УДК 629.439

В. А. ПОЛЯКОВ, Н. М. ХАЧАПУРИДЗЕ
Институт транспортных систем и технологий
Национальной академии наук Украины

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА МАГНИТНОЙ ЛЕВИТАЦИИ ПОЕЗДА

Объектом исследования является процесс магнитной левитации поезда. Цель исследования – получение корректного математического описания реализации этого процесса. Выявлены рациональные парадигмы исследования. Рассмотрены существующие версии искомой модели. Описаны их достоинства и недостатки. Выбраны рациональные расчётные схемы элементов левитационного узла. При исследовании принята интегративная парадигма. Для упрощения модели введены адекватные допущения. Левитационные компоненты найдены как силы Ампера. Описана электродинамика левитационного узла.

Ключевые слова: магнитолевитирующий поезд, математическая модель левитации, интегративная парадигма исследования.

В. О. ПОЛЯКОВ, М. М. ХАЧАПУРИДЗЕ
Інститут транспортних систем та технологій
Національної академії наук України

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ МАГНІТНОЇ ЛЕВІТАЦІЇ ПОЇЗДА

Об'єктом дослідження є процес магнітної левітації поїзда. Ціль дослідження - одержання коректного математичного опису реалізації цього процесу. Виявлено раціональні парадигми дослідження. Розглянуто існуючі версії шуканої моделі. Описано їхні достоїнства й недоліки. Обрано раціональні розрахункові схеми елементів левітаційного вузла. При дослідженні прийнята інтегративна парадигма. Для спрощення моделі уведені адекватні припущення. Левітаційні компоненти знайдені як сили Ампера. Описано електродинаміку левітаційного вузла.

Ключові слова: магнітолевітуючий поїзд, математична модель левітації, інтегративна парадигма дослідження.

V. A. POLYAKOV, N. M. KHACHAPURIDZE
Institute of Transport Systems and Technologies
of Ukraine's National Academy of Sciences

MATHEMATICAL MODEL OF TRAIN'S MAGNETIC LEVITATION PROCESS

A process of train's magnetic levitation is the research object. The research aim is – to get the correct mathematical description of this process realization. Rational paradigms of the research were revealed. Existing versions of the desired model were considered. Their advantages and demerits have been described. Rational design schemes of a levitation unit's elements were chosen. The integrative paradigm was adopted in the research. Adequate assumptions were introduced to simplify the model. Levitation components were found as Ampère forces. The levitation unit's electrodynamics has been described.

Keywords: magnetically levitated train, levitation's mathematical model, research's integrative paradigm.

Изучаемая проблема. Уровень её исследованности

Подвешивание магнитолевитирующего поезда (МЛП) осуществляется посредством левитационного узла (ЛУ). Токи и поля его контуров – компоненты единого электромагнитного субпроцесса гиперпроцесса электромеханического преобразования энергии. Существенная сложность таких процессов перманентно побуждает исследователей к поиску путей сепаратного изучения их отдельных компонентов, ключевым из которых является электромагнитный. Его составляющие порознь с успехом могут изучаться [1] в рамках теорий электрических цепей и электромагнитного поля. Поэтому существующие версии математической модели (ММ) процесса левитации (ПЛ) МЛП построены [1 – 3] исходя из упомянутых парадигм. Анализ свойств упомянутых версий модели свидетельствует о том, что каждая из них обладает как преимуществами, так и недостатками. Их общая положительная черта – достаточная функциональность. Основной же имманентный недостаток таких версий – нестационарность дифференциальных уравнений, вызванная циклической переменностью их коэффициентов, соответствующих собственным и взаимным индуктивностям дискретных путевых контуров (ДПК) ЛУ как между собой, так и со сверхпроводящими поездными контурами (СПК), в зависимости от положения поезда. Это существенно затрудняет решение задач описываемой динамики [4], радикально снижая практическую ценность версий модели.

