

УДК 539.3

Л.А. ФИЛЬШТИНСКИЙ, Т.С. СУШКО, А.А. ЕРЕМЕНКО
Сумской государственной университет, Украина**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ
МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ**

Рассмотрена краевая задача разрушения конечной магнитоэластичной пластины, ослабленной трещинами. Задача сведена к смешанной системе алгебраических уравнений, сингулярных интегральных уравнений, дополнительным условиям и решена методом механических квадратур. Рассмотрены пластины в виде треугольника, квадрата и эллипса, и трещины в форме прямой и параболы. Получены результаты эффектов связности магнитоэластичных полей, граничные дефекты, которые возникают в окрестности границ пластины, коэффициентов интенсивности полевых величин, а также энергетический критерий разрушения.

Ключевые слова: магнитоэластичная среда, трещины, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты интенсивности полевых величин, потоки энергии в вершинах.

Л.А. ФИЛЬШТИНСЬКИЙ, Т.С. СУШКО, Г.А. ЄРЕМЕНКО
Сумський державний університет, Україна**КРАЙОВА ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РУЙНУВАННЯ МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ
КІНЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ**

Розглянуто крайову задачу руйнування кінцевої магнитоелектропружної пластины, ослабленої тріщинами. Задача зведена до змішаної системи алгебраїчних рівнянь, сингулярних інтегральних рівнянь, додаткових умов і вирішена методом механічних квадратур. Розглянуто пластини у вигляді трикутника, квадрата і еліпса, і тріщини в формі прямої і параболі. Отримано результати ефектів зв'язності магнитоелектропружних полів, граничні дефекти, які виникають в околі границі пластины, коефіцієнтів інтенсивності польових величин, а також енергетичний критерій руйнування.

Ключові слова: магнитоелектропружне середовище, тріщини, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності польових величин, потоки енергії у вершинах..

L.A. FILSHTINSKII, T.S. SUSHKO, H.A. YEREMENKO
Sumy State University, Ukraine**THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF FRACTURE MECHANICS OF NOVEL
MAGNETOELECTROELASTICITY FOR THE FINITE PLATE**

The boundary value problem of the fracture mechanics of a finite magnetoelastoelectric plate weakened by cracks is considered. The problem is reduced to a mixed system of algebraic equations, singular integral equations, additional conditions, and solved by the method of mechanical quadratures. Plates in the form of a triangle, a square and an ellipse, and cracks in the form of a straight line and a parabola are considered. The results of connectivity effects of magnetoelastoelectric fields, boundary defects that arise in the vicinity of the plate boundaries, the field intensity coefficients, and the energy criterion for destruction are obtained.

Keywords: the magnetoelastoelectric medium, cracks, singular integral equations, intensity factors of mechanical electrical and magnetic values, energy fluxes in tips.

Постановка проблеми

Детали машин и элементы конструкций в виде пластин разной конфигурации широко используются в инженерной практике. Их рабочий ресурс во многих случаях обосновывается наличием в таких элементах концентраторов напряжений типа трещин. В связи с этим большой теоретический и практический интерес представляет изучение распределения напряжений и деформаций около таких дефектов, а также формирование оценки критериев разрушения таких элементов с концентраторами напряжений при разных видах их нагрузки.

В декартовых осях Ox_1x_2 рассмотрим пластину, ограниченную достаточно гладким замкнутым контуром Γ_0 , содержащую трещины Γ_m ($m = \overline{1, M}$). Будем считать, что трещины расположены случайным образом и их конфигурации также имеют случайный характер, тем не менее Γ_m – ляпуновские дуги и $\bigcap \Gamma_j = \emptyset$. Пусть на берегах Γ_m действует равномерное распирающее давление p_m . На внешнем контуре

Γ_0 зададим достаточно гладкие распределения электрического φ^E , магнитного φ^H потенциалов и компоненты вектора механического напряжения X_{1n}, X_{2n} (рис.1).

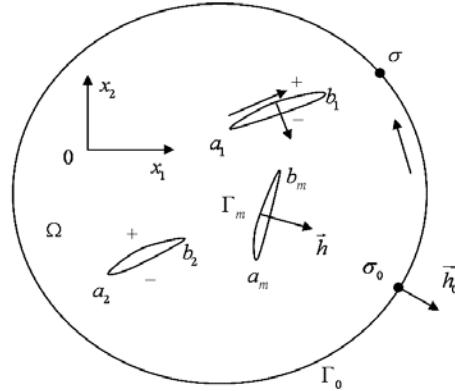


Рис. 1. Конечная пластина с трещинами под действием равномерных физических полей

Задача заключается в построении численного алгоритма позволяющего определить зависимость параметров разрушения от свойств материала и геометрии трещин и пластины.

