

УДК 519.6

С. В. ЧОПОРОВ

Запорожский национальный университет

СГЛАЖИВАНИЕ СЕТОК ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА

Статья посвящена исследованию актуальной проблемы построения и сглаживания неструктурированных сеток четырехугольных конечных элементов. При построении таких сеток в окрестностях особенностей границ объекта могут возникать невыпуклые четырехугольники. Для устранения невыпуклых элементов при выборе новых координат в каждом узле предлагается решать локальную задачу минимизацию функционала площади. Функционал площади в узле определяется как сумма экспонент площадей, вычисленных с учетом знака, для смежных элементов.

Ключевые слова: дискретная модель, сетка, конечный элемент, четырехугольник, сглаживание.

С. В. ЧОПОРОВ

Запорізький національний університет

ЗГЛАДЖУВАННЯ СІТОК ЧОТИРИКУТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛОКАЛЬНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІОНАЛУ

Стаття присвячена дослідженню актуальної проблеми побудови та згладжування неструктурованих сіток чотирикутних скінченних елементів. При побудові таких сіток в околицях особливостей меж об'єкта можуть виникати неопуклі чотирикутники. Для усунення неопуклих елементів при виборі нових координат у кожному елементі пропонується розв'язувати задачу мінімізації функціоналу площини. Функціонал площини у вузлі визначається як сума експонент площин, обчислених з урахуванням знаку, для суміжних елементів.

Ключові слова: дискретна модель, сітка, скінченний елемент, чотирикутник, згладжування.

S. V. CHOPOROV

Zaporizhzhya National University

SMOOTHING OF QUADRILATERAL MESHES BY LOCAL FUNCTIONAL MINIMIZATION

This article describes the problem of unstructured quadrilateral mesh generation and smoothing. During automatic mesh generation, in general, non-convex quadrilaterals can be obtained near boundaries of non-convex regions. We suggest the smoothing algorithm that refines meshes using local minimization of an area functional. The area functional for some node is an exponential sum of signed areas of adjacent elements. Such functional is minimized for each node using the conjugate gradient method.

Keywords: discrete model, mesh, finite element, quadrilateral, smoothing.

Постановка проблемы

В процессе конечно-элементного исследования инженерных объектов возникает проблема построения адекватных дискретных моделей областей. Как правило, к дискретным моделям предъявляются определенные требования: (в общем случае) границы объекта должны быть аппроксимированы гранями и ребрами элементов заданной формы, не должно быть слишком больших и слишком маленьких элементов, форма элементов должна быть как можно ближе к правильной и т. п. Удовлетворение таким требованием в процессе генерации дискретной модели геометрического объекта является достаточно трудной задачей, поэтому в качестве завершающих этапов на практике используют различные процедуры сглаживания.

Под процедурой сглаживания понимается алгоритм выбора новых координат узлов. Такие алгоритмы, чаще всего, явно или неявно решают задачу оптимизации одной или нескольких геометрических характеристик конечных элементов. Например, обеспечения равенства длин ребер или площадей, максимальности минимального угла и т. д. Алгоритмы сглаживания разделяют на глобальные и локальные. Глобальные алгоритмы решают задачу оптимизации положений одновременно всех узлов, а локальные – одного или нескольких узлов, требуя многократного итерационного применения ко всем узлам.

В задачах исследования напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек весьма распространено использование четырехугольных конечных элементов. При генерации сеток таких элементов для геометрических объектов, границы которых аппроксимируются невыпуклыми многоугольниками, могут возникать вырожденные четырехугольники (один из углов больше или равен 180°). Таким образом, целью

данной статьи является разработка подхода к сглаживанию сеток четырехугольных элементов, гарантирующего отсутствие вырожденных элементов.

Анализ последних достижений и публикаций

Возможно, наибольшее распространение получили подходы, основанные на сглаживании Лапласа [1]. Оно основывается на идее перемещения узла в центр масс фигуры, образованной смежными элементами (рис. 1). Простейшая реализация такого сглаживания предполагает использование следующей формулы вычисления новых координат

$$S(P) = \sum_{P_i \in A_P} w_i P_i, \quad (1)$$

где A_P – множество соседних с P узлов, w_i – весовые коэффициенты (весьма распространено использование значения $w_i = |A_P|$).

