

УДК537.2+519.632+681.7

Л. І. МОЧУРАД

Науково-навчальний інститут підприємництва та перспективних технологій національного університету «Львівська Політехніка»

П. Я. ПУКАЧ

Національний університет «Львівська Політехніка»

## ЕФЕКТИВНИЙ ПІДХІД ДО РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ КВАДРУПОЛЬНОЇ ЛІНЗИ

*На одному модельному прикладі розглянуто всі основні аспекти чисельного розв'язування крайових задач з абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку. Такі задачі виникають при математичному моделюванні систем електронної оптики. Запропоновано ефективну методіку, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь у поєднанні з апаратом теорії груп.*

*Ключові слова: математичне моделювання; електронні оптичні системи; інтегральні рівняння; теорія потенціалу; абелева група симетрії; метод колокації.*

Л. И. МОЧУРАД

Научно-учебный институт предпринимательства и перспективных технологий национального университета «Львовская Политехника»

П. Я. ПУКАЧ

Национальный университет «Львовская Политехника»

## ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ КВАДРУПОЛЬНОЙ ЛИНЗЫ

*На одном модельном примере рассмотрены все основные аспекты численного решения краевых задач с абелевой группой симметрии шестнадцатого порядке. Такие задачи возникают при математическом моделировании систем электронной оптики. Предложена эффективная методика в основе которой лежит метод интегральных уравнений в сочетании с аппаратом теории групп.*

*Ключевые слова: математическое моделирование; электронные оптические системы; интегральные уравнения; теория потенциала; абелева группа симметрии; метод коллокации.*

L. I. MOCHURAD

Scientific-educational institute of entrepreneurship and advanced technologies of Lviv Polytechnic National University

P. YA. PUKACH

Lviv Polytechnic National University

## AN EFFECTIVE APPROACH TO THE CALCULATING OF THE ELECTROSTATIC FIELD OF A QUADRUPOLE LENS

*In one model example, all the main aspects of the numerical solution of boundary value problems with the abelian symmetry group of the sixteenth order is considered. Such problems arise in the mathematical modeling of electronic optics systems. An effective method based on the method of integral equations in combination with the apparatus of group theory is proposed.*

*Keywords: mathematical modeling; electronic optical systems; integral equations; potential theory; abelian group of symmetry; collocation method.*

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Електронно-оптичні системи є основними компонентами сучасних дослідницьких комплексів, за допомогою яких вивчають складні фізичні процеси, пов'язані з рухом заряджених частинок у відповідних потенціальних полях. Наприклад, відомо [1], що такі електронно-оптичні системи як електростатичні лінзи використовують в багатьох електронних приладах. Так, лінзи і їх системи є основними частинами сучасних потужних електронних мікроскопів та прискорювачів. Останні відіграють важливу роль в ядерній фізиці. На сьогодні в більшості мікросондів, що знаходяться в експлуатації, використовують мультиплети (системи із двох, трьох або більшої кількості) електростатичних квадрупольних лінз [2]. За допомогою системи електродів типу «квадрупольна лінза», яка дозволяє створювати просторове неоднорідне електричне поле в усьому об'ємі системи електродів, здійснюють електрофізичне очищення трансформаторного масла від забруднень різного походження. Задану продуктивність очищення у реальних установках фільтрації можна отримати використанням паралельно з'єднаних систем просторових електродів типу «квадрупольна лінза» [3].

При розгляді значної кількості таких сучасних електронно-оптичних систем помічено, що вони володіють геометричною симетрією. Дана властивість дозволяє серед крайових задач електростатики виділити класи задач з абелевими групами симетрії скінченних порядків [4]. У цій статті без зменшення загальності на одному модельному прикладі продемонстровано усі основні ідеї методики наближеного чисельного розв'язування крайових задач, які виникають в теорії оптичних систем та володіють абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку.

**Постановка проблеми**

Розглянемо задачу розрахунку електростатичного поля квадрупольної лінзи. На рис. 1 представлена одна із можливих конфігурацій квадрупольної системи, в якій потрібно знайти розподіл потенціалу.

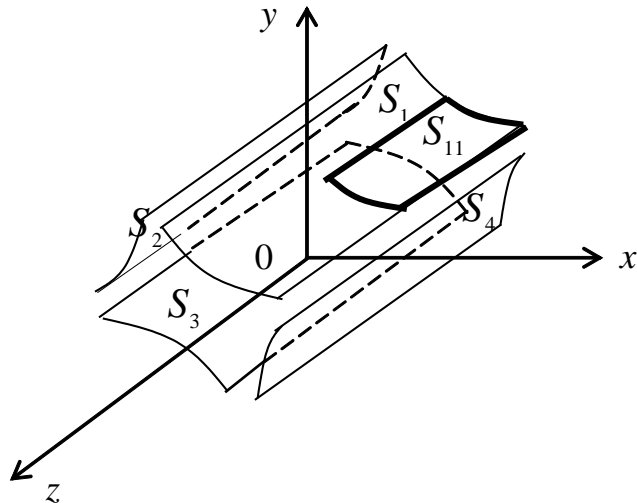


Рис. 1. Досліджувана квадрупольна система

У процесі математичного моделювання подамо відповідну систему електродів у такому вигляді:  $S := \bigcup_{i=1}^4 S_i$ , де  $S_i$  – гладкі розімкнені поверхні, що не мають спільних точок, обмежені кусково-гладкими контурами скінченної довжини. З математичної точки зору необхідно знайти функцію  $U \in H^1(\Omega_s, \Delta)$ , яка задовольняє умови

$$\Delta U = 0, \text{ в } \Omega_s := \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}; \tag{1}$$

$$\delta^\pm U = f \text{ на } S; \tag{2}$$

$$\lim_{|Q| \rightarrow \infty} U(Q) = 0, \text{ точка } Q \in \Omega_s, \tag{3}$$

