточно отдаленные моменты времени t_1 и t_2 . Допустим, что в соответствии с классической теорией вероятности заданы отсчеты случайного сигнала или времена наступления случайного события [3]:

$$X = \{x_i : t = 0, 1, 2\}. \tag{1}$$

Корреляционную функцию и коэффициент корреляции случайного процесса определим обычным образом, через математическое ожидание и дисперсию случайной величины X [3]:

$$R(x_i, x_{i+k}) = M(x_i - M(X)) \cdot M(x_{i+k} - M(X)) < \infty; \tag{2}$$

$$D(X) = M(x_i - M(X))^2 = \sigma^2; r(k) = \frac{R(x_i, x_{i+k})}{D(X)}.$$

Единственное отличие от классической постановки задачи состоит в том, что расчеты требуется проводить для больших значений k . Тогда долгосрочной зависимостью называется такая зависимость $r(x)$, для которой функция корреляции не стремится к нулю при условии, что X стремится к бесконечности [3, 4]. Проведём, в соответствии с формулами (1), (2), анализ трафика компьютерной сети Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», который был предоставлен авторам дирекцией компании «КПИ Телеком» для учебных целей. Данные по загрузке компьютерной сети снимались в течении четырёх часов и представлены на рис. 1, а – г.

Анализ долгосрочной временной зависимости для трафика компьютерной сети с использованием методов теории вероятности и математической статистики. На рис. 1 приведен входной и выходной трафик компьютерной сети компании «КПИ Телеком». Входной трафик показан черным, а выходной – серым цветом, значения скорости передачи информации приведены в гигабитах за секунду. Проведем расчеты для выходного трафика с использованием матрицы корреляции [3], снимая показания каждые 5 минут в течении получаса. В результате получаем 8 временных выборок, по 6 значений в каждой.

Таблица 1.

Трафик сети компании «КПИ Телеком» в соответствии с рис. 1

№ реализации	$t = 0$	$t = 5$ мин	$t = 10$ мин	$t = 15$ мин	$t = 20$ мин	$t = 25$ мин
1. 10:00 – 10:25	1,2 Гб/с	0,85 Гб/с	0,85 Гб/с	0,75 Гб/с	0,75 Гб/с	0,9 Гб/с
2. 10:30 – 10:55	0,9 Гб/с	0,85 Гб/с	0,8 Гб/с	0,9 Гб/с	0,85 Гб/с	0,8 Гб/с
3. 11:00 – 11:25	1,2 Гб/с	0,82 Гб/с	0,82 Гб/с	1,1 Гб/с	1,2 Гб/с	1,1 Гб/с
4. 11:30 – 11:55	1,0 Гб/с	1,0 Гб/с	1,25 Гб/с	1,0 Гб/с	1,0 Гб/с	1,1 Гб/с
5. 12:00 – 12:25	1,2 Гб/с	1,1 Гб/с	1,0 Гб/с	0,95 Гб/с	0,9 Гб/с	0,9 Гб/с
6. 12:30 – 12:55	0,9 Гб/с	1,0 Гб/с	1,1 Гб/с	1,2 Гб/с	1,1 Гб/с	1,0 Гб/с
7. 13:00 – 13:25	0,9 Гб/с	1,4 Гб/с	1,3 Гб/с	1,2 Гб/с	1,35 Гб/с	1,3 Гб/с
8. 13:30 – 13:55	1,25 Гб/с	1,15 Гб/с	1,35 Гб/с	1,3 Гб/с	1,2 Гб/с	1,3 Гб/с

Далее расчет коэффициента корреляции для долгосрочного, нестационарного процесса проводится по следующей методике [1, 2].

