УДК 62-50

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ
Днепровский национальный университет им. О.Гончара

НЕКОТОРЫЕ ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрены проблемные вопросы использования методов математического моделирования при изучении реальных физических процессов. Для конкретности все определения и выводы без уменьшения общности формулируются для линейных динамических систем с постоянными коэффициентами. Показано, что необходимым условием успешного применения методов математического моделирования является использование при математическом моделировании адекватных математических описаний. Рассмотрены также важные вопросы построения алгоритмов достоверного прогноза поведения динамических систем.

Ключевые слова: адекватные математические описания, регуляризация, прогнозирование.

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ
Дніпровський національний університет ім. О.Гончара

ДЕЯКІ ВІДКРИТІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Розглянуто проблемні питання використання методів математичного моделювання при вивченні реальних фізичних процесів. Для конкретності все визначення і висновки без зменшення загальності формулюються для лінійних динамічних систем з постійними коефіцієнтами. Показано, що необхідною умовою успішного застосування методів математичного моделювання є використання при математичному моделюванні адекватних математичних описів. Розглянуто також важливі питання побудови алгоритмів достовірного прогнозу поведінки динамічних систем.

Ключові слова: адекватні математичні описи, регуляризація, прогнозування.

Yu.L. MENSHIKOV
Dnipro National University

SOME OPEN QUESTIONS OF MATHEMATICAL MODELING

The problematic questions of using mathematical modeling methods in studying real physical processes are considered. For concreteness, all definitions and conclusions without loss of generality are formulated for linear dynamic systems with constant coefficients. It is shown that the necessary condition for successful application of methods of mathematical modeling is the use of adequate mathematical descriptions in mathematical modeling. Important questions of constructing algorithms for reliable predictions of the behavior of dynamical systems is studying.

Keywords: the adequate мathematical descriptions, regularization, forecasting.

Постановка проблемы

Введение. Методы математического моделирования находят все более широкое применение в практике изучения реальных физических процессов [1]. При этом идет процесс усложнения математических моделей и расширение областей их использования. На этом фоне стали просматриваться некоторые нерешенные проблемы, которые сдерживают использование математических методов. Настоящая работа посвящена рассмотрению ряда открытых вопросов, возникающих при использования методов математического моделирования.

Для изложения дальнейшего материала необходимо принять некоторые определения для однозначной формулировки проблем и полученных результатов.

Будем называть *математической моделью* физического процесса совокупность уравнений, которые отражают физические законы исследуемого процесса.

Внешними воздействиями будем называть функции, которые присутствуют в математической модели в качестве независимых слагаемых.

Начальные и различные граничные условия для исследуемого процесса будем называть *дополнительными условиями*.

Совокупность математической модели физического процесса, внешних воздействий и дополнительных условий будем называть *математическим описанием* физического процесса [2].

Процесс компьютерного решения уравнений математической модели физического процесса с учетом внешних воздействий и дополнительных условий будем называть *математическим моделированием*.

В научной литературе возможны и иные определения.

Практическое значение результатов математического моделирования зависит от степени совпадения результатов математического моделирования для выбранного математического описания реального процесса с экспериментальными данными [2,3]. Если совпадение результатов математического моделирования с экспериментом плохое, то дальнейшее использование этих результатов является проблематичным. Важным понятием в этой связи является адекватность построенного математического описания изучаемому физическому процессу [3]. Однако, это определение адекватности является довольно общим и требует уточнений и дополнений. Кроме этого, остается открытым вопрос о возможности использования адекватных математических описаний для выполнения прогноза поведения физического процесса.

Упомянутые общие вопросы математического моделирования и являются предметом исследований в данной работе.

Постановка задачи. В дальнейшем будем рассматривать вопросы, связанные с использованием методов математического моделирования для изучения физических процессов, на примере динамической системы, движение которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

Пусть физический процесс характеризуется в общем случае некоторым количеством переменных (переменных состояния) $x_1, x_2, \ldots, x_k$, зависящих от бесконечного числа исходных параметров процесса $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$. Выбор характеристик физического процесса $x_1, x_2, \ldots, x_k$, которые подлежат изучению, определяются конечными целями исследований.

Будем полагать, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ удовлетворяют некоторой системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = F(x, z), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t))^T \in X$ есть вектор-функция переменных состояния ($(.)^T$ – знак транспонирования), $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_i(t), \ldots)^T \in Z$ – вектор-функция внешних воздействий. Под внешними воздействиями (нагрузками) будем понимать функции $z_1(t), z_2(t), .., z_l(t), \ldots$, которые изменяются независимо от субъективных факторов или свойств и поведения исходной математической модели (1). На практике существенное влияние на физический процесс оказывает лишь конечное количество внешних воздействий $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t))^T \in Z$, а остальными влияниями можно пренебречь.