Задача исследования

Изложенное выявляет [5 – 7] актуальность создания ММ ПЛ МЛП, ассимилирующей достоинства имеющихся версий такой модели, но свободной от их недостатков. Синтез такой модели является основной задачей настоящей работы.

Материал и результаты исследования

Электромеханическое энергопреобразование ЛУ МЛП осуществляется в процессе взаимодействия полей токов СПК и ДПК. Поэтому паттерном левитационной силы (ЛС) поезда является взаимодействие тока элемента СПК с полем токов ДПК. Такое взаимодействие может быть описано выражением закона Ампера [8]:

$$f_{\beta\gamma} = l_{\beta\gamma} \cdot i^{\beta\gamma} \cdot B_{\beta\gamma} \cdot Sin\,\alpha_{\beta\lambda}\,, \tag{1}$$

где $f_{\beta\gamma}$ – сила, действующая на γ -тый элемент β -го СПК; $l_{\beta\gamma}\,, i^{\beta\lambda}\,, B_{\beta\gamma}\,, \alpha_{\beta\gamma}$ – длина элемента, ток в нём, индукция поля, в котором элемент находится, а также угол между $\overline{i^{\beta\gamma}}$ и $\overline{B_{\beta\gamma}}$.

Расчётные схемы СПК и секций ДПК приняты, соответственно, в виде наборов гальванически не связанных проводящих прямоугольных рамок, а также пар идентичных прямоугольных катушек, соединённых согласно нуль-поточной схеме [1]. Тогда ЛС поезда определима как векторная сумма величин $\overline{f_{\lambda\chi}}\ \forall\,\lambda \in [\overline{1,N}],\ \chi \in [\overline{1,4}]$, каждая из которых, – это результат взаимодействия тока одного из элементов СПК с полем токов взаимодействующих с ним ДПК. В последнем выражении, N – число упомянутых СПК. Динамика электромагнитного компонента такого взаимодействия определяется уравнениями второго закона Кирхгофа [8]. Подсистема “СПК – ДПК”, как правило, вырождена [6] – ёмкостные показатели её элементов пренебрежимо низки. Потому, в инерциальной системе отсчёта $Q\varepsilon^{\rho}\ \forall\,\rho \in [\overline{(\chi_\beta - \mathrm{E}),(\chi_\beta + \mathrm{E})}]$, модель электромагнитного компонента взаимодействия β -го СПК с учитываемыми (в этом взаимодействии) ДПК имеет вид [8, 9]:

$$\sigma_{\rho\beta} = L_{\rho\rho} \cdot \frac{d}{dt} i^{\rho} + L_{\rho\mu} \cdot \frac{d}{dt} i^{\mu} + r_{\rho} \cdot i^{\rho}\ \forall\ \rho,\mu \in [\overline{(\chi_\beta - \mathrm{E}),(\chi_\beta + \mathrm{E})}]\,; \tag{2}$$

$$\sigma_{\rho\beta} = \sigma^{u}_{\rho\beta} - \sigma^{l}_{\rho\beta}; \quad \sigma^{\kappa}_{\rho\beta} = -\frac{d}{dt}\left(M^{\kappa}_{\rho\beta} \cdot i^{\beta}_{s}\right)$$
$$\forall\,\rho \in [\overline{(\chi_\beta - \mathrm{E}),(\chi_\beta + \mathrm{E})}],\ \kappa = u \vee \kappa = l\,, \tag{3}$$