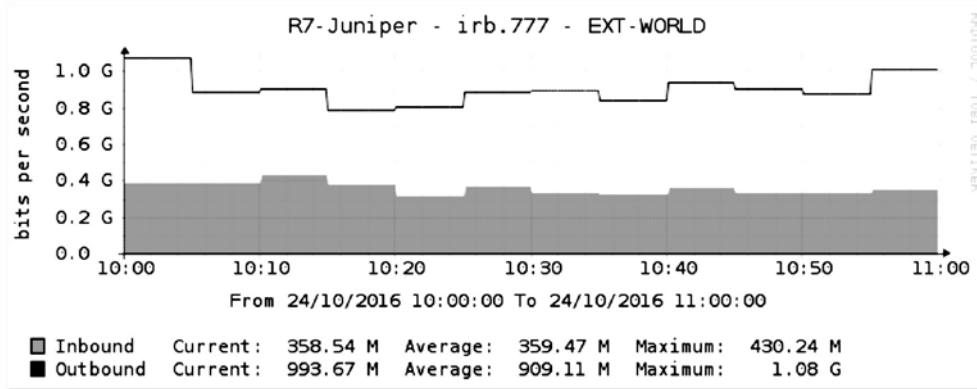
1. Формируется матрица значений трафика сети, приведенная в таблице 1.
2. Поскольку случайный процесс не является стационарным, рассчитывается значение математического ожидания и среднего квадратического отклонения по всей выборке из 48 значений [1 – 2]:

$$M_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N X_k, \quad S_N = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N (X_j - M)^2}. \tag{3}$$

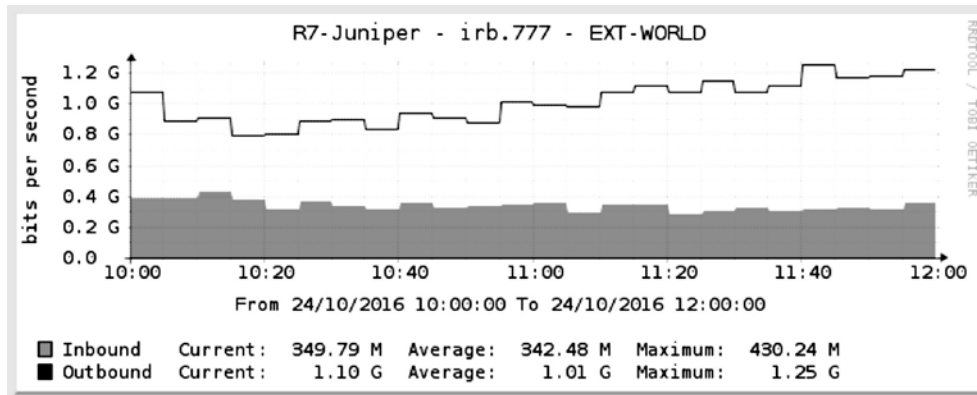
Для данных, приведенных в таблице 1, $M_N = 1,0487$ Гб/с, $S_N = 0,18$ Гб/с.

2. По известному значению математического ожидания определяется интегральное отклонение [1, 2]:

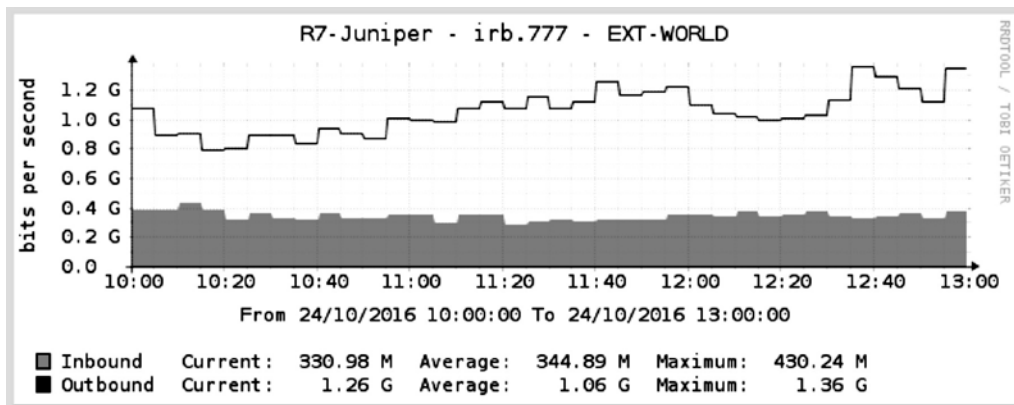
$$D_j = \sum_{k=1}^j X_k - j \cdot M, \quad j = 1 \dots N. \tag{4}$$