Анализ последних исследований и публикаций

Огромный теоретический и практический интерес представляет исследования влияния внешних границ тела, которое деформируется, на замену интенсивности напряжений около вершины острого дефекта. Основные результаты, известные до сегодняшнего времени, относятся к случаю плоского растяжения ограниченных пластин, ослабленных дефектами типа трещин. В работах [1–3] были продолжены исследования в этой области.

Формулирование цели исследования

Постановка задачи и метод решения. Математическая модель двумерной магнитоэластостатики содержит:

Материальные уравнения [4]

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ 2\sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Дифференциальные уравнения равновесия, электро и магнитоэластики [5,6]

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2)$$

$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0, \quad \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \quad \partial_1 H_2 + \partial_2 H_1 = 0 \quad (3)$$

Соотношения Коши

$$e_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \partial_2 u_2, \quad 2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 \quad (4)$$

Условие совместности деформаций

$$\partial_1^2 e_{22} + \partial_2^2 e_{11} = 2\partial_1 \partial_2 e_{12} \quad (5)$$

В (1)–(5): $s_{ij} = s_{ij}^{DB}$ – коэффициенты деформации, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей, $g_{kj} = g_{kj}^{DB}$ и $p_{kj} = p_{kj}^{DB}$ – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженности, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; $\beta_{kl} = \beta_{kl}^\sigma$, $\chi_{kl} = \chi_{kl}^\sigma$ и $\nu_{kl} = \nu_{kl}^\sigma$ – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях; $u = (u_1, u_2)$ – вектор перемещения; σ_{ij} и e_{ij} –

тензоры напряжения и деформации; D_i и B_i – компоненты векторов электрической и магнитной индукции; E_i и H_i – электрическая и магнитная напряженности полей.

К этим соотношениям необходимо присоединить соответствующие механические, электрические и магнитные краевые условия на полной границе многосвязной области

$$\Gamma_0 + \Gamma, \Gamma = \bigcup \Gamma_m \left(m = \overline{1, M} \right), \Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset, \Gamma_j \cap \Gamma_i = \emptyset \left(i \neq j \right)$$

Механические краевые условия

$$X_{1n}|_{\Gamma_0} = f_1(\zeta), X_{2n}|_{\Gamma_0} = f_2(\zeta), X_{1n}^\pm|_{\Gamma_m} = -p_m \cos \psi, X_{2n}^\pm|_{\Gamma_m} = -p_m \sin \psi, \left(m = \overline{1, M} \right). \quad (6)$$

Здесь верхний знак соответствует левому берегу разреза Γ_m (при движении от его начала a_m к концу b_m), ψ – угол между положительной нормалью к левому берегу и лучом Ox_1 ,

Электрические и магнитные краевые условия

$$E_s|_{\Gamma_0} = f_3(\zeta), H_s|_{\Gamma_0} = f_4(\zeta), D_n^\pm|_{\Gamma_m} = 0, B_n^\pm|_{\Gamma_m} = 0 \quad (7)$$

Краевая задача сводится к задаче теории функций комплексного переменного. Комплексные представления полевых величин имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} A_{11}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \\ \{D_1, D_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{12}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \\ \{B_1, B_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{13}(1, \mu_k) \Phi_k(z_k), \\ \{E_1, E_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^E \Phi_k(z_k), \{H_1, H_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_k^H \Phi_k(z_k), \\ \{u_1, u_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{p_k, q_k\} \phi_k(z_k), \\ z &= x_1 + ix_2, z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Phi_k(z_k)$ – аналитические функции своих комплексных переменных, μ_k – характеристические числа, величины $A_{ij}(1, \mu_k)$, α_k^H и α_k^E , p_k , q_k – комплексные величины, зависящие от свойств материала пластинки.

Краевые условия (6)-(7) на Γ_0 и $\Gamma = \bigcup \Gamma_m$ представимы в единообразном виде:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 a_{0k}(\psi) \Phi_k^+(\sigma_{0k}) &= F_{0n}, \sigma_{0k} \in \Gamma_0 \left(n = \overline{1, 4} \right) \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} a_k(\psi) \Phi_k^+(\zeta_{0k}) &= F_n^\pm, \zeta_{0k} \in \Gamma = \bigcup_{m=1}^M \Gamma_m, a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi \end{aligned} \quad (9)$$

где R_{nk} , R_{nk}^0 – элементы матриц материальных коэффициентов, F_{0n} , F_n^\pm – компоненты векторных функций, задающих граничные условия.