де  $\delta^\pm : H^1(\Omega_s) \rightarrow H^{1/2}(S)$  – оператори сліду [5],  $f \in H^{1/2}(S)$  – задане граничне значення потенціалу, а

$$H^1(\Omega_s, \Delta) := \left\{ U \mid U \in H^1(\Omega_s), \Delta U \in L_2(\Omega_s) \right\}.$$

Нехай  $P, Q$  і т.д. – точки евклідового простору  $\mathbf{R}^3$ . Тоді, як відомо[6], проблема знаходження електростатичного поля еквівалентна такому загальному інтегральному рівнянню

$$(K\sigma)(P) \equiv \iint_S \sigma(Q) \cdot K(P, Q) dS_Q = f_k(P), P \in S_k (k = \overline{1, 4}), \tag{4}$$

де  $K(P, Q) := 1/\text{dist}(P, Q)$ , а  $f_k(P)$  – граничне значення потенціалу на електроді, який змодельовано поверхнею  $S_k (f_k(P) \equiv \text{const})$ , а  $\sigma(Q)$  - шукана сукупна густина розподілу зарядів на  $S$ , тобто  $\sigma(Q) := \{ \sigma_i(Q), Q \in S_i; i = \overline{1, 4} \}$ .

Мета дослідження

Особливості математичної моделі, подання еквівалентного двовимірного інтегрального рівняння та його параметризація. З метою максимального врахування наявної симетрії у геометрії поверхні  $S$  розіб'ємо кожен її складову  $S_i$  на чотири конгруентні елементи:  $S_i := \bigcup_{j=1}^4 S_{ij}$ . У відповідності з таким поділом  $S_i$  подамо (4) у вигляді

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint \sigma_{ij}(Q) \cdot K(P, Q) dS_Q = f_{kl}(P), P \in S_{kl} \quad (k, l = \overline{1, 4}), \tag{5}$$

де  $\sigma_{ij}(Q)$  і  $f_{kl}(P)$  – звуження  $\sigma_i(Q)$  і  $f_k(P)$  на  $S_{ij}$  і  $S_{kl}$ , відповідно.

Нехай у декартовій прямокутній системі координат  $Oxyz$  складові поверхні  $S$  задано за допомогою параметричних рівнянь:  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ ,  $a \leq u \leq b$ ,  $c \leq v \leq d$ . Тоді “біжучу” ( $Q$ ) і “контрольну” ( $P$ ) точки в  $\mathbf{R}^3$  можна подати у вигляді

$$Q = Q(u, v) := \{x(u, v); y(u, v); z(u, v)\}^T, P = P(u_0, v_0) := \{x(u_0, v_0); y(u_0, v_0); z(u_0, v_0)\}^T,$$

де  $a \leq u_0 \leq b$ ,  $c \leq v_0 \leq d$  – деякі фіксовані значення параметрів  $u$  і  $v$ . Так, подаючи фрагмент  $S_{11}$  поверхні  $S$ , можна скористатись такими параметричними рівняннями:  $x(u, v) = \text{sh } u$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ;  $y(u, v) = \text{ch } u$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ;  $z(u, v) = v$ ,  $0 \leq v \leq A (A > 0)$ .

Зауважимо, що тоді у (5) елемент поверхні  $dS_Q$  має вигляд  $[\text{sh}^2 u + \text{ch}^2 u]^{1/2} du dv$ , а відстань  $\text{dist}(P, Q)$ , за умови, що  $P \in S_{11}$ , можна обчислити за формулою:

$$\text{dist}(P, Q) = \left\{ \frac{\text{sh}^2\left(\frac{u-u_0}{2}\right)}{\left(\frac{u-u_0}{2}\right)^2} \left[ \text{sh}^2\left(\frac{u+u_0}{2}\right) + \text{ch}^2\left(\frac{u+u_0}{2}\right) \right] (u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 \right\}^{1/2}.$$

Враховуючи те, що  $\lim_{u \rightarrow u_0} \text{sh}^2\left(\frac{u-u_0}{2}\right) / \left(\frac{u-u_0}{2}\right)^2 = 1$ , легко зробити висновок про характер особливості в ядрі інтегрального рівняння (5).