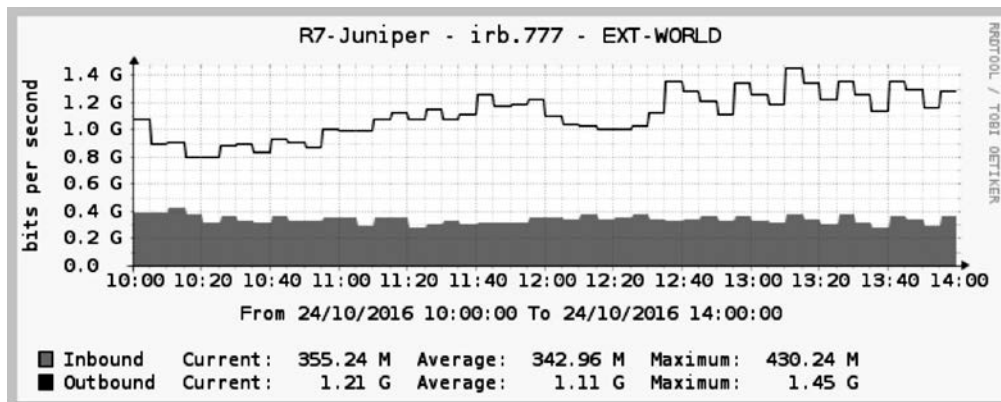
a)



б)



в)



г)

Рис. 1. Трафик сети «КПИ – Телеком» в течении четырёх часов (публикуется с разрешения руководства компании)

3. По значениям интегрального отклонения определяется параметр изменчивости случайного процесса R_N , который зависит от количества элементов в выборке N [1, 2]:

$$R_N = \max_{1 < j < N} (D_j) - \min_{1 < j < N} (D_j). \quad (5)$$

Для данных, приведенных в таблице 1, $R_N = 3,8184$.

В соответствии с соотношениями (3, 5) для долгосрочной зависимости определяется параметр Хёрста H [1, 2]:

$$H = \frac{\ln\left(\frac{R}{S}\right)}{\ln\left(\frac{N}{2}\right)}. \quad (6)$$

Для числовых данных, приведенных в таблице 1, $H = 0,9596$, что является очень высоким значением. Для временных зависимостей, которым не свойственно самоподобие, этот параметр обычно близок к значению $H \approx 0,5$, а для систем с самоподобными временными зависимостями он обычно лежит в диапазоне $0,57 < H < 0,9$. Возможный диапазон значений параметра Хёрста составляет от 0,5 до 1 [1, 2]. В следующем разделе будут рассмотрены основные свойства самоподобных временных зависимостей.

Самоподобные временные зависимости и их основные свойства. Принцип самоподобия временных зависимостей состоит в том, что, хотя их отдельные реализации за короткие и длительные промежутки времени не одинаковы, они являются очень похожими по форме и визуально практически совпадают [5 – 7]. Очевидно, что именно такими являются и временные зависимости, приведенные на рис. 1. Для исследования степени зависимости самоподобных процессов и их долгосрочности эффективно используется теория временных рядов [5 – 7]. В теории системного анализа и временных рядов даётся определение агрегированных случайных процессов, выборки которых $X^{(m)}$ и математическое ожидание случайной величины в выборке $X_k^{(m)}$ определяются на непересекающихся временных интервалах следующим образом [1, 2, 5 – 7]:

$$X^{(m)} = \{X_k^{(m)} : k = 0, 1, 2, \dots\}; \quad X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m X_{k-1}^{(m+i)}. \quad (7)$$

Агрегированные процессы, которые описываются соотношениями (7), отличаются тем, что они являются стационарными и имеют ограниченную функцию корреляции, а их дисперсия описывается степенной зависимостью [5 – 7]:

$$D(X^{(m)}) \approx a \cdot m^{-\beta}; \quad m \rightarrow \infty; 0 < \beta < 1. \quad (8)$$

Физический смысл соотношения (8) заключается в том, что вариация средних выборок, которые описываются соотношением (7), уменьшается медленнее, чем объём выборки m . С учетом соотношений (2, 7, 8) корреляционную функцию долгосрочного случайного процесса можно записать следующим образом [1, 2, 5 – 7]:

$$r(k) = k^{-\beta}; \quad \sum_k r(k) = \infty. \quad (9)$$

Сущность соотношений (9) состоит в том, что автокорреляционная функция долгосрочного самоподобного процесса гиперболически уменьшается, но этот процесс происходит настолько медленно, что функциональный ряд (9) расходится. Именно эта особенность автокорреляционной функции и является основной отличительной чертой современной теории случайных процессов [5 – 7]. Этим и отличается современная теория случайных процессов от классической теории, в которой рассматриваются только сходящиеся асимптотические функциональные ряды [3].