Изложение основного материала исследования

Для решения краевой задачи теории функций (8)-(9) воспользуемся обобщением формализма, разработанного одним из авторов в [8]. Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ представим в виде обобщенных интегралов типа Коши:

$$\Phi_k(z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma) d\sigma_k}{(\sigma_k - z_k) a_{0k}(\psi)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta) d\zeta_k}{(\zeta_k - z_k) a_k(\psi)}, \quad \left(k = \overline{1, 4} \right) \quad (10)$$

Подстановка предельных значений на соответствующих контурах (10) в граничные условия (9) приводит к смешанной системе алгебраических и сингулярных интегральных уравнений относительно искомых плотностей $\omega_{0k}(\sigma)$ и $\omega_{1k}(\zeta)$:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 \omega_{0k}(\sigma) = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \omega_{1k}(\zeta) = 0 \quad (n=1,4) \\
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 \frac{a_{0k}(\psi_0)}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \sigma_{0k}} ds_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \sigma_{0k}} ds \right) = F_{0n}(\sigma_0) \\
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \frac{a_k(\psi_0)}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \zeta_{0k}} ds_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds \right) = F_n(\zeta_0) \quad (11) \\
 & \zeta_k = \operatorname{Re} \zeta + \mu_k \operatorname{Im} \zeta, \quad \omega_k(\zeta) = \left\{ \omega_k^{(m)}(\zeta), \zeta \in \Gamma_m \right\} \\
 & a_{ok}(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi, \quad \frac{d\sigma_k}{a_{ok}(\psi)} = ds_0 \\
 & z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z, \quad z = x_1 + ix_2 \in \Omega, \quad \frac{d\zeta_k}{a_{ok}(\psi)} = ds \\
 & \sigma_k = \operatorname{Re} \sigma + \mu_k \operatorname{Im} \sigma, \quad \sigma \in \Gamma_0
 \end{aligned}$$

Здесь ds и ds_0 – элементы дуг Γ_0 и Γ в физической плоскости, соответственно.

Для замыкания решения привлечем условие однозначности перемещений, электрических и магнитных потенциалов:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 p_k^{(1)} \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 q_k^{(1)} \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad (12) \\
 & \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^E \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^H \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad (m = \overline{1, M})
 \end{aligned}$$

Характеристики разрушения в вершинах трещин. В механике разрушения коэффициенты интенсивности механических, электрических и магнитных величин в вершинах трещин определяются формулами [1,10]

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_n), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \tau_{ns}), \quad K_D = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} D_n), \quad K_B = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} B_n) \quad (13)$$

С учетом асимптотики интегралов типа Коши в окрестности концов линии интегрирования, коэффициенты интенсивности (13) являются функционалами решений системы (11):

$$\begin{aligned}
 & K_I = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi_c) A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1), \\
 & K_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_k(\psi_c) A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1), \quad b_k(\psi) = \frac{da_k(\psi)}{d\psi}, \quad (14) \\
 & K_D = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1), \\
 & K_B = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1).
 \end{aligned}$$

В концепции разрушения Гриффитса [10] принципиальное значение имеет величина энергостока (потока энергии) в вершину трещины при её продвижении в теле. Если трещина находится в магнитоэластичной среде, то помимо механической энергии, в поток энергии может входить электрическая и магнитная энергии, высвобождающиеся при её продвижении. Формулировка критерия разрушения зависит от вида электрических и магнитных условий на берегах трещины.

Поток энергии необходимый для продвижения трещины за вершину c , на малую величину cc' вдоль касательной определяется формулой

$$\Delta A_{\Delta l} = \frac{1}{2} \int_{cc'} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} D_j^{(0)} n_j [\varphi_i^{(E)}] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} B_j^{(0)} n_j [\varphi_i^{(H)}] ds \quad (15)$$

где $\sigma_{ij}^{(0)}$, $D_j^{(0)}$, $B_j^{(0)}$ определены до продвижения трещины, а $u_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(E)}$, $\varphi_i^{(H)}$ – скачки соответствующих величин на отрезке cc' .

Условие распространения трещины примет вид

$$2\gamma = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_0^{\Delta l} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \int_0^{\Delta l} D_j^{(0)} n_j [\varphi_i^E] ds + \int_0^{\Delta l} B_j^{(0)} n_j [\varphi_i^H] ds \right\} \quad (16)$$

где γ – плотность поверхностной энергии.

Величина энергостока в каждую вершину есть квадратичная форма переменных K_j . Можем записать (суммирование по i и j):

$$2\gamma = \alpha_{ij} K_i K_j \quad (i, j = \overline{1,4}), \quad (17)$$

где $K_1 = K_I$, $K_2 = K_{II}$, $K_3 = K_D$, $K_4 = K_B$ и α_{ij} – коэффициенты, зависящие от материальных констант магнитоэлектрической керамики.