Зафиксируем решение $x^0(t, x_1^0, x_2^0, ..x_k^0)$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям: $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, ..x_k(t_0) = x_k^0$. В некоторой малой окрестности этого решения отклонения $\tilde{x}(t, \tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0, ..\tilde{x}_k^0)$ от фиксированного решения $x^0(t, x_1^0, x_2^0, ..x_k^0)$ будут удовлетворять линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bz, \tag{2}$$

где $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_k(t))^T \in X$ есть вектор-функция переменных состояния, $z(t) = (z_1(t), z_2(t), .., z_n(t))^T \in Z$ – вектор-функция внешних воздействий, A, B – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности.

Пусть $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1)^T$ есть некоторая вектор функция внешних воздействий. Если при подстановке этой функции в (2) с учетом дополнительных условий получаем вектор-функцию характеристик $x^1(t) = (x_1^1(t), x_2^1(t), \ldots, x_k^1(t))^T$, которая отличается от измерения $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \ldots, \tilde{x}_k(t))^T$ на величину погрешности экспериментальных измерений характеристик δ, тогда математическое описание (уравнение (2) с вектор функцией $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1)^T$ и дополнительными условиями) будем называть *адекватным линейным математическим описанием* динамического процесса (*АЛМО*). Отклонение определяются в метриках функциональных пространствах X, Z.

Уточненное определение адекватности. На практике измерение характеристик переменных состояния ограничено лишь одной или двумя компонентами, например, только $x_1(t), x_2(t)$. Поэтому необходимо изменить определение адекватности математического описания: если при математическом моделировании с использованием математического описания (уравнения (2), функции $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_n^1)^T$, дополнительных условий) переменная $x_1^1(t)$ отличается от измерения функции $\widetilde{x}_1(t)$ на величину, которая не превышает погрешности экспериментального измерения этой характеристики δ_1, тогда математическое описание (уравнение (2) с вектор функцией $z^1 = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_n^1)^T$ и дополнительными условиями) будем называть *адекватным линейным математическим описанием* динамического процесса по переменной $x_1^1(t)$ ($ALMO_{x_1}$). По остальным переменным совпадение с экспериментом не обязательно [4]. Аналогично определяются адекватные математические описания в случае нескольких измерений переменных состояния. Метрика для сравнения в этом случае определяется целями конкретных исследований.

В настоящее время существует два основных подхода к проблеме построения адекватного математического описания [2,3,5,6,7].

Остается открытым вопрос о соответствии параметров математического описания реальным физическим параметров процесса. Анализ этого вопроса приводит к выводу, что для выполнения критерия адекватности необязательно, чтобы параметры математического описания соответствовали реальным физическим параметрам. Возможны «плохие» математические модели и «хорошие» модели внешних воздействий, которые в совокупности дают адекватное математическое описание по некоторой переменной состояния, и наоборот [4,9]. Например, математическая модель в [4] не учитывает важных характеристик реального физического процесса таких, как тепловые параметры, магнитные параметры, световое излучение и т.д. Однако, параметры межпланетных расстояний описывает достаточно хорошо. И этот факт подтверждается многими экспериментальными данными.

Из определения адекватного описания ясно, что *АЛМО* существует бесконечно много и эти описания могут существенно отличаться между собой. Это свойство показано в работах [2,3,9].

При этом также нет оснований полагать, что полученное таким образом математическое описание будет иметь параметры, близкие к реальным физическим параметрам. Это лишь пара (математическая модель и модель внешнего воздействия), которая обеспечивает адекватность результатов математического моделирования [2,3,9].

Кроме того, критерий адекватности существенно зависит от свойств норм функциональных пространств X, Z, которые используются. Дополнительно заметим, что существенна и величина отрезка изменения независимой переменной в оценке величины отклонения.

В последние годы в практике математического моделирования появляются задачи, в которых проверку адекватности выполнить невозможно по причине технической невозможности получить экспериментальные характеристики $x_1^1(t), x_2^1(t), \dots, x_k^1(t)$ [5]. В этом случае проверка адекватности может ограничиться лишь проверкой непротиворечивости результатов математического моделирования физическим законам. Например, в задаче, которая рассматривается в [5], адекватность может быть обеспечена пересечением направлений на предполагаемый источник в одной точке. Будем называть адекватность такого типа *качественной*.

Другим примером может служить задача моделирования эмоций [10,11]. В этом случае характеристики состояния физического процесса не могут быть измерены в принципе и поэтому о адекватности математического описания говорить нельзя и следует ограничиться лишь субъективными оценками адекватности.

Проблема прогнозирования поведения физического процесса. Одной из основных целей математического моделирования является достоверное прогнозирование поведения физических процессов. Необходимым условием достоверного прогнозирования является построение адекватного математического описания изучаемого процесса.

Однако, в процессе прогнозирования возникает ряд принципиальных трудностей. Например, каким образом выполнить проверку адекватности выбранного математического описания при прогнозировании? В новых условиях проведения эксперимента, для которых выполняется прогнозирование, могут измениться параметры физического процесса и внешнего воздействия на него. И при этом отсутствуют гарантии, что в новых условиях будет выполняться условие адекватности ранее построенного математического описания, так как оно базировалось на прошлом эксперименте. Таким образом, выполнение основного требования адекватности невозможно проверить при отсутствии эксперимента в новых условиях.