Тем не менее, как и в классической теории случайных процессов, в теории самоподобных процессов рассматривается связь спектра случайного процесса с его корреляционной функцией, которая записывается в виде соотношения, аналогичного преобразованию Фурье [1, 2]:

$$f(\omega) = c \cdot \omega^{-\gamma}; \quad f(\omega) = \sum_k r(k) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot k); \quad \gamma = 1 - \beta; \omega \rightarrow 0. \quad (10)$$

Очевидно, что функциональный ряд (10) является аналогом теоремы Винера – Хинчина в классической теории информации для эргодического стационарного случайного процесса [8].

Следует отметить, что параметр β в соотношениях (9) связан с параметром Хёрста, определяемым по выборке значений сигнала в соответствии с соотношением (6), следующим образом [1, 2]:

$$\beta = \frac{1 - H}{2}. \quad (11)$$

Особенности свойств самоподобных временных зависимостей позволяют сделать вывод о том, что функция корреляции самоподобных процессов либо совпадает с автокорреляционной функцией агрегированного потока [1, 2]:

$$r(k) = r^m(k), \tag{12}$$

либо стремится к ней при условии, что количество потоков m стремится к бесконечности [1, 2]:

$$r(k) = \lim_{m \rightarrow \infty} (r^m(k)). \tag{13}$$

Следует также отметить, что для самоподобных процессов, в соответствии с соотношением (6), зависимость $\lg(R/S)$ от $\lg(N)$ близка к линейной, а введенный параметр корреляционной функции β легко определить как тангенс угла наклона этой зависимости [1, 2]. В следующем разделе статьи будут рассмотрены особенности анализа пропускной способности телекоммуникационных систем, информационные потоки в которых описываются самоподобными временными зависимостями с высоким значением параметра Хёрста.

Анализ эффективности работы телекоммуникационных систем с самоподобными информационными потоками. Отдельно в теории телекоммуникационных систем рассматривается анализ пропускной способности системы с памятью в случае, если информационный поток в такой системе описывается долгосрочной временной зависимостью. Обычно при этом рассматривается не количество передаваемой информации, как во временных зависимостях, аналогичных приведенным на рис. 1, а количество передаваемых пакетов, поскольку такие математические модели чаще всего строятся на основе методов теории систем массового обслуживания [1 – 3].

В теории самоподобных случайных процессов показано, что если в телекоммуникационной системе поток входных заявок за единицу времени составляет λ , а количество обработанных выходных заявок – μ , тогда число необработанных заявок, находящихся в памяти системы, можно оценить из соотношения:

$$A(t) = \lambda \cdot t + \sqrt{a \cdot \lambda} \cdot Z(t), \quad N(t) = \sup_{s \leq t} (A(t) - \mu(t - s)), \tag{14}$$

где $Z(t)$ – нормализованный случайный процес с параметром Хёрста H , a – положительный нормализованный множитель. Из соотношения (14) слдеует, что при выполнении необходимого условия стабильной работы системы массового обслуживания:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \tag{15}$$

вероятность того, что количество необработанных системой пакетов N будет больше, чем $x = \frac{1}{\mu}$, связана с параметром Хёрста H и определяется соотношением [1, 2]:

$$\Pr(N > x) = \Pr\left(\sup_{t \geq 0} \left(Z(t) - \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{a \cdot \lambda}} \cdot t \right) > \frac{x}{\sqrt{a \cdot \lambda}}\right) = f\left(\left(\frac{x}{\sqrt{a \cdot \lambda}}\right)^{\frac{1-H}{H}} \cdot \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{a \cdot \lambda}}\right). \tag{16}$$

Из полученного соотношения (16), полагая, что $\Pr(N > x) = \varepsilon$, где ε – заданная сколь угодно малая величина, можно записать [1, 2]:

$$\frac{1-\rho}{1} \cdot \mu^{\frac{H-1}{H}} \cdot \frac{1-H}{x} \cdot \frac{1-H}{H} = a^{\frac{1}{2 \cdot H}} \cdot f^{-1}(\varepsilon) = \text{const}. \tag{17}$$