где $\sigma^{\kappa}_{\rho\beta}\ \forall\,\rho \in [\overline{(\chi_\beta - \mathrm{E}),(\chi_\beta + \mathrm{E})}], \kappa = u \vee \kappa = l$ – электродвижущие силы (э. д. с.), индуцируемые в катушках ρ -го ДПК при изменениях сцеплений с их подконтурами потока тока i^{β}_{s} цепи β -го СПК; $L_{\rho\rho}$, $L_{\rho\mu}$, $r_{\rho}\ \forall\ \rho,\mu \in [\overline{(\chi_\beta - \mathrm{E}),(\chi_\beta + \mathrm{E})}]$ – собственные и взаимные индуктивности, а также активные сопротивления ДПК; χ_β– номер (от начала участка трассы, вдоль которого происходит движение МЛП) последнего ДПК, поперечную осевую линию которого миновала поперечная осевая линия β -го СПК; E – половина числа ДПК, с которыми учитывается электромагнитное взаимодействие каждого СПК; $i^{\rho}, i^{\mu}\ \forall\ \rho,\mu \in [\overline{(\chi_\beta - \mathrm{E}),(\chi_\beta + \mathrm{E})}]$ – токи ДПК; $M^{\kappa}_{\rho\beta}\ \forall\,\rho \in [\overline{(\chi_\beta - \mathrm{E}),(\chi_\beta + \mathrm{E})}],\ \kappa = u \vee \kappa = l$ – взаимные индуктивности между β -ым СПК и катушками взаимодействующих с ним ДПК; t – текущее время.

Благодаря принятым конструкционным мерам [1], значения токов $i^{\lambda}_{s}\ \forall\,\lambda \in [\overline{1,\mathrm{K}}],$ изменяются достаточно медленно и, на интервалах, соизмеримых со временем наблюдения движения поезда, могут считаться равными между собой и постоянными

$$i^{\lambda}_{s} = i_s = const\ \ \forall\,\lambda \in [\overline{1,\ \mathrm{K}}]\,, \tag{4}$$

где K – число СПК, установленных на МЛП. Значение же E целесообразно выбирать так, чтобы по обеим сторонам от каждого β -го СПК в ДПК, предшествующих, а также следующих за учитываемыми, величины $\sigma^{\kappa}_{\rho\beta}\ \forall\,\rho < \chi_\beta - \mathrm{E} \vee \rho > \chi_\beta + \mathrm{E},\ \ \kappa = u \vee \kappa = l$, даже в неравновесном состоянии ЛУ, были бы пренебрежимо малы.

Поскольку СПК движутся относительно ДПК, то величины $L_{\rho\rho}, L_{\rho\mu}, M^{\kappa}_{\rho\lambda}$ $\forall\, \rho, \mu \in [\overline{(\chi_\lambda - \mathrm{E}), (\chi_\lambda + \mathrm{E})}],\ \lambda \in [\overline{1, \mathrm{K}}],\ \kappa = u \vee \kappa = l$ имеют циклически изменяющиеся во времени значения. Это, в свою очередь, приводит к нестационарности коэффициентов уравнений (2), (3) и, как отмечено, существенно снижает практическую ценность версии модели. С целью устранения указанного недостатка, реализацию слагающих ЛС МЛП следует рассматривать относительно координатных систем, в каждой из которых рассматриваемый СПК и учитываемые во взаимодействии с ним ДПК условно взаимно неподвижны. В таком качестве, удобнее всего принять [5] отсчётные системы $C_\lambda \eta^\mu\ \forall\, \lambda \in [\overline{1, \mathrm{K}}], \mu \in [\overline{1, 3}]$, каждая из которых жёстко связана с λ-ым СПК. Инерциальными $C_\lambda \eta^\mu\ \forall\, \lambda \in [\overline{1, \mathrm{K}}], \mu \in [\overline{1, 3}]$, в общем случае, не являются. В то же время, весьма желательно [10], чтобы уравнения, описывающие динамику электромагнитного компонента взаимодействия СПК с ДПК, имели тензорный характер. Такие уравнения могут быть получены [11], из равенств типа (2) путём замены в них локальных производных $\frac{d}{dt}$ абсолютными $\frac{D}{dt}$, а также перехода в модели (2), (3) к координатам $\eta^\mu_\lambda\ \forall \lambda \in [\overline{1, \mathrm{K}}], \mu \in [\overline{1, 3}]$. Соотношение между упомянутыми производными, как известно, имеет вид [11]:

$$\frac{D}{dt}\eta^\mu_\alpha = \frac{d}{dt}\eta^\mu_\alpha + e_{\mu\alpha\nu} \cdot \omega_\alpha \cdot \eta^\nu_\alpha\ \forall\, \mu, \nu \in [\overline{1, 3}], \tag{5}$$