Далі відповідно до попереднього поділу  $S$  подамо повний опис усіх фрагментів межі:

$$S_i = \bigcup_{j=1}^4 S_{ij} = \bigcup_{j=1}^4 \{Q_i(u, v); (u, v) \in D_j\} \quad (i = \overline{1, 4}),$$

де точки

$$Q_1(u, v) := (\text{sh } u, \text{ch } u, v)^T \in S_1, Q_2(u, v) := (-\text{ch } u, \text{sh } u, v)^T \in S_2,$$

$$Q_3(u, v) := (\text{sh } u, -\text{ch } u, v)^T \in S_3, Q_4(u, v) := (\text{ch } u, \text{sh } u, v)^T \in S_4,$$

$D_1 := [0, 1] \times [0, A]$ ,  $D_2 := [-1, 0] \times [0, A]$ ,  $D_3 := [0, 1] \times [-A, 0]$ ,  $D_4 := [-1, 0] \times [-A, 0]$ , причому  $A > 0$  – довільне дійсне число ( $A < +\infty$ ). Останнє дає можливість подати (5) у вигляді такої системи шістнадцяти інтегральних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint \sigma_{ij}(u, v) \cdot \hat{K}(Q_i(u, v); P) du dv = f_{kl}(P), \tag{6}$$

де  $P \in S_{kl} (k, l = \overline{1, 4})$ ,  $\hat{K}[Q_i(u, v); P] := K[Q_i(u, v); P] \cdot [\text{sh}^2 u + \text{ch}^2 u]^{1/2}$ , причому  $P := Q_k(u_0, v_0)$ ,  $(u_0, v_0) \in D_l$ ,  $\sigma_{ij}(u, v) := \sigma[Q_i(u, v)]$ ,  $(u, v) \in D_j$ .

**Викладення основного матеріалу дослідження**

**Врахування наявної геометричної симетрії у поданні сукупної граничної поверхні.** Для зменшення кількості рівнянь, які потрібно розв'язувати паралельно, до одного скористаємось такою властивістю розглядуваної проблеми.

**Лема 1.** Система інтегральних рівнянь (6) володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку, яка є прямим добутком абелевих підгруп  $\{e, \tau_x\}$ ,  $\{e, \tau_y\}$ ,  $\{e, \tau_z\}$  і циклічної групи другого порядку  $\{e, \beta\}$ , де  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_z$  — дзеркальні відображення відносно трьох попарно ортогональних площин  $yz$ ,  $xz$ ,  $xy$ , а  $\beta$  — поворот на кут  $\pi/2$ .

*Доведення.* Враховуючи запроваджену вище нумерацію фрагментів межі  $S$ , легко бачити, що  $S_{ij} = \tau_h S_{11} (i, j = \overline{1, 4}; h = 4(i-1) + j)$ , причому  $\tau_1 = e$  (тотожне перетворення),  $\tau_2 = \tau_x$ ,  $\tau_3 = \tau_z$ ,  $\tau_4 = \tau_z \circ \tau_x$ ,  $\tau_5 = \beta$ ,  $\tau_6 = \tau_y \circ \beta$ ,  $\tau_7 = \tau_z \circ \beta$ ,  $\tau_8 = \tau_y \circ \tau_z \circ \beta$ ,  $\tau_9 = \tau_y$ ,  $\tau_{10} = \tau_x \circ \tau_y$ ,  $\tau_{11} = \tau_z \circ \tau_y$ ,  $\tau_{12} = \tau_z \circ \tau_x \circ \tau_y$ ,  $\tau_{13} = \tau_x \circ \beta$ ,  $\tau_{14} = \tau_y \circ \tau_x \circ \beta$ ,  $\tau_{15} = \tau_z \circ \tau_x \circ \beta$ ,  $\tau_{16} = \tau_z \circ \tau_y \circ \tau_x \circ \beta$ . Звідси випливає, що  $S$  володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку  $GR_{16} := \{\tau_i\}_{i=1}^{16}$ . Обчислюючи прямий добуток циклічних груп  $\{e, \tau_x\}$ ,  $\{e, \tau_y\}$ ,  $\{e, \tau_z\}$ ,  $\{e, \beta\}$ , легко переконатись, що  $GR_{16}$  є їх прямим добутком. Таким чином, гранична поверхня  $S$  володіє абелевою групою симетрії шістнадцятого порядку. Оператор Лапласа інваріантний відносно групи рухів евклідового простору  $\mathbf{R}^3$ . Кожна група симетрії поверхні у  $\mathbf{R}^3$  є підгрупою заданої групи рухів, а тому аналогічною групою володіє гранична задача теорії потенціалу і отримане еквівалентне інтегральне рівняння. Отже, можна стверджувати, що (6) володіє абелевою групою симетрії  $GR_{16}$ , що і треба було показати.

*Лему доведено.*

Елементи розглядуваної групи  $\tau_i (i = \overline{1, 16})$  можна подати матрицями:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \tau_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_8 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \tau_9 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{10} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \tau_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далі, легко підрахувати, що

$$\begin{aligned} \tau_1^{-1} &= \tau_1, \tau_2^{-1} = \tau_2, \tau_3^{-1} = \tau_3, \tau_4^{-1} = \tau_4, \tau_5^{-1} = \tau_6, \tau_6^{-1} = \tau_5, \tau_7^{-1} = \tau_8, \tau_8^{-1} = \tau_7, \tau_9^{-1} = \tau_9, \tau_{10}^{-1} = \tau_{10}, \tau_{11}^{-1} = \tau_{11}, \tau_{12}^{-1} = \tau_{12}, \\ \tau_{13}^{-1} &= \tau_{13}, \tau_{15}^{-1} = \tau_{15}, \end{aligned}$$

$$\tau_5^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_7^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_{14}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_{16}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для подальшого перетворення (6) стає в нагоді таке твердження.