Следует отметить, что аналитическое соотношение (17), позволяющее оценить пропускную способность телекоммуникационных систем с самоподобными информационными потоками, является достаточно универсальным. Например, в случае $H = 0,5$ из него легко получить классическое соотношение - закон Литгла для односерверной системы, в которой распределение входного потока заявок подчиняется закону Пуассона, а время обработки заявок – экспоненциальному закону распределения [9]:

$$x = \frac{\rho}{1 - \rho}. \tag{18}$$

С другой стороны, на основе соотношения (17) можно получить известное аналитическое соотношение для модели телекоммуникационной системы с постоянным временем обработки поступающих информационных пакетов, которые тоже распределены по закону Пуассона [9]:

$$\mu \cdot T = \frac{1 - \rho}{1 - \rho}, \tag{19}$$

где T – среднее время нахождения информационных пакетов в очереди.

Отдельный интерес в теории телекоммуникационных систем представляет анализ самоподобных информационных потоков, в которых используются модели фрактального броуновского движения и фрактального гауссовского шума. Эти модели будут рассмотрены в следующем разделе статьи.

Модели фрактального броуновского движения и фрактального гауссовского шума. В теории телекоммуникационных сетей нормальным фрактальным броуновским движением с параметром Хёрста H называется случайный процесс $X(t)$, обладающий следующими свойствами [1, 2].

1. Приращения случайной величины x являются стационарными и подчиняются нормальному закону распределения.

2. В начале случайного процесса $X(t)$ значение величины x равно нулю, то есть $X|_{t=0} = 0$.

3. Средняя разность между значениями случайного процесса $X(t)$ в разные моменты времени t_1 и t_2 не зависит от точек отсчета времени и составляет $M\left(X|_{t=t_1} - X|_{t=t_2}\right) = 0$.

4. Средний квадрат разности между значениями случайного процесса $X(t)$ в разные моменты времени t_1 и t_2 не зависит от точек отсчета времени и составляет $M\left(X|_{t=t_1} - X|_{t=t_2}\right)^2 = k \cdot |t_2 - t_1|^H$.

5. Величина x имеет нормальное распределение в любой момент времени $t > 0$.

6. Из свойств 3 и 4 следует, что дисперсия фрактального броуновского движения составляет:

$$M\left(X|_{t=t_1} - X|_{t=t_2}\right)^2 = k \cdot |t_2 - t_1|^H. \quad (20)$$

Фрактальным гауссовским шумом называется шум, для которого случайная величина x подчиняется нормальному распределению

$$p(x) = \frac{m}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (21)$$

а автокорреляционная функция определяется соотношением:

$$r(k) = \frac{|k+1|^{2\cdot H} - 2 \cdot |k|^{2\cdot H} + |k-1|^{2\cdot H}}{2}. \quad (22)$$

Соотношения (20) – (22) широко используются для расчета параметров самоподобных временных зависимостей, при этом тип используемой модели определяется исходя из экспериментальных данных о пропускной способности компьютерной сети, аналогичных приведенным на рис. 1. Тут важным является коэффициент самоподобия случайного процесса α , который характеризует количество выбросов в анализируемом случайном процессе или сигнале, которое сохраняется независимо от временного масштаба. Такой самоподобный случайный процесс $y(t)$ можно описать с использованием простого аналитического соотношения, известного из теории фрактального анализа [1, 2, 4]:

$$y(t) = a^\alpha \cdot y\left(\frac{t}{\alpha}\right). \quad (23)$$

С другой стороны, если известно, что долгосрочный случайный процесс является фрактальным броуновским движением, а время обработки пакетов в телекоммуникационной системе является постоянной величиной, соотношение (17) для оценки максимальной пропускной способности телекоммуникационной системы можно переписать следующим образом:

$$\mu \cdot T = \frac{\rho^{\frac{H-1}{2}}}{\frac{H}{(1-\rho)^{1-H}}}. \quad (24)$$

Результаты расчета эффективности работы телекоммуникационных систем с использованием соотношений (18), (19), (24), а также их анализ, будут приведены в следующем разделе статьи.

Результаты моделирования и их анализ

Результаты расчетов пропускной способности телекоммуникационной сети с коммутацией пакетов для разных моделей сетевого трафика приведены на рис. 2.