где $e_{\mu\alpha\nu} \forall \mu, \nu \in [\overline{1, 3}], \omega_\alpha$ - символ Леви-Чивита, а также вектор угловой скорости вращения $C_\alpha \eta^\mu\ \forall\, \mu \in [\overline{1, 3}]$.

После указанной замены, соотношения, полученные из (2), приобретают тензорный характер. Поэтому, в частности, их форма становится инвариантной по отношению к координатам, в которых они записаны. Переход же к координатам $\eta^\mu_\alpha\ \forall\, \mu \in [\overline{1, 3}]$ осуществим согласно выражениям:

$$\eta^\mu_\alpha = \vartheta^\mu_\rho \cdot \varepsilon^\rho\ \forall\ \rho \in [\overline{(\chi_\alpha - \mathrm{E}), (\chi_\alpha + \mathrm{E})}]; \mu \in [\overline{1, 3}], \tag{6}$$

где ϑ^μ_ρ – матрица преобразования координат:

$$\vartheta^\mu_\rho = \frac{\partial \eta^\mu_\alpha}{\partial \varepsilon^\rho} \forall \rho \in [\overline{(\chi_\alpha - \mathrm{E}), (\chi_\alpha + \mathrm{E})}]; \mu \in [\overline{1, 3}]. \tag{7}$$

На оси $\eta^\mu_\alpha \forall\, \mu \in [\overline{1, 3}]$ и $\varepsilon^\rho \forall\, \rho \in [\overline{(\chi_\alpha - \mathrm{E}), (\chi_\alpha + \mathrm{E})}]$ могут проецироваться любые векторные величины, характеризующие электродинамику взаимодействия СПК и ДПК в системах отсчёта соответственно $C_\alpha \eta^\mu$ $\forall\, \mu \in [\overline{1, 3}]$ и $Q\varepsilon^\rho \forall\, \rho \in [\overline{(\chi_\alpha - \mathrm{E}), (\chi_\alpha + \mathrm{E})}]$. В частности, ими могут быть векторы токов, э. д. с. и индукции полей.

Выражения для связей вида

$$\eta^\mu_\alpha = \eta^\mu_\alpha(\varepsilon^\rho) \forall\, \rho \in [\overline{(\chi_\alpha - \mathrm{E}), (\chi_\alpha + \mathrm{E})}]; \mu \in [\overline{1, 3}] \tag{8}$$

могут быть получены исходя из того, что [5] в процессе описываемого координатного преобразования, его инвариантами являются амплитуды токов в рассматриваемых контурах, а также их э. д. с.
С помощью же матрицы

$$\vartheta^\rho_\mu = \frac{\partial \varepsilon^\rho}{\partial \eta^\mu_\alpha} = (\vartheta^\mu_\rho)^T\ \forall \rho \in [\overline{(\chi_\alpha - \mathrm{E}), (\chi_\alpha + \mathrm{E})}]; \mu \in [\overline{1, 3}], \tag{9}$$

осуществимо обратное преобразование

$$\varepsilon^\rho = \vartheta^\rho_\mu \cdot \eta^\mu_\alpha\ \forall\ \rho \in [\overline{(\chi_\alpha - \mathrm{E}), (\chi_\alpha + \mathrm{E})}]; \mu \in [\overline{1, 3}]. \tag{10}$$