Математическое моделирование, с использованием адекватного математического описания (*АМО)*, для изучения физического процесса в новых условиях малопригодно, так как математическое описание локально и в общем случае непригодно для новых условий.

Однако, если параметры *АМО* являются устойчивыми к малым изменениям исходных данных, тогда близость результатов математического моделирования с использованием такого *АМО* с будущими экспериментами при малых изменениях исходных данных (эксперимента и параметров математической модели процесса) будет гарантирована.

Следовательно, необходимо изменять постановку задачи синтеза *АМО* методом подбора функции внешнего воздействия z_δ: необходимо найти функцию z_δ, которая обеспечивает адекватность соответствующего математического описания и является устойчивой к малым изменениям исходных данных. Для случая второго способа синтеза *АМО* необходимо найти параметры матриц A, B, которые обеспечивают адекватность соответствующего математического описания и являются устойчивыми к малым изменениям исходных данных.

Следует отметить, что в данных задачах нет смысла рассматривать поведение адекватного математического описания при стремлении погрешности исходных данных к нулю. В силу этого, не имеет смысла оценивать погрешность полученного математического описания. Эта погрешность может иметь произвольную величину и ее величина не имеет никакого значения для целей дальнейшего математического моделирования. Для целей дальнейшего использования адекватного математического описания более важно, чтобы параметры математического описания были устойчивы к малым изменениям исходных данных.

Примеры расчетов конкретных адекватных математических описаний представлены в работах [2,3,9].

Для построения прогноза можно использовать следующий прием: искусственно изменять параметры матриц A, B и переходить к постановкам задачи для определения внешних воздействий z_δ для класса моделей [2,3,9]. Решение таких задач следует трактовать как функции, которые показывают лишь качественные изменения результатов математического моделирования при изменении параметров.

В ряде случаев возможна постановка обратных задач синтеза *АМО* с целью получения гарантированной оценки прогноза: в определенном смысле [9].

Остается пока без ответа вопрос о проверке достоверности прогноза с использованием $ALMO_{x_1}$, которое получено только для одной переменной состояния и в котором адекватность по остальным переменным отсутствует в общем случае.

Все рассмотренные выше вопросы остаются открытыми и для математических моделей в алгебраической форме, и в форме дифференциальных уравнений в частных производных, и в иных формах.

Заключение

В работе рассмотрены некоторые открытые вопросы использования методов математического моделирования в практике на примере динамических систем. Предложен ряд подходов для целей получения достоверных прогнозов поведения физических процессов.

Список использованной литературы

1. Введение в математическое моделирование: Учеб. Пособие / Под ред. П.В. Трусова. — М.: Университетская книга, Логос, 2007. - 440 с.
2. *Menshikov Yu.L.,* Synthesis of Adequate Mathematical Description as Solution of Special Inverse Problems // European Journal of Mathematical Sciences, –v. 2, –n. 3, –2013, –P.256-271.
3. *Меньшиков Ю.*, Об адекватности результатов математического моделирования // Труды. Междунар. конференции "Моделирование-2008", –К., –Украина, –2008, –С.119-124.
4. *Перехрест В.І.* Закон планетних відстаней у вихровій теорії планетарних систем // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка, вип. 15, том 1, –2011,– С.21-33.
5. Turbal M.,Turbal M.,Bomba A.,Radoveniuk O..Method of Earthquake Prediction Based on the Solitone Shocks Mechanisms // Journal of Environmental Science and Engineering A1, –2012, –P.11-20.
6. *Степашко В.С.*, Метод критической дисперсии как аналитический аппарат теории индуктивного моделирования // Проблемы управления и информатики, –Киев, –Украина, –2, –2008, –С.27-32.
7. *Губарев В.Ф.,* Метод итеративной идентификации многомерных систем с неточными данными, ч.1. Теоретические основы // Проблемы управления и информатики, –Киев, –Украина, –2, –2008, –С.8-26.
8. *Жуков О.А.,* Алгоритмы итеративной идентификации многомерных систем // *Тр. 15 международной конференции по автоматическому управлению "Автоматика-2008"*, –Одесса: INIA, –Украина, –2008, –С.774-777.
9. *Меньшиков Ю.Л., Поляков Н.В.,* Идентификация моделей внешних воздействий. – Вид-во «Наука та Освіта», Днепропетровск, Украина, –2009, –188с.
10. Breitenecker F., Judex F., Popper N., Breitenecker K., Mathe A., Mathe A., Wassertheurer S. Laura and Petrarca - True Emotions vs. Modelled Emotions // Proc. 6-th Vienna Conference on Mathematical Modelling, 2009, – C.46-69, Vienna, full Papers CD Volume, Vienna Univ. of Technology, ISBM 978-3-901608-35-3.
11. Rinaldi, S. *Laura and Petrarch: an intriguing case of cyclical love dynamics.* SIAM J.App. Math. Vol. 58 (1998), No. 4, pp. 1205-1221.