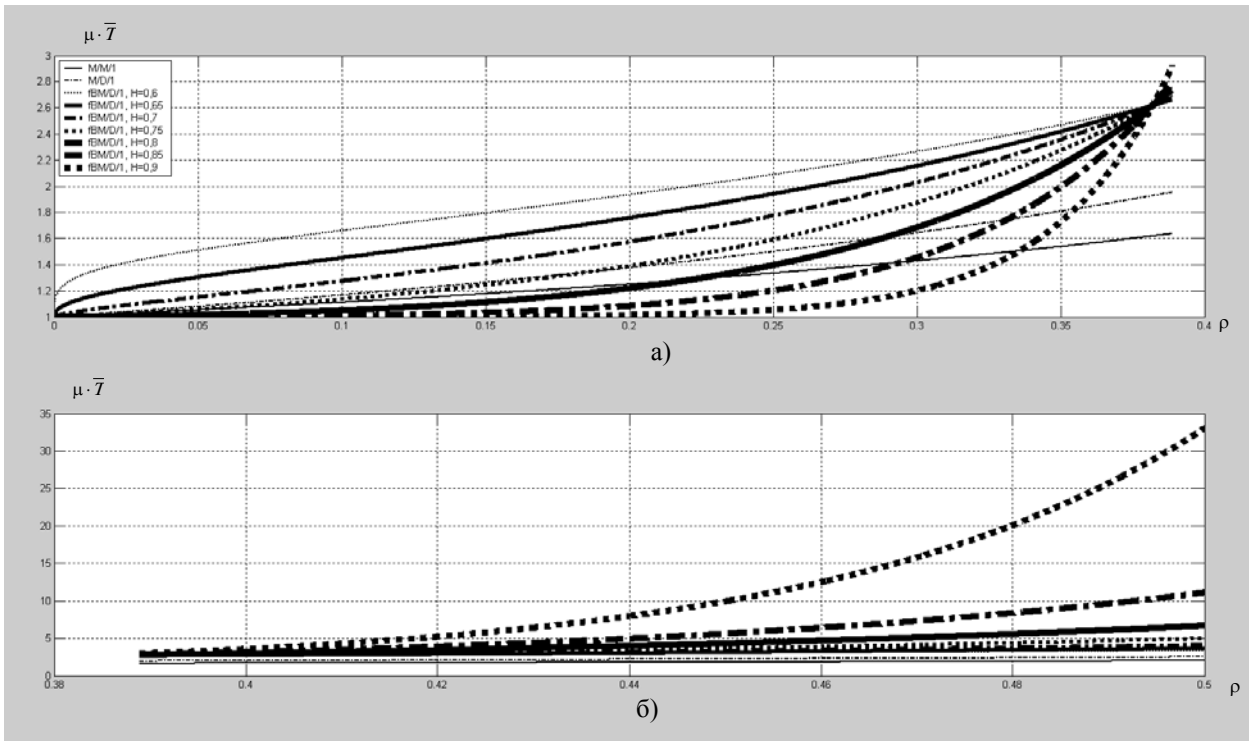


Рис. 2. Зависимости среднего времени нахождения пакетов в телекоммуникационной системе от интенсивности входного информационного потока и от производительности системы для разных классических и самоподобных моделей информационного потока: а – для относительно невысоких значений интенсивности входного потока; б – для относительно высоких значений интенсивности входного потока

На рисунке введены следующие обозначения, являющиеся стандартными в теории телекоммуникационных сетей в соответствии с классификацией по Кендаллу [6, 9].

1. M/M/1 – входной информационный поток подчиняется закону распределения Пуассона, время обработки пакетов – экспоненциальному закону распределения, 1 сервер.
2. M/D/1 – входной информационный поток подчиняется закону распределения Пуассона, время обработки пакетов – постоянное, 1 сервер.
3. fBM/D/1 – входной информационный поток является самоподобным и рассматривается как фрактальное нормальное броуновское движение, время обработки пакетов – постоянное, 1 сервер.

Из приведенных графических зависимостей можно сделать вывод, что для больших значений интенсивности входного потока пакетов, для самоподобных информационных потоков время обработки пакетов может быть значительно больше, чем для классических моделей M/M/1 и M/D/1. Этот результат впервые был получен в начале девяностых годов в работах В.Е. Лиланда для анализа систем с самоподобным трафиком [1, 2]. Работы В.Е. Лиланда и его коллег стали теоретической основой для развития технологий телекоммуникаций для всемирной компьютерной сети Интернет. Кроме простых аналитических моделей самоподобного трафика сети для более точных оценок используются также численные методы имитационного моделирования, которые основаны на использовании генератора случайных чисел и рассмотренных выше стохастических моделей фрактального броуновского движения и фрактального гауссовского шума (20 – 22) [1, 2].