В выражениях (3) для $\sigma^{\kappa}_{\rho\beta}\ \forall\rho\in\overline{[(\chi_\beta-\mathrm{E}),(\chi_\beta+\mathrm{E})]},\ \kappa=u\vee\kappa=l$, значения величин $M^{\kappa}_{\rho\beta}$ $\forall\rho\in\overline{[(\chi_\beta-\mathrm{E}),(\chi_\beta+\mathrm{E})]},\ \kappa=u\vee\kappa=l$ существенно зависят, в частности, от взаимного расположения рассматриваемого β-го СПК и ДПК, взаимодействие с которыми для него рассматривается. Поэтому

$$M^{\kappa}_{\rho\beta}=M^{\kappa}_{\rho\beta}\,(w_\beta)\ \forall\rho\in\overline{[(\chi_\beta-\mathrm{E}),(\chi_\beta+\mathrm{E})]},\ \kappa=u\vee\kappa=l\,, \tag{11}$$

где w_β – координата, определяющая текущее положение рассматриваемого β-го СПК относительно начала отсчёта движения МЛП вдоль оси пути. При этом, поскольку ДПК вдоль трассы движения поезда располагаются регулярно, последние зависимости имеют гармонический характер. В то же время, современные способы измерения позволяют [12] экспериментально-расчётными методами со вполне приемлемой точностью определять значения взаимных индуктивностей контуров магнитосвязанных электрических цепей при различном текущем их пространственном взаиморасположении. Это, в свою очередь, позволяет, используя упомянутые методы, поточечно строить искомые зависимости (11) на требуемой сетке w_β. Далее, с использованием методов, например, полиноминальной регрессии [13], реализация которых доступна в ряде современных систем компьютерной математики (например, Mathematica), зависимостям вида (11) может, с сохранением достаточно высокой точности содержания, быть придана форма аналитических выражений. Помимо того, с учётом равенств (4), выражения (3) могут быть преобразованы к виду

$$\sigma_{\rho\beta}=\sigma^{u}_{\rho\beta}-\sigma^{l}_{\rho\beta};\quad \sigma^{\kappa}_{\rho\beta}=-i_s\cdot\dot{w}_\beta\cdot\frac{d}{dw_\beta}M^{\kappa}_{\rho\beta}$$
$$\forall\rho\in\overline{[(\chi_\beta-\mathrm{E}),(\chi_\beta+\mathrm{E})]},\ \kappa=u\ \vee\ \kappa=l\,, \tag{12}$$

где $\dot{w}_\beta$ – скорость продольного (вдоль касательной к оси) движения рассматриваемого β-го СПК относительно пути. Значения $\frac{d}{dw_\beta}M^{\kappa}_{\rho\beta}\ \forall\rho\in\overline{[(\chi_\beta-\mathrm{E}),(\chi_\beta+\mathrm{E})]},\ \kappa=u\vee\kappa=l$ для подстановки в выражения (12) могут быть получены с использованием, созданных описанным путём в форме аналитических выражений, зависимостей вида (11). Таким образом, каждый из β векторов $\overline{\sigma_{\rho\beta}}$ $\forall\rho\in\overline{[(\chi_\beta-\mathrm{E}),(\chi_\beta+\mathrm{E})]}$ оказывается определённым в системе отсчёта $Q\varepsilon^{\rho}\ \forall\rho\in\overline{[(\chi_\beta-\mathrm{E}),(\chi_\beta+\mathrm{E})]}$. Далее, с использованием соотношений вида (6) – (8), каждый такой вектор может быть определён в системе $C_\beta\eta^{\mu}\ \forall\mu\in[\overline{1,3}]$ своими проекциями $\sigma_{\mu\beta}\forall\mu\in[\overline{1,3}]$.