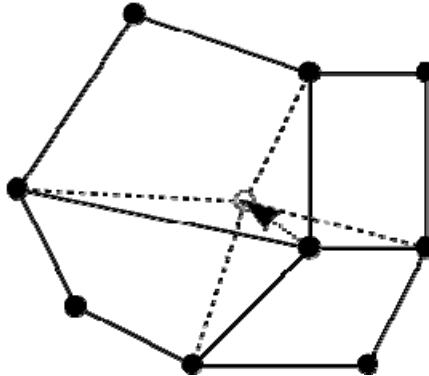


Рис. 1. Сглаживание Лапласа для фрагмента четырехугольной сетки

Процедура состоит в сглаживании каждого узла по очереди. Такая процедура повторяется несколько раз.

Модификации сглаживания Лапласа, как правило, связаны с введением правил вычисления весовых коэффициентов в формуле (1). Например, взвешенное по длинам сторон [2]; основанное на использовании окружающих узлов (для четырехугольников и шестигранников используются все узлы смежных элементов) [3]; ограниченное сглаживание Лапласа [4-6], при котором узел перемещается в новую позицию, только если выбранная метрика (например, минимальный угол в элементе) не ухудшается; и другие [7-8].

Основным преимуществом подходов, основанных на сглаживании Лапласа, является использование малых вычислительных ресурсов, а также простота реализации. Основным недостатком такой процедуры является возможность получения вырожденных элементов (особенно при обработке четырехугольников или шестигранников). Также необходимо отметить, что оно стремится равномерно расположить узлы.

Альтернативой сглаживанию Лапласа являются подходы, основанные на введении целевой функции, минимизация или максимизация которой обеспечит оптимальное расположение узлов сетки. Например, в качестве целевой функции могут выступать значения минимального или максимального угла элемента [5-6, 9]. Также в качестве метрик используются отношение радиуса описанной окружности к радиусу вписанной (для треугольников и тетраэдров) [10], площади элементов, длины сторон или скалярные произведения векторов, определенных на сторонах элементов [11-15].

Преимущество методов, основанных на оптимизации, состоит в гарантировании улучшения качества сетки. Однако, их реализация требует решения задачи оптимизации с числом переменных вдвое или втрое большим, чем число узлов сетке. Время, необходимое на выполнение процедуры такого сглаживания, может значительно превышать время, необходимое на выполнение сглаживания Лапласа [4].

Также разрабатываются гибридные методы [5-6, 16], основанные на комбинировании оптимизационных методов и сглаживания Лапласа.

Цель исследования

Цель исследования является разработка подхода к сглаживанию неструктурированных сеток четырехугольных элементов, гарантирующего отсутствие невыпуклых элементов.

Изложение основного материала исследования

Пусть неструктурированная сетка четырехугольных элементов M задана в виде

$$M = \{V = (v_i), E = (q_j)\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (2)$$

где V – упорядоченное (например, в порядке добавления) множество вершин; $v_i = (x_i, y_i)$ – радиус-вектор i -й вершины; n – число вершин в сетке; E – упорядоченное множество элементов

(четырёхугольников); $q_j = (i_{j,1}, i_{j,2}, i_{j,3}, i_{j,4})$ – j -й четырёхугольник сетки, заданный номерами вершин в множестве $\mathbf{V}$ в порядке обхода против часовой стрелки; k – число элементов в сетке.

Аппликаты векторных произведений пар векторов, направленных из каждой вершины вдоль смежных в ней ребер (рис. 2), равны удвоенным площадям треугольников, определенных вершиной, смежными ребрами и диагональю. Причем знак аппликаты будет положительным, если угол между векторами больше 0 и меньше π ; отрицательным, если угол между векторами от π до 2π . Равным нулю оно будет, если векторы коллинеарны или длина хотя бы одного равна 0. Т.е., у невыпуклого четырёхугольника хотя бы в одном узле такое произведение будет меньшим или равным нулю.

Если a , b и c – радиус-векторы вершин треугольника, перечисленные в порядке обхода против часовой стрелки, тогда удвоенное значение площади с учетом знака определяется функцией

$$\alpha(a, b, c) = (b - a) \times (c - a), \quad (3)$$

где $\times$ обозначает векторное произведение.