О других возможностях использования методов фрактального анализа. Методы фрактального анализа сложных объектов природы и временных процессов начали развиваться с середины семидесятих годов XX века с публикации фундаментальной монографии Б.Мандельброта [4]. Основой фрактального анализа является соотношение (23), позволяющее определить степень зависимости между отдельными элементами анализируемой структуры или системы и понять, насколько свойства системы повторяют свойства её элементов, и какие новые свойства, не свойственные её элементам, обретает система как единое целое. Для самоподобных случайных процессов важными также являются соотношения (12, 13) для их корреляционной функции. Кроме этих обобщенных соотношений для описания корреляционных функций самоподобных процессов используют также распределение Парето [1, 2]:

$$p(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}, \quad F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a, \quad x \leq b \quad (25)$$

и распределение Вейбулла [1, 2]:

$$p(x) = 1 - \exp(-\beta x^\alpha), \quad F(x) = \alpha \beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha). \quad (26)$$

Функции распределения Парето и Вейбулла (25, 26) отличаются от классических функций распределения тем, что функции плотности вероятности $p(x)$ для них не всегда асимптотически стремятся к нулю, поэтому для них не всегда существуют моментные функции. Например, для функции распределения Парето (25) математическое ожидание существует только при $\alpha > 1$, а дисперсия – только при $\alpha > 2$, и рассчитываются эти параметры следующим образом [1, 2]:

$$M = \frac{ab}{a-1}, \quad D = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}. \quad (27)$$

Эти свойства корреляционных функций самоподобных процессов связаны с расходимостью функционального ряда (13).

Еще Б.Мандельброт обратил внимание на возможность использование принципов самоподобия для исследования широкого спектра физических, биологических, социальных процессов, поскольку принцип повторяемости, или фрактальности, является достаточно универсальным [4]. Он свойственен также произведениям искусства, в частности, он часто встречается в архитектуре, живописи, музыкальных произведениях, независимо от их возраста и авторства. Поиск новых случайных и закономерных свойств в системе из повторяющихся объектов составляет основу современного системного анализа [7], и поэтому сегодня методы фрактального анализа являются теоретической базой для разных областей науки. Основными областями их применения стали астрономия, термодинамика, гидродинамика, точная механика, биология и медицина, бионика, кристаллография [4]. Что касается анализа произведений искусства и их эстетических особенностей, то описанный выше метод анализа самоподобных временных зависимостей может быть использован для оценки эстетической ценности музыкальных произведений по временной зависимости звукового сигнала. В данном случае параметр Хёрста даст информацию о том, насколько музыкальное произведение является сложным и оригинальным с композиционной точки зрения и в какой степени повторяемость отдельных моментов влияет на эстетические особенности предлагаемой музыкальной композиции.

Выводы

Рассмотренные в работе методы анализа самоподобных случайных временных зависимостей, основанные на методах фрактального анализа, имеют большое практическое значение для формирования сигналов с заданными информационными свойствами и для оптимизации трафика загруженных телекоммуникационных сетей. Учитывая, что математический аппарат теории фракталов является достаточно универсальным и может быть использован для объектов и систем разной физической природы, возможны и другие интересные применения описанного подхода.

Список использованной литературы

1. Крылов В.В., Самохвалова С.С. Теория телетрафика и её приложения. – СПб.: «БХВ – Петербург», 2005. – 288 с.
2. Столлинс В. Современные компьютерные сети. – Питер, СПб., 2003. – 703 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы // Компьютинг в математике, физике, биологии. – М.: Издательство института компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
5. Бідюк П.І., Романенко В.Д., Тимошук О.Д. Аналіз часових рядів. Навчальний посібник. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 600 с.
6. 103. Кендалл М., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. — М.: Наука, 1976. – 736 с.
7. Згуровський М.З., Понкратова Н.Д. Основи системного аналізу. – К.: Видавнича група ВНУ, 2007. – 544 с.
8. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации. – М.: Высшая школа, 1989. – 320 с.
9. Ирвин Дж., Харль Д. Передача данных в сетях: инженерный подход. – Перевод с английского. – СПб: БХВ, 2003. – 448 с.