После преобразований, уравнения, полученные из (2) и (3) путём их трансформации в триэдр $C_\beta\eta^{\mu}\ \forall\mu\in[\overline{1,3}]$ с использованием соотношений (5) и (6), приобретают вид

$$\sigma_{\mu\beta}=L_{\mu\mu}\cdot\left(\frac{d}{dt}i^{\mu}+e_{\mu\beta\nu}\cdot\omega_\beta\cdot i^{\nu}\right)+L_{\mu\tau}\cdot\left(\frac{d}{dt}i^{\tau}+e_{\tau\beta\theta}\cdot\omega_\beta\cdot i^{\theta}\right)+r_\mu\cdot i^{\mu}$$
$$\forall\mu,\nu,\ \tau,\theta\in[\overline{1,3}]; \tag{13}$$

$$\sigma_{\mu\beta}=\vartheta^{\mu}_{\rho}\cdot\sigma_{\rho\beta}\ \forall\ \rho\in\overline{[(\chi_\beta-\mathrm{E}),(\chi_\beta+\mathrm{E})]};\mu\in[\overline{1,3}]$$
$$\sigma_{\rho\beta}=\sigma^{u}_{\rho\beta}-\sigma^{l}_{\rho\beta};\quad \sigma^{\kappa}_{\rho\beta}=-i_s\cdot\dot{w}_\beta\cdot\frac{d}{dw_\beta}M^{\kappa}_{\rho\beta}$$
$$\forall\rho\in\overline{[(\chi_\beta-\mathrm{E}),(\chi_\beta+\mathrm{E})]},\ \kappa=u\ \vee\ \kappa=l\,. \tag{14}$$

Уравнения (13) имеют постоянные коэффициенты, являются тензорными и описывают токовую динамику ЛУ МЛП в координатах $i^{\mu}\ \forall\mu\in[\overline{1,3}]$. После их (как правило – численного) разрешения относительно этих переменных, последние, с использованием соотношений (10), могут быть преобразованы в координаты $i^{\rho}\ \forall\rho\in\overline{[(\chi_\beta-\mathrm{E}),(\chi_\beta+\mathrm{E})]}$, значения которых определяют реальные токи в цепях ДПК.

Магнитная цепь ЛУ предполагается ненасыщенной [1]. Поэтому она может считаться условно-линейной подсистемой и, следовательно, к ней применим принцип аддитивности. Исходя из этого, результирующее поле токов ДПК в любой точке геометрического пространства $\mathrm{O}\Xi_\gamma\ \forall\gamma\in[\overline{1,3}]$, в котором реально движется СПК относительно ДПК, может описываться как сумма полей, создаваемых в этой точке токами отдельных модулей ДПК:

$$B_{\gamma\beta} = B_{\gamma\rho\beta} \cdot e^{\rho};\ e^{\rho} = 1;\quad \forall \rho \in [\overline{(\chi_\beta - E),(\chi_\beta + E)}],\ \gamma \in [\overline{1,3}], \tag{15}$$

где $B_{\gamma\beta}, B_{\gamma\rho\beta}\ \forall \rho \in [\overline{(\chi_\beta - E),(\chi_\beta + E)}], \gamma \in [\overline{1,3}]$ – пространственные компоненты индукции поля, создаваемого всеми (учитываемыми во взаимодействии с β -ым СПК) модулями ДПК, а также отдельными такими модулями в рассматриваемой точке этого пространства. В свою очередь, значения компонентов $B_{\gamma\alpha\beta}\ \forall \gamma \in [\overline{1,3}]$ для каждого α -ого модуля ДПК, определимы выражениями

$$B_{\gamma\alpha\beta}(i^{\alpha}) = B^{u}_{\gamma\alpha\beta}(i^{\alpha}) - B^{l}_{\gamma\alpha\beta}(i^{\alpha})\ \forall \gamma \in [\overline{1,3}], \tag{16}$$