**Лема 2.** Система інтегральних рівнянь (6) допускає зображення

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint_{D_1} \sigma'_{ij}(u, v) \cdot \hat{K}[\tau_h^{-1} \cdot Q_1(u, v); \tau_{h'}^{-1} \cdot Q_1(u_0, v_0)] du dv = f'_{kl}(u_0, v_0), \tag{7}$$

де  $(u_0, v_0) \in D_1; k, l = \overline{1, 4}$ .

*Доведення.* Для отримання (7) здійснимо в (6) перехід до нового базису:

$$\sigma'_{ij}(u, v) := \sigma[\tau_h^{-1} \cdot Q_1(u, v)], (u, v) \in D_1; i, j = \overline{1, 4}; h = 4(i-1) + j;$$

$$f'_{kl}(u_0, v_0) := f_{kl}[\tau_{h'}^{-1} \cdot Q_1(u_0, v_0)], (u_0, v_0) \in D_1; k, l = \overline{1, 4}; h' = 4(k-1) + l.$$

Запроваджена таким чином “заміна змінних” дає можливість звести (6) до еквівалентної системи (7), де інтегрування здійснюється лише по конгруентній складовій межі, тобто  $S_{11}$ .

*Лемі доведено.*

Систему (7) зручно подати в такому матрично-операторному вигляді

$$(AG)(u_0, v_0) = \Psi(u_0, v_0), (u_0, v_0) \in D_1. \tag{8}$$

Тут  $A := (A_{hh'})_{h,h'=1}^{16}$  — матриця операторів;  $G(u, v) := [G_h(u, v)]_{h=1}^{16}$ ,  $\Psi(u_0, v_0) := [\Psi_{h'}(u_0, v_0)]_{h'=1}^{16}$  — стовпчики-функції такі, що  $G_h(u, v) := \sigma'_{ij}(u, v)$ ,  $\Psi_{h'}(u_0, v_0) := f'_{kl}(u_0, v_0)$ , а кожний з операторів  $A_{hh'}$  визначаємо за формулою

$$(A_{hh'}G_h)(u_0, v_0) := \iint_{D_1} G_h(u, v) \cdot \hat{K}[\tau_h^{-1} \cdot Q_1(u, v); \tau_{h'}^{-1} \cdot Q_1(u_0, v_0)] du dv. \tag{9}$$

Відомо [7], що характери групи  $\{e, \beta\}$  можна обчислити за формулою  $\chi^h(\beta^k) = e^{2\pi i k(h-1)/n}$  ( $k = 0, 1; h = 1, 2; n = 2$ ), де  $k$  — степінь перетворення  $\beta$ ,  $h$  — номер відповідного перетворення. Звідси таблиця характерів матиме вигляд

	$e$	$\beta$
$\chi^1$	1	1
$\chi^2$	1	-1

Для груп  $\{e, \tau_x\}$ ,  $\{e, \tau_y\}$ ,  $\{e, \tau_z\}$  таблиця характерів(матриця перетворення Фур'є) має вигляд  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , а оскільки група симетрії поверхні  $S$  є прямим добутком груп  $\{e, \beta\}$ ,  $\{e, \tau_x\}$ ,  $\{e, \tau_y\}$ ,  $\{e, \tau_z\}$ , то знайшовши прямий добуток відповідних чотирьох матриць перетворень Фур'є, отримаємо матрицю перетворення Фур'є, що відповідає  $GR_{16}$ :

$$F := (F_{hl})_{h,l=1}^{16} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі, використовуючи пряме і обернене перетворення Фур’є для розглядуваної групи шістнадцятого порядку, матрицю перетворення  $A$  у (8), з врахуванням (9), можна звести до діагонального вигляду, а систему інтегральних рівнянь (7) “розщепити” на шістнадцять незалежних рівнянь. На підставі проведених міркувань сформулюємо таку теорему.

**Теорема 1.** *Нехай система інтегральних рівнянь (7) володіє абелевою групою симетрії  $GR_{16}$ . Тоді її можна подати у вигляді*

$$(B_h \bar{G}_h)(u_0, v_0) = \bar{\Psi}_h(u_0, v_0) \quad (h = \overline{1, 16}; (u_0, v_0) \in D_1), \tag{10}$$

$$\bar{G}_h(u, v) := \sum_{s=1}^{16} F_{hs} \cdot G_s(u, v) \quad ((u, v) \in D_1), \quad \bar{\Psi}_h(u_0, v_0) := \sum_{s=1}^8 F_{hs} \Psi_s(u_0, v_0), \tag{11}$$

а  $B_h$  – елементи діагональної матриці  $F \cdot A \cdot F^{-1}$  операторів.

