

УДК 539.3

И.В. ЩЕРБИНА, О.В. БЕЛОВА
Национальная металлургическая академия Украины
Т.С. КАГАДИЙ
Национальный горный университет

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ ДЛЯ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Исследована плоская задача о передаче нагрузки упругим стрингером упругому анизотропному прямоугольнику, закрепленному на двух противоположных кромках. В середине свободных кромок вдоль оси Ox пластина усилена стрингером, который при $x = 0$ нагружен продольной силой P_0 . Получены законы изменения усилия в стрингере и контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной. Рассмотрены частные случаи. Задача решена асимптотическим методом Маневича-Павленко [1,2]. Разработанный авторами метод возмущений позволил свести решение сложных задач теории упругости анизотропных сред к последовательному решению краевых задач теории потенциала.

Ключевые слова: асимптотический метод, ортотропный материал, контактное усилие

I.V. ЩЕРБИНА, O.V. БЕЛОВА
Національна металургійна академія України
Т.С. КАГАДІЙ
Національний гірничий університет

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО МЕТОДА ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПЕРЕДАЧУ НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ ТІЛ СКІНЧЕНИХ РОЗМІРІВ

Досліджено плоску задачу про передачу навантаження пружним стрінгером пружному анізотропному прямокутнику. Отримано закони зміни зусилля в стрінгері і контактне зусилля взаємодії між стрингером та пластиною. В середині вільних кромок вздовж осі Ox пластина посилена стрингером, який при $x = 0$ навантажений поздовжньою силою P_0 . Розглянуто окремі випадки. Задача розв'язана асимптотичним методом Маневича-Павленко [1,2]. Розроблений авторами метод збурення дозволив звести розв'язання складних задач теорії пружності анізотропних середовищ до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу.

Ключові слова: асимптотичний метод, ортотропний матеріал, контактне зусилля

I.V. SHERBINA, O.V. BELOVA
National metallurgical academy of Ukraine
T.S. KAGADIY
National metallurgical academy of Ukraine

APPLICATION OF THE ASYMPTOTIC METHOD TO THE SOLUTION OF THE LOAD TRANSFER PROBLEM FOR BODIES OF FINITE SIZES

The plane problem of transferring a load by an elastic stringer to an elastic anisotropic rectangle is investigated. The laws of force variation in the stringer and the contact force between the stringer and the plate are obtained. In the middle of the free edges along the axis Ox , the plate is reinforced by a stringer, which is loaded with $x = 0$ a longitudinal force P_0 . Particular cases are considered. The problem is solved by the Manevich-Pavlenko asymptotic method [1, 2]. The elaborated by authors perturbation method is allowed to reduced the solution of complicated problems of linear elasticity to subsequently solved boundary problems of potential theory.

Keywords: asymptotic method, orthotropic material, contact force

В механіке деформуючого твердого тіла отримання аналітичних рішень в контактних задачах для анізотропних тіл кінцевих розмірів є найбільш складною і, зазвичай, невыполнимою задачею. Тому, попередній асимптотичний аналіз дозволяє не тільки спрогнозувати, смоделировать результат, но і отримати наближене рішення, яке в малій околиці особливих точок, практично, не відрізняється від точного [3-6]. Представлена задача вирішується асимптотичним методом Маневича-Павленко, заснованому на використанні малих параметрів, що характеризують анізотропію. Інтересно той факт, що чим сильніше анізотропія, тим швидше рішення задачі, отримане цим методом, сходиться до точного [1,2].

Постановка задачі

Пусть упругая пластина $0 \leq x \leq h$, $-b \leq y \leq b$ закреплена по кромкам $y = \pm b$, две остальные $x = 0$, $x = h$ остаются свободными. В середине свободных кромок вдоль оси Ox пластина усилена стрингером, который при $x = 0$ нагружен продольной силой P_0 . Кроме того предполагается, что стрингер подвержен действию некоторой нагрузки, пропорциональной его смещению, с коэффициентом пропорциональности k . Материал прямоугольника является ортотропным, главные оси анизотропии совпадают с декартовыми координатами x, y . Требуется определить законы изменения усилий в стрингере и распределение напряжений в пластине.