Результаты расчетов. Рассмотрим случай, когда граница пластины свободна от сил и граничит вакуумом, а на поверхности трещины действует распирающее давление $p = 1$. Для двух контуров пластины приведены графики зависимостей плотности поверхностной энергии в вершинах трещины γ от характеристики параметризации прямолинейной трещины p_2

$$\zeta(\beta) = (p_1 \beta^2 + ip_2 \beta) e^{i\alpha + ih}, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad p_1 = 0,$$

соответствующие конфигурации нанесены на графиках, как встроенные рисунки для максимального значения p_2 , которое рассмотрено в данных результатах. Результаты приводятся для трех различных материалов [6] в двух вершинах трещины, соответствующие обозначения линий приведены в легенде к графикам. Рассматриваемые пластины имеют близкие характерные размеры.

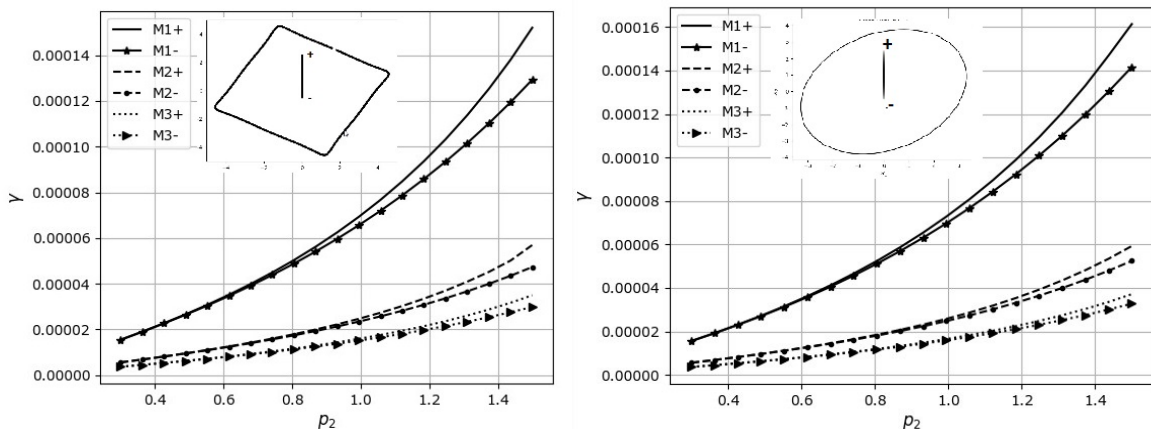


Рис. 2. Плотность поверхностной энергии γ в вершинах трещин в зависимости от половины длины трещины для трех различных материалов и различных контуров пластинки.

Выводы

Из результатов следует, что коэффициенты интенсивности и, как результат, плотность поверхностной энергии в вершинах трещин существенно зависит от материала пластины, а также на характеристики разрушения влияют и геометрические параметры, в частности, расстояние от вершины трещины до контура пластины.

Список использованной литературы

1. Bao-Lin Wang, Yiu-Wing Mai. (2007). Applicability of the crack-face electromagnetic boundary conditions for fracture of magnetoelastoelectric materials. International journal of solids and structures, 2 (44), 387-398.
2. Hua-dong Yong, You-he Zhou. (2007). Transient response of a cracked magnetoelastoelectric strip under anti-plane impact. International Journal of Solids and Structures, 2 (44), 705-717.
3. Ke-qiang Hu, Guo-qiang Li. (2005). Electro-magneto-elastic analysis of a piezoelectromagnetic strip with a finite crack under longitudinal shear. Mechanics of Materials, 9 (37), 925-934.
4. Nan CW. (1994) Magnetolectric effect in composites of piezoelectric and piezomagnetic phases. Phys Rev B Condens Matter, 50(9), 6082-6088.

5. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. — М.: Наука, 1986. — 160 с.
6. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. — Донецк: Юго-Восток, 2011. — 232 с.
7. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде / Л.А. Фильштинский // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1976. — № 5. — С. 91-97.
8. Фильштинский, Л. А. Плоская задача магнитоупругости для пьезомагнитной среды с трещинами / Л.А. Фильштинский, Д.Н. Носов, А.А. Еременко // Физико-химическая механика материалов. — 2015. — Т. 51. — №2. — С. 109-115
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Физматгиз, 1962. — 599 с.
10. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. — М.: Наука, 1974. — 640 с.