Розв’язавши послідовно шістнадцять інтегральних рівнянь (10), наближено, з можливим використанням методу колокації [8], знайдемо  $\bar{G}_h(u, v)$ . Далі, на основі (11), визначимо  $G_h(u, v) = \sigma'_{ij}(u, v)$ , що дозволяє обчислити потенціал у будь-якій точці  $P$  простору  $\mathbf{R}^3$  за формулою:

$$U(P) := \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \iint \sigma'_{ij}(u, v) \cdot \hat{K}[\tau_h^{-1} \cdot Q_1(u, v); P] dudv, \quad P \in \mathbf{R}^3 \setminus \bar{S}. \tag{12}$$

**1.1. Схема наближеного розв’язування двовимірних інтегральних рівнянь.** Нарешті зосередимо увагу на деяких аспектах чисельного розв’язування інтегральних рівнянь вигляду

$$\int_0^1 \int_0^A \sigma(u, v) \cdot \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_0, v_0), \tag{13}$$

де  $(u_0, v_0) \in (0, 1) \times (0, A)$ ,  $D(u, v)$  – гладка функція, а

$$R(u, v, u_0, v_0) := \left\{ [x(u, v) - x(u_0, v_0)]^2 + [y(u, v) - y(u_0, v_0)]^2 + [z(u, v) - z(u_0, v_0)]^2 \right\}^{1/2}.$$

Застосуємо метод колокації, обмежуючись кусково-постійною апроксимацією шуканої густини  $\sigma(u, v)$ . Для цього проведемо поділ області інтегрування на елементи

$$\Delta_{ij} := \left[ u_i - \frac{h_u}{2}, u_i + \frac{h_u}{2} \right] \times \left[ v_j - \frac{h_v}{2}, v_j + \frac{h_v}{2} \right], \quad \text{де } h_u = \frac{1}{N_u}, \quad h_v = \frac{1}{N_v}, \quad \text{а } u_i = (2 \cdot i - 1) \frac{h_u}{2}, \quad i = \overline{1, N_u},$$

$$v_j = (2 \cdot j - 1) \frac{h_v}{2}, \quad j = \overline{1, N_v}.$$

У відповідності з запровадженим поділом подамо (13) у вигляді

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \iint_{\Delta_{ij}} \sigma(u, v) \cdot \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_0, v_0).$$

Якщо  $(u, v) \in \Delta_{ij}$ , то за умов достатньої малості  $h_u$  і  $h_v$ ,  $\sigma(u, v) \approx \sigma(u_i, v_j)$ . Використовуючи позначення  $\sigma_{ij} := \sigma(u_i, v_j)$ , отримуємо наближений аналог (13)

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \sigma_{ij} \iint_{\Delta_{ij}} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_0, v_0),$$

де в якості  $(u_0, v_0)$  обираємо точки з множини  $\{(u_k, v_l)\}_{k=1, \overline{N_u}; l=1, \overline{N_v}}$ ,  $u_k = (2 \cdot k - 1) \frac{h_u}{2}$ ,  $v_l = (2 \cdot l - 1) \frac{h_v}{2}$ . Легко бачити, що тоді для знаходження наближених значень  $\sigma_{ij}$  шуканої густини необхідно розв'язати таку систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \sigma_{ij} \iint_{\Delta_{ij}} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv = U(u_k, v_l), \quad k = \overline{1, N_u}, \quad l = \overline{1, N_v}.$$

Для надання цій системі канонічного вигляду використаємо позначення:  $n := (j - 1) \cdot N_u + i$ ,  $m := (l - 1) \cdot N_v + k$ . Тоді  $\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_n$ , а  $U_{kl} := U(u_k, v_l) \rightarrow U_m$ , причому  $n = \overline{1, N_u \cdot N_v}$ ;  $m = \overline{1, N_u \cdot N_v}$ .

Таким чином отримуємо систему рівнянь для знаходження  $\sigma_{(j-1) \cdot N_u + i}$  ( $i = \overline{1, N_u}, j = \overline{1, N_v}$ ):

$$\sum_{i=1}^{N_u} \sum_{j=1}^{N_v} \sigma_{(j-1) \cdot N_u + i} \iint_{\Delta_{ij}} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_k, v_l)} dudv = U_{(l-1) \cdot N_v + k}, \quad k = \overline{1, N_u}, \quad l = \overline{1, N_v}.$$

Остання відрізняється від попередньої тим, що шукані величини  $\sigma_n$  і праві частини  $U_m$  є елементами двох одновимірних масивів розмірності  $N_u \cdot N_v$ . Ця обставина суттєво спрощує програмну реалізацію запровадженої методики. Матриця побудованої системи рівнянь за умови  $i = k$  і  $j = l$  містить подвійні невласні інтеграли. Розглянемо алгоритм наближеного обчислення таких інтегралів.

Не зменшуючи загальності, припустимо, що  $\Delta_0 := \left[ u_0 - \frac{h_u}{2}, u_0 + \frac{h_u}{2} \right] \times \left[ v_0 - \frac{h_v}{2}, v_0 + \frac{h_v}{2} \right]$ . Тоді типовим інтегралом, що вимагає наближеного обчислення, є такий

$$\iint_{\Delta_0} \frac{D(u, v)}{R(u, v, u_0, v_0)} dudv.$$

Враховуючи вигляд  $R(u, v; u_0, v_0)$  і можливість розвинення в ряд Тейлора функцій  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  і  $z(u, v)$  в околі точки  $(u_0, v_0)$ , подамо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{D(u, v)}{R(u, v; u_0, v_0)} = F(u, v; u_0, v_0) + \frac{D(u_0, v_0)}{\left[ (\text{sh}^2 u_0 + \text{ch}^2 u_0)(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{1/2}},$$

де  $F(u, v; u_0, v_0) = \frac{D(u, v)}{R(u, v; u_0, v_0)} - \frac{D(u_0, v_0)}{\left[ (\text{sh}^2 u_0 + \text{ch}^2 u_0)(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{1/2}}$ .