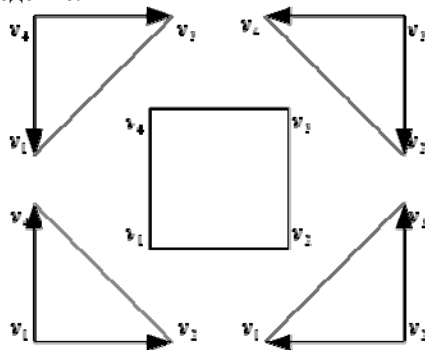


Рис. 2. Представление четырёхугольника четырьмя треугольниками

Простейшая целевая функция, минимизация которой будет стремиться устранить треугольники с углом больше или равным π , будет иметь вид [13]

$$F(\mathbf{M}) = \sum_{j=1}^k \left(e^{-t\alpha(v_1(q_j), v_2(q_j), v_4(q_j))} + e^{-t\alpha(v_2(q_j), v_3(q_j), v_1(q_j))} + \right. \\ \left. + e^{-t\alpha(v_3(q_j), v_4(q_j), v_2(q_j))} + e^{-t\alpha(v_4(q_j), v_1(q_j), v_3(q_j))} \right), \quad (4)$$

где t – это действительное положительное число, используемое для масштабирования; $v_p(q_j) = v_{i_{j,p}}$, $p = \overline{1,4}$ – функция нахождения радиус-вектора p -й вершины четырёхугольника.

Минимуму (4) будет соответствовать выпуклая сетка, если выполняется неравенство [13]

$$t > \ln \frac{4k}{\alpha_-}, \quad (5)$$

где α_- – минимальное значение функции (3) в сетке $\mathbf{M}$.

Формула (5) позволяет автоматизировать выбор t . Однако, минимизация (4) для всех узлов сетки одновременно является экстенсивной процедурой, т.к., количество независимых переменных будет в два раза больше числа узлов в сетке. Уменьшить размерность решаемой задачи можно при помощи последовательных локальных решений для каждого узла.

В локальной формулировке функция (4) примет вид

$$L(v) = \sum_{q_j \in \text{Adj}(v)} \left(e^{-t\alpha(v_1(q_j), v_2(q_j), v_4(q_j))} + e^{-t\alpha(v_2(q_j), v_3(q_j), v_1(q_j))} + \right. \\ \left. + e^{-t\alpha(v_3(q_j), v_4(q_j), v_2(q_j))} + e^{-t\alpha(v_4(q_j), v_1(q_j), v_3(q_j))} \right), \quad (6)$$

где $\text{Adj}(v)$ – множество четырёхугольников, смежных в узле v .

У функции (6) две независимые переменные (координаты узла), что существенно упрощает поиск минимума. Последовательную минимизацию функции (6) можно рассматривать как итерационное приближение к минимуму функции (4) при помощи координатного спуска. По аналогии со сглаживанием

Лапласа для достижения наилучшего результата данную процедуру необходимо повторять несколько раз. В результате получен следующий алгоритм.

algorithm local-optimization-smoothing

input:

Сетка четырехугольников $\mathbf{M} = \{\mathbf{V}, \mathbf{E}\}$, ε – параметр точности поиска.

output:

Сетка четырехугольников $\mathbf{M} = \{\mathbf{V}, \mathbf{E}\}$ с измененными координатами вершин в множестве $\mathbf{V}$

$$x_{\min} \leftarrow \min_x (V), x_{\max} \leftarrow \max_x (V), y_{\min} \leftarrow \min_y (V), y_{\max} \leftarrow \max_y (V)$$

for each v_i **in** $\mathbf{V}$ **do**

$$\mathbf{A} \leftarrow \text{Adj}(v_i)$$

$$\bar{l} \leftarrow 0, \alpha_- \leftarrow (x_{\max} - x_{\min})(y_{\max} - y_{\min})$$

for each q_j **in** $\mathbf{A}$ **do**

$$\bar{l} \leftarrow \bar{l} + v_2(q_j) - v_1(q_j) + v_3(q_j) - v_2(q_j) + v_4(q_j) - v_3(q_j) + v_1(q_j) - v_4(q_j)$$

$$\alpha_- \leftarrow \min\{\alpha_-, \alpha(v_1(q_j), v_2(q_j), v_4(q_j)), \alpha(v_2(q_j), v_3(q_j), v_1(q_j)), \\ \alpha(v_3(q_j), v_4(q_j), v_2(q_j)), \alpha(v_4(q_j), v_1(q_j), v_3(q_j))\}$$