где $B^{\kappa}_{\gamma\alpha\beta}\ \forall \gamma \in [\overline{1,3}], \kappa = u \vee \kappa = l$ – пространственные компоненты индукции поля токов катушек α -го ДПК (взаимодействующего с β -ым СПК). Выражения для определения значений $B^{\kappa}_{\gamma\rho\beta}(i^{\rho})$ $\forall \rho \in [\overline{(\chi_\beta - E),(\chi_\beta + E)}],\ \gamma \in [\overline{1,3}],\ \kappa = u \vee \kappa = l$ получены в [14]. Далее, в соотношения вида (16) последовательно подставляются значения токов $i^{\rho}\ \forall \rho \in [\overline{(\chi_\beta - \mathrm{E}),(\chi_\beta + \mathrm{E})}]$ и, таким образом, находятся значения $B_{\gamma\rho\beta}\ \forall \rho \in [\overline{(\chi_\beta - E),(\chi_\beta + E)}],\ \gamma \in [\overline{1,3}]$, а затем по ним, согласно (15), – и $B_{\gamma\beta}\ \forall \gamma \in [\overline{1,3}]$.

Поскольку пространство системы $\mathrm{O}\Xi_{\gamma}\ \forall \gamma \in [\overline{1,3}]$ – евклидово, то, исходя из его метрики, мгновенное значение модуля вектора полной индукции поля, создаваемого токами ДПК, взаимодействующих с β -ым СПК, может быть определено выражением

$$B_{\beta} = \sqrt{B^{(2)}_{\gamma\beta} \cdot e^{\gamma}};\ e^{\gamma} = 1\ \forall \gamma \in [\overline{1,3}]. \tag{17}$$

Выводы

Создана интегративная парадигма моделирования подвешивания МЛП, ассимилирующая достоинства теорий цепей и поля, но свободная от их недостатков. Построена ММ ПЛ МЛП, не имеющая дефектов предыдущих версий модели. Этим решена задача настоящей части исследования.

Список использованной литературы

1. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией / В. А. Дзензерский, В. И. Омельяненко, С. В. Васильев, В. И. Матин, С. А. Сергеев – К.: Наук. думка, 2001. – 479 с.
2. Бочаров В. И. Транспорт на сверхпроводящих магнитах / В. И. Бочаров, И. С. Салли, В. А. Дзензерский – Ростов-на-Дону.: Изд-во РГУ, 1988 – 152 с.
3. Takahashi T. Suspension characteristics of magnetically suspended high-speed trains / Takahashi, K. Okuyama // Hitachi Review – 1972. – 21, № 8. – P. 59 – 66.
4. Takano I. Characteristics of magnetic levitation for high-speed trains / I. Takano // Proc. 4-th Int. Cryog. Eng. Conf. – Eindhoven, 1972. – P. 188 – 190.
5. Электрические машины (специальный курс) / Г. А. Сипайлов, Е. В. Кононенко, К. А. Хорьков – М.: Высш. шк., 1987. - 287 с.
6. Львович А. Ю. Электромеханические системы / А. Ю. Львович – Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. – 296 с.
7. Копылов И. П. Математическое моделирование электрических машин / И. П. Копылов – М.: Высш. шк., 2001. – 327 с.
8. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи / Л. А. Бессонов – М.: Высш. шк., 1996. – 578 с.
9. Арменский Е. В. Единая теория электрических машин / Е. В. Арменский, И. В. Кузина – М.: Изд-во Московск. ин-та электрон. машиностроен., 1975. – 256 с.
10. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике / Г. Крон – М., Л.: Госэнергоиздат, 1955. – 275 с.
11. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский – М.: Наука, 1967. – 644 с.
12. Панфилов В. А. Электрические измерения / В. А. Панфилов – М.: Издат. дом “Академия”, 2006. – 288 с.
13. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Е. Корн – М.: Наука, 1973. – 831 с.
14. Бирюков В. А. Магнитное поле прямоугольной катушки с током / В. А. Бирюков, В. А. Данилов // Журнал технической физики. – 1961. – Т. XXXI, № 4. – С. 428 – 435.