Тоді  $\iint_{\Delta_0} \frac{D(u_0, v_0)}{\left[ \left( \operatorname{sh}^2 u_0 + \operatorname{ch}^2 u_0 \right) (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{1/2}} dudv$  обчислюємо аналітично, використовуючи формулу

$$\int_{\frac{a}{c}}^{\frac{\bar{b}}{\bar{d}}} \int_{\frac{a}{c}}^{\frac{\bar{d}}{c}} \left[ (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \right]^{-1/2} dudv = \sum_{\left(\frac{a}{b}\right)} a \ln \left( \frac{d + \sqrt{d^2 + a^2}}{-c + \sqrt{c^2 + a^2}} \right) + \sum_{\left(\frac{c}{d}\right)} c \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{-a + \sqrt{a^2 + c^2}} \right),$$

де  $b := \bar{b} - u_0$ ,  $a := u_0 - \bar{a}$ ,  $d := \bar{d} - v_0$ ,  $c := v_0 - \bar{c}$ . У свою чергу, застосовуючи одну із кубатурних формул, інтеграл  $\iint_{\Delta_0} F(u, v; u_0, v_0) dudv$  обчислюємо наближено. При цьому виникає необхідність

обчислення  $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} F(u, v; u_0, v_0)$ . Легко показати, що границя функції  $F(u, v; u_0, v_0)$  при  $u \rightarrow u_0$  і

$v \rightarrow v_0$  є обмеженою величиною, тобто  $\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} F(u, v; u_0, v_0) = 0$ .

**1.2. “Плоске” наближення суттєво просторової проблеми.** Нехай згадані вище поверхні  $S_i (i = \overline{1, 4})$  нескінченно довгі циліндричні, твірні яких нескінченно тонкі рівномірно заряджені по довжині нитки, паралельні до однієї із координатних осей (як у нашому випадку). Припустимо також, що згадані поверхні в перерізі з довільною площиною, перпендикулярною до цієї осі, утворюють деяку сукупність розімкнених дуг. Тоді значення потенціалу в довільній точці простору не залежить від однієї координати. Тому для розрахунку поля достатньо обчислити потенціал у довільній точці площини, тобто в просторі  $\mathbf{R}^2$  [9]. Таким чином можна запровадити математичну модель так званого “плоского” електростатичного поля, деталі дослідження якої висвітлені у роботах [10, 11].

Провівши ряд чисельних експериментів, було помічено, що в разі переважання однієї геометричної складової поверхні (вздовж осі  $OZ$ ) над іншими значення потенціалу в центральних поперечних перерізах сукупної поверхні  $S$  мало змінюється. На рис. 2 відображено швидкість зміни відповідної похибки  $E_A$ :

$$E_A := \|u_A - u_{2A}\| = \max_{1 \leq i \leq N} |u_A(P_i) - u_{2A}(P_i)|$$

між обчисленими значеннями потенціалу задачі (1) – (3) в площині  $z = 0$  у випадку дворазового збільшення розміру  $A$ . При цьому  $E_2 = 0,0353$ ,  $E_4 = 0,0166$ ,  $E_8 = 0,0093$ .

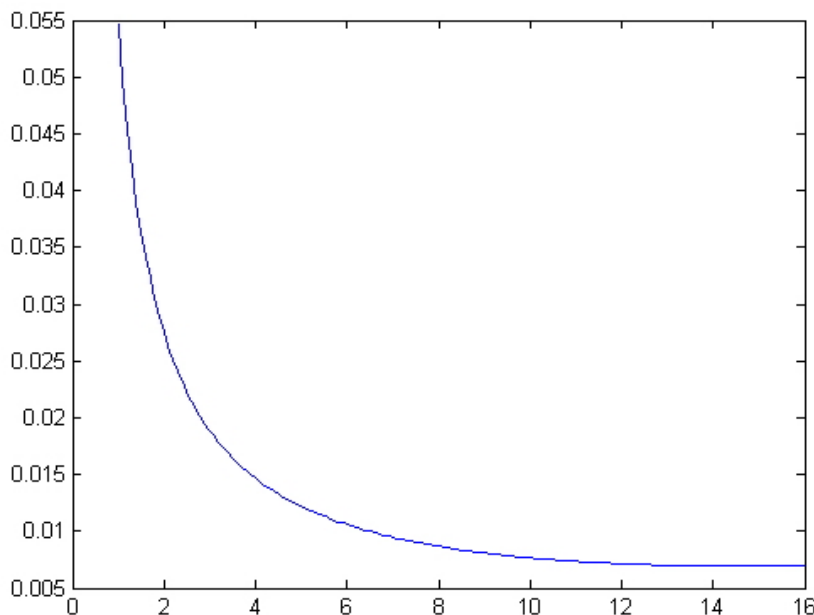


Рис. 2. Вплив збільшення розміру  $A$  на значення потенціалу в площині  $z = 0$



Отже, для з'ясування якісної картини поля в центральних поперечних перерізах квадрупольної системи, в якій явно переважає довжина над шириною у вісім і більше разів, можна обмежитись розв'язанням "плоскої" задачі. При цьому відносно проста "плоска" модель стає в нагоді для підтвердження достовірності результатів розв'язання задачі в суттєво просторовій постановці.