end for

$$\bar{l} \leftarrow \frac{\bar{l}}{4|\mathbf{A}|}, t \leftarrow \ln\left(\frac{4|\mathbf{A}|}{\alpha_-} + 1\right)$$

function $L(w)$

$$s \leftarrow 0$$

for each q_j **in** $\mathbf{A}$ **do**

$$v_1 \leftarrow \begin{cases} w, & v_1(q_j) = v_i, \\ v_1(q_j), & v_1(q_j) \neq v_i \end{cases}, v_2 \leftarrow \begin{cases} w, & v_2(q_j) = v_i, \\ v_2(q_j), & v_2(q_j) \neq v_i \end{cases}$$

$$v_3 \leftarrow \begin{cases} w, & v_3(q_j) = v_i, \\ v_3(q_j), & v_3(q_j) \neq v_i \end{cases}, v_4 \leftarrow \begin{cases} w, & v_4(q_j) = v_i, \\ v_4(q_j), & v_4(q_j) \neq v_i \end{cases}$$

$$s \leftarrow s + e^{-t\alpha(v_1, v_2, v_4)} + e^{-t\alpha(v_2, v_3, v_1)} + e^{-t\alpha(v_3, v_4, v_2)} + e^{-t\alpha(v_4, v_1, v_3)}$$

end for

return s

end function

$$v_i \leftarrow \text{conjugate_gradient}(L, v_i, \varepsilon \bar{l}, \varepsilon^2 \bar{l})$$

end for

В приведенном выше алгоритме, $\text{conjugate_gradient}(L, v_i, \varepsilon \bar{l}, \varepsilon^2 \bar{l})$ – поиск минимума функции L при помощи метода сопряженных градиентов (v_i – начальное приближение, $\varepsilon \bar{l}$ – шаг метода, $\varepsilon^2 \bar{l}$ – расстояние между приближениями, при котором решение считается найденным).

Рассмотрим работу описанного выше алгоритма на примере дискретной модели квадратной пластинки с треугольным вырезом (рис. 3). Исходная модель (рис. 3, а), полученная при помощи метода фоновой сетки, содержит вырожденные элементы около вершин выреза. В результате сглаживания Лапласа (4 итерации, рис. 3, б) общее расположение узлов улучшилось, но остались три невыпуклых элемента (около вершин выреза). После одной итерации предложенным алгоритмом (рис. 3, в) модель уже не содержит невыпуклых элементов, но около отверстия есть элемент с углом, близким к 180° . На рис. 3, г, д, е, ж, соответственно, показаны результаты применения 2, 4, 8 и 16 итераций по узлам с локальной минимизацией. Можно увидеть, что уже на 8 итерациях ребро у правого угла выреза практически совпадает с его биссектрисой. Результат решения глобальной задачи (4) показан на рис. 3, з.

Зависимость времени обработки модели от количества узлов при использовании компьютера с процессором Intel Core i5-3330 3.0GHz (4 ядра) и 8 гигабайтами оперативной памяти показана в табл. 1. В ходе вычислительного эксперимента процедуры сглаживания Лапласа и локальной минимизации с использованием предложенного подхода повторялись в четырех итерациях. Можно увидеть, что наименьшее время необходимо для выполнения сглаживания Лапласа. Локальная минимизация в среднем на три порядка дольше сглаживания Лапласа и на три порядка быстрее поиска минимума в глобальной постановке.

Таблица 1

Зависимость времени сглаживания от количества узлов в дискретной модели

Способ сглаживания	Количество узлов						
	828	1138	1496	1912	2367	2874	3427
	Время, с						
Сглаживание Лапласа	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,009
Локальная минимизация	0,382	0,469	0,880	1,108	1,420	1,710	2,029
Глобальная минимизация	63,620	102,300	271,000	428,316	662,700	947,434	1338,041