**1.3. Результати чисельного моделювання.** Для наочного зображення електростатичного поля розглядуваної квадрупольної системи на рис. 3 – 5 подано розрахований згідно формули (13) розподіл ліній рівного потенціалу у площині  $z=0$ , за умови  $A=1$  і відстані між поверхнями  $h=1$ . Допускаються різні значення потенціалу на електродах, а для наближеного розв'язання задачі використано кусково-постійну апроксимацію шуканої густини інтегрального рівняння при кількості  $n=100$ . Так, рис. 3 (випадок а)) відповідає таким значенням потенціалу на електродах  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$ . Аналогічно на рис. 4  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = -1$ ,  $f_3 = 1$ ,  $f_4 = -1$  – випадок б); на рис. 5  $f_1 = 10$ ,  $f_2 = 20$ ,  $f_3 = -100$ ,  $f_4 = 1$  – випадок в).

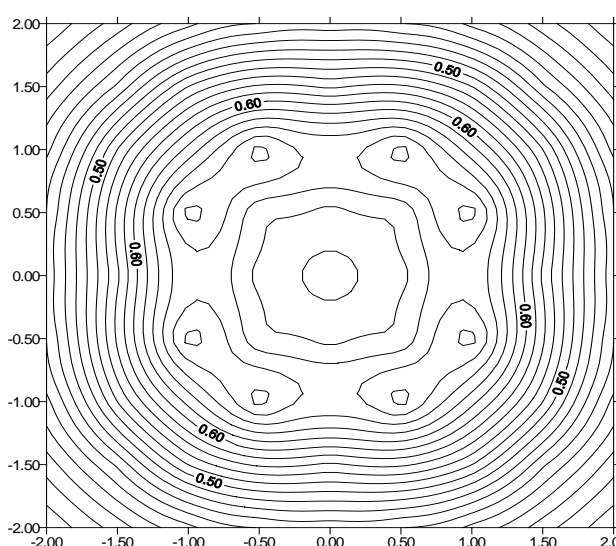


Рис. 3. Розподіл ліній рівня для випадку а)

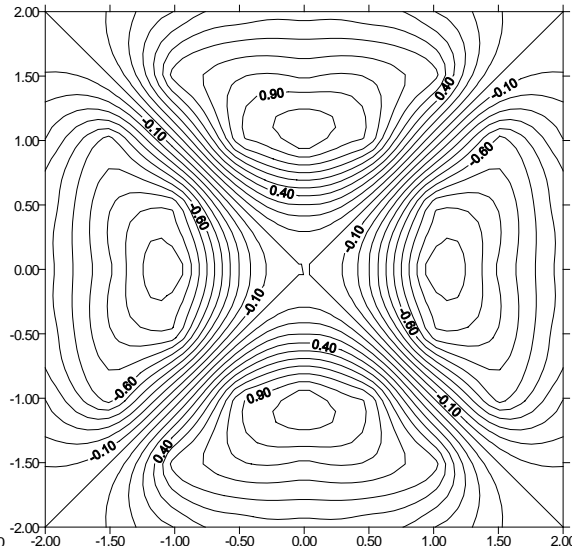


Рис. 4. Розподіл ліній рівня для випадку б)

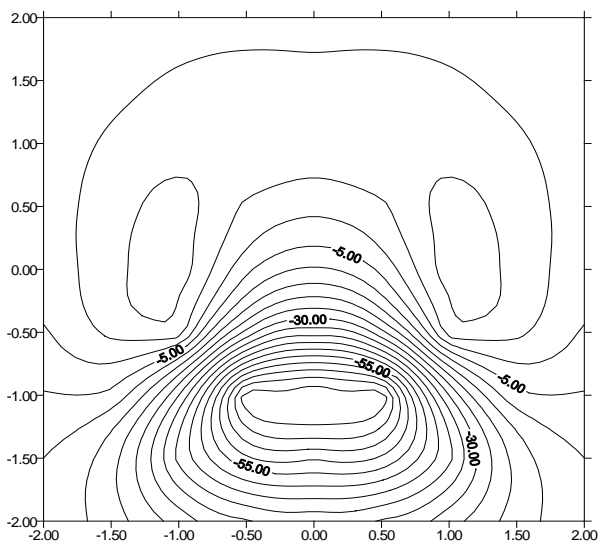


Рис. 5. Розподіл ліній рівня для випадку в)

Слід зауважити, що розподіл ліній рівного потенціалу відповідає фізиці досліджуваних електростатичних полів. Наприклад, на рис. 4, де задані антисиметричні граничні значення, фіксуємо явно виражені асимптоти, потенціал на яких рівний нулю.

Потенціал електростатичного поля (див. рис. 4) в деяких контрольних точках за умов  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = -1$ ,  $f_3 = 1$ ,  $f_4 = -1$ , при різних  $A$  і при кількості невідомих  $n=100$ , наведено в табл. 1. Для підтвердження достовірності отриманих результатів при розв'язанні задачі (1) – (3) в останньому стовпчику цієї таблиці наведені результати чисельного розв'язування відповідного плоского наближення деталі, дослідження якого висвітлені в роботі [10].