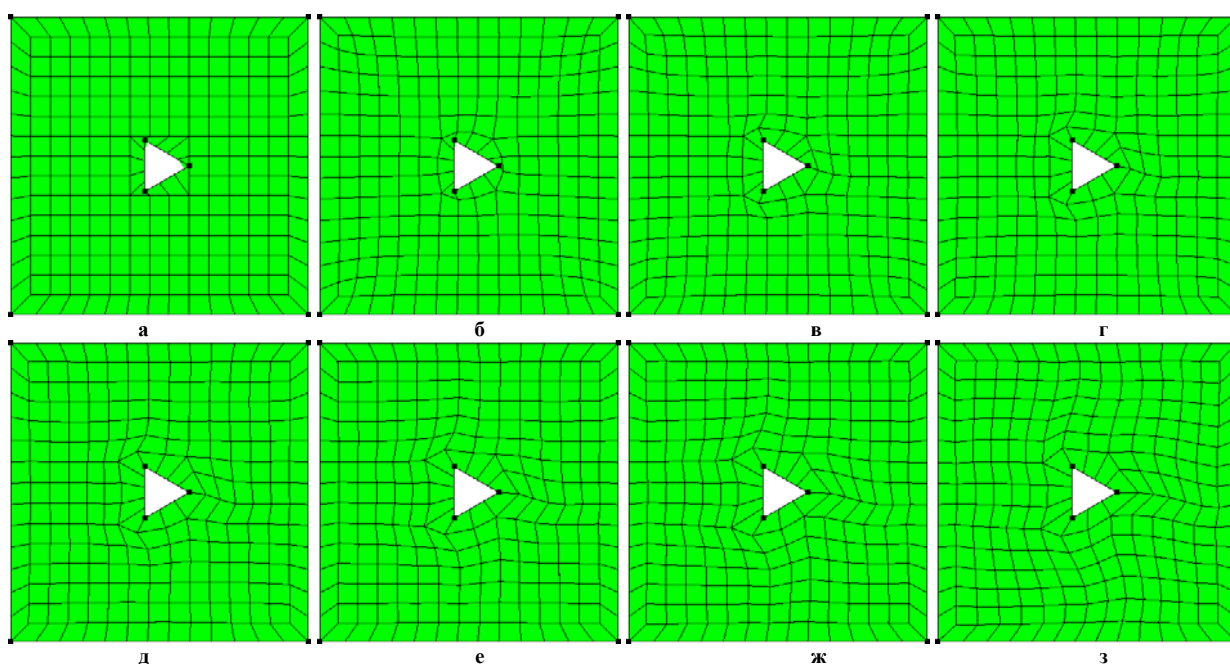


Рис. 3. Дискретная модель квадратной пластинки с треугольным вырезом

На рис. 4 сопоставляются начальная сетка (рис. 4, а), а также результаты сглаживаний Лапласа (рис. 4, б) и при помощи предложенного подхода (рис. 4, в), для дискретной модели фрикционного диска трансмиссии. В результате сглаживания Лапласа остаются два невыпуклых элемента, которые устраняются при локальной оптимизации предложенным подходом.

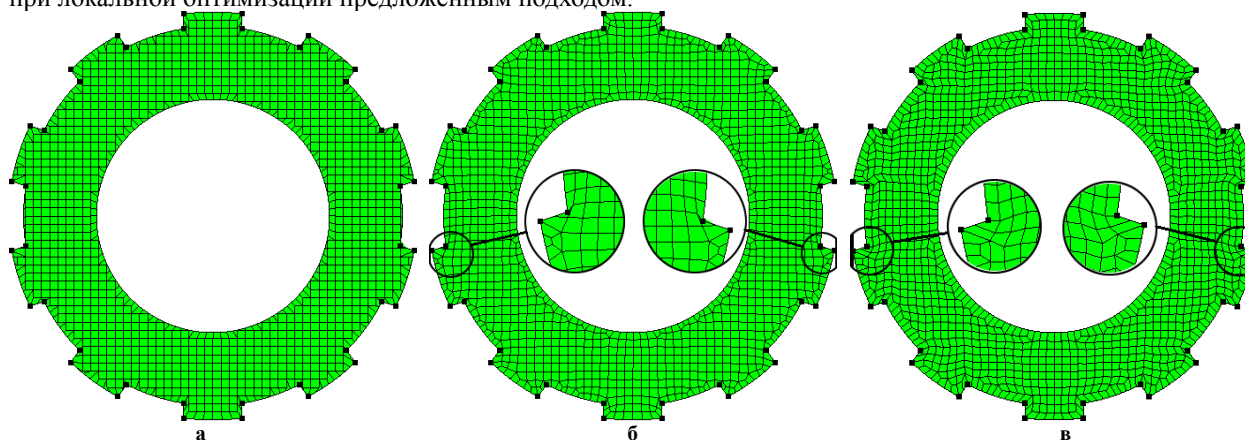


Рис. 4. Дискретная модель фрикционного диска трансмиссии

Выводы

Таким образом, основным научным результатом является новый подход к локальному сглаживанию дискретных моделей, позволяющий устранить невыпуклые элементы. Такой подход показывает качество дискретных моделей, сравнимое с глобальной оптимизацией положений узлов, но при этом, требует значительно меньших вычислительных ресурсов. Также его относительно не сложно обобщить для трехмерного случая, используя смешанные произведения троек векторов в узлах шестигранников.

Список использованной литературы

1. Field D. A. Laplacian Smoothing and Delaunay Triangulation / D. A. Field // Communications in Applied Numerical Methods. – 1988. – vol. 4. – P. 709-712.
2. Blacker T. D. Paving: a New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation / T. D. Blacker, M. B. Stephenson // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1991. – vol. 32. – P.811-847.
3. Zhu J. Z. A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation / J. Z. Zhu, O. C. Zienkiewicz, E. Hinton, J. Wu // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – vol. 32. – 1991. – P. 849-866.
4. Freitag L. A. A Comparison of Tetrahedral Mesh Improvement Techniques / L. A. Freitag, C. Ollivier-gooch // 5th International Meshing Roundtable : Pittsburgh, Pennsylvania, U.S.A., October 10-11, 1996 : proceedings. – Sandia: Sandia National Labs, 1996. – P. 87-100.
5. Freitag L. A. On Combining Laplacian And Optimization-Based Mesh Smoothing Techniques / L. A. Freitag // Trends in Unstructured Mesh Generation. – 1997. – P. 37-43.
6. Canann S. A. An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes / S. A. Canann, J. R. Tristano, M. L. Staten // 7th International Meshing Roundtable : Dearborn, Michigan, U.S.A., October 26-28, 1998 : proceedings. – Sandia: Sandia National Labs, 1998. – P. 479-494.
7. Hansbo P. Generalized Laplacian Smoothing of Unstructured Grids / P. Hansbo // Communications in Numerical Methods in Engineering. – 1995. – vol. 11. – P. 455-464.
8. Chen L. Mesh Smoothing Schemes Based on Optimal Delaunay Triangulations // 13th International Meshing Roundtable : Williamsburg, Virginia, U.S.A., September 19-22, 2004 : proceedings.. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2004. – P. 109-120.
9. Zhou T. An Angle-based Approach to Two-Dimensional Mesh Smoothing / Tian Zhou and Kenji Shimada // 9th International Meshing Roundtable : International Conference, New Orleans, U.S.A., October 2-5, 2000 : proceedings. – 2000. – Sandia: Sandia National Laboratories, P. 373-384.
10. Parthasarathy V. N. A constrained optimization approach to finite element mesh smoothing / V. N. Parthasarathy, S. Kodiyalam // Finite Elements in Analysis and Design. – 1991. – vol. 9, iss. 4. – P. 309-320.
11. Castillo J. E. An adaptive direct variational grid generation method / José E. Castillo // Computers & Mathematics with Applications. – 1991. – vol. 21, iss. 5. – P. 57-64.
12. Tinoco-Ruiz J.-G. Some Properties of Area Functionals in Numerical Grid Generation / José-Gerardo Tinoco-Ruiz, Pablo Barrera-Sánchez, Adán Cortes-Médina // 10th International Meshing Roundtable: International Conference, Newport Beach, U.S.A., October 7-10, 2001: proceedings. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2001. – P. 43-54.
13. Barrera-Sánchez P. Robust Discrete Grid Generation on Plane Irregular regions / Pablo Barrera-Sánchez, Guilmer F. González Flores, Francisco J. Dominguez-Mota // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2003. – vol. 43, iss. 6. – P. 845-853.
14. Khattri S.K. An effective quadrilateral mesh adaptation / S. K. Khattri // Journal of Zhejiang University SCIENCE A. – 2006. – vol. 7, iss. 12. – P. 2018-2021.
15. Khattri S.K. An adaptive quadrilateral mesh in curved domains / S. K. Khattri // Serdica Journal of Computing. – 2009. – vol. 3. – P. 248-268.
16. Chen Z. Combined Laplacian and Optimization-based Smoothing for Quadratic Mixed Surface Meshes / Z. Chen // 12th International Meshing Roundtable: International Conference, Santa Fe, U.S.A., September 14-17, 2003 : proceedings. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2003. – P. 201-213.