Таблиця 1

Потенціал електростатичного поля у точках площини  $z = 0$ 

$x$	$y$	$u (A = 1)$	$u (A = 2)$	$u (A = 4)$	$u (A = 8)$	“плоске” наближення
-0.500	-2.000	0.554533	0.569875	0.582992	0.585020	0.580110
-0.500	-1.500	0.793349	0.807748	0.817789	0.821019	0.819194
-0.500	-1.000	0.723583	0.739573	0.744598	0.747684	0.743894
-0.500	-0.500	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.500	0.000	-0.225466	-0.244789	-0.250436	-0.252070	-0.247042
0,000	-1,000	0.979874	0.988285	0.990054	0.990136	0.986836
0,000	-0.500	0.225466	0.244789	0.250436	0.252070	0.247042
1.000	-0.500	-0.723583	-0.739573	-0.744598	-0.747684	-0.743894
1.000	0.000	-0.979874	-0.988285	-0.990054	-0.990136	-0.986836
1.000	0.500	-0.723583	-0.739573	-0.744598	-0.747684	-0.743894
2.000	-1.500	-0.130574	-0.165877	-0.182457	-0.191768	-0.195074

Слід зауважити, що з метою значного скорочення часу розв'язання задачі в цілому ефективно використовувати автоматичне розпаралелення програми за допомогою інтерфейсу *OpenMP* на багатоядерних персональних комп'ютерах [12, 13].

#### Висновки

На прикладі однієї модельної задачі, не зменшуючи загальності, продемонстровано методику розв'язування окремих класів суттєво просторових задач електростатики з максимальним врахуванням наявної симетрії в геометрії розімкнених поверхонь. Переваги такої методики очевидні:

- зменшення оперативної пам'яті комп'ютера при формуванні системи лінійних алгебричних рівнянь, яка апроксимує відповідне операторне рівняння, у 256 разів;
- можливість уникнення числової нестійкості, яка може виникати при непомірному збільшенні розв'язуваних систем.

Встановлено усі передумови до можливого розпаралелення процедури розв'язування задачі в цілому. Досліджено умови трактування просторової задачі як плоскої. А також показано, як запропонований підхід дозволяє враховувати сингулярну поведінку шуканої густини в околі кутових точок розімкнених поверхонь і при підході до контуру обмежуючись її контролем лише в одній особливій точці, а не в шістнадцяти. Усі переваги розглянутої методики отримали своє підтвердження шляхом чисельних експериментів.

#### Список використаної літератури

1. Швець Є.Я. Вакуумна та плазмова електроніка Частина 2. Електронно-променеві прилади. / Є.Я. Швець, А.В. Юдачов, М.М. Турба // Навчально-методичний посібник. – Запоріжжя: Видавництво ЗДІА, 2010 р. – 127 с.
2. Абрамович С.Н. Оптимизация зондоформирующей системы ядерного сканирующего микронзонда на базе электростатического перезарядного ускорителя ЭПП-10./ С.Н. Абрамович, Н.В. Завьялов, А.Г. Звенигородский, И.Г. Игнатъев, Д.В. Магилин, К.И. Мельник, А.Г. Пономарев // Журнал технической физики. – 2005. – том 75, вып. 2. – С. 6-12.
3. Гладков В.С. Дослідження експериментального зразка установки очищення трансформаторного масла. / В.С. Гладков, О.А. Гученко, О.В. Шестеріков // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 39. – С. 46-50.
4. Захаров Е.В. Абелевы группы конечного порядка в численном анализе линейных краевых задач теории потенциала. / Е.В. Захаров, С.И. Сафронов, Р.П. Тарасов // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1992. — Т. 32, № 1. — С. 40–58.
5. Lions J.-L. Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications. / J.-L. Lions, E. Magenes — Dunod. Paris. — 1968. — Vol. 1.
6. Sybil Yu.М. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface. / Yu.М. Sybil // Матем. студії. — 1997. — Т. 8, № 2. — С. 79–96.
7. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп. / Ж.-П. Серр. – М: РХД, 2003. – 132 с.

8. Garasym Ya.S., Ostudin B.A. On numerical approach to solve some three-dimensional boundary value problems in potential theory based on integral equation method. // Журн. обчисл. та прикл. математики. 2003. № 1 (88). С. 17–28.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
10. Мочурад Л.І. Запровадження ефективної методики до числового розв'язування одного класу краєвих задач теорії потенціалу. / Л.І. Мочурад, Б.А. Остудін // Збірник наукових праць "Математичне та комп'ютерне моделювання". Серія: Технічні науки. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2009. — Вип. 2. — С. 105-118.
11. Mochurad L.I. Flat variant of substantially spatial problem of electrostatics and some aspects of its solution, related to specifics of input information. / L.I. Mochurad, B.A. Ostudin // Journal of Numerical and Applied Mathematics. — 2011. — №2(105). — P. 98-110.
12. Мочурад Л. Розпаралелення процедур чисельного розв'язування задач плоскої електростатики, які мають абелеві групи симетрії скінченних порядків. / Л. Мочурад // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2013. — Вип. 20. — С. 34-41.
13. Voss M.J. OpenMP share memory parallel programming. / M.J. Voss. — Toronto, Canada, 2003. — 270 p.