Поставленная задача сводится к интегрированию уравнений равновесия прямоугольника в перемещениях

$$\begin{aligned} B_1 u_{xx} + G u_{yy} + m G v_{xy} &= 0, \\ B_2 v_{yy} + G v_{xx} + m G u_{xy} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 0 \quad (x = 0, x = h); \\ u = u_c, v = 0 \quad (y = 0); u = v = 0 \quad (y = \pm b), \end{aligned}$$

причем перемещения стрингера u_c удовлетворяют соотношениям

$$E_c F_c u_{c,xx} = 2k u_c - 2\sigma_{12}(x, 0), \tag{2}$$

$$N = E_c F_c u_{c,x} = P_0(x = 0); N = 0(x = h), \tag{3}$$

где $B_j = \frac{E_j h^*}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$, $G = G_{12} h^*$, $m = 1 + \nu_{21} \frac{B_1}{G}$, E_1, E_2 – модули упругости вдоль главных направлений

$Ox; Oy$, ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона, G – модуль сдвига, σ_{11}, σ_{22} – нормальные напряжения, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ – касательные напряжения; индексы x и y означают дифференцирование по соответствующим координатам, $E_c F_c$ – жесткость на растяжение, сжатие стрингера, $N(x)$ – усилие в стрингере. При $y = 0, v = 0$, поэтому контактное усилие взаимодействия между стрингером и прямоугольником определяется по формуле

$$\tau(x) = \sigma_{12}(x, 0) = G u_y(x, 0). \tag{4}$$

В дальнейшем из условий симметрии относительно оси Ox рассматривается только область $0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq b$.

В соответствии с расщеплением напряженно-деформированного состояния на две составляющие [1,2] сформулированная выше краевая задача в первом приближении сводится к последовательному решению двух следующих

$$B_1 u_{xx}^{1,0} + G u_{yy}^{1,0} = 0 \tag{5}$$

$$u_x = 0(x = 0, x = h), u = u_c(y = 0), u = 0(y = b) \tag{6}$$

$$G v_{xx}^{2,0} + B_2 v_{yy}^{2,0} = 0 \tag{7}$$

$$v = 0(y = 0, y = b), v_x = -u_y(x = 0, x = h) \tag{8}$$

Нормальное напряжение σ_{11} и составляющая касательного напряжения $\sigma_{12}^{(1)}$ определяются по формулам

$$\sigma_{11} = B_1 u_x, \quad \sigma_{12}^{(1)} = G u_y, \tag{9}$$

а усилие в стрингере и контактное усилие взаимодействия между стрингером и пластиной находятся из соотношений

$$N(x) = E_c F_c u_x(x, 0), \quad \tau(x) = G u_y(x, 0). \tag{10}$$

При определении напряженно-деформированного состояния первого типа используются косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по координате x . В результате получим

$$u_x = \frac{2P_0}{E_c F_c} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh[\omega \alpha_n (b-y)] n \sin(\alpha_n x)}{sh(\omega \alpha_n b) \varphi(n)}, \quad (11)$$

$$u_y = -\frac{P_0}{E_c F_c} \frac{1}{h} \frac{\omega b}{2q + \kappa \omega b} - \frac{2P_0}{E_c F_c} \frac{\omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch[\varpi \alpha_n (b-y)] n \cos(\alpha_n x)}{sh(\omega \alpha_n b) \varphi(n)}. \quad (12)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. При $\omega \rightarrow 0$ (пластина работает только на сдвиг) формулы (11), (12) принимают вид

$$u_x = \frac{P_0}{E_c F_c} \frac{b-y}{b} \frac{sh[\sqrt{g_* + \kappa} (h-x)]}{sh(\sqrt{g_* + \kappa} h)}, \quad (13)$$

$$u_y = \frac{P_0}{E_c F_c} \frac{1}{\sqrt{g_* + \kappa}} \frac{ch[\sqrt{g_* + \kappa} (h-x)]}{sh(\sqrt{g_* + \kappa} h)}. \quad (14)$$

где $g_* = 2G / bE_c F_c$.

В этом случае нормальное напряжение в пластине $\sigma_{11} = 0$, касательное является константой вдоль координаты y , а для усилия в стрингере имеем

$$N(x) = P_0 \frac{sh[\sqrt{g_* + \kappa} (h-x)]}{sh(\sqrt{g_* + \kappa} h)} \quad (15)$$

При $h \rightarrow \infty$ (то есть в соответствующей задаче для полуплоскости, работающей только на сдвиг) получим

$$u_x = \frac{P_0}{E_c F_c} \frac{b-y}{b} e^{-\sqrt{g_* + \kappa} x}, \quad u_y = \frac{P_0}{E_c F_c} \frac{1}{b\sqrt{g_* + \kappa}} e^{-\sqrt{g_* + \kappa} x}, \quad N(x) = P_0 e^{-\sqrt{g_* + \kappa} x}$$

При $b \rightarrow \infty$ соотношения (11), (12) принимают вид

$$u_x = \frac{2P_0}{E_c F_c \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega \alpha_n y} n \sin(\alpha_n x)}{n^2 + 2q \alpha_n (h^2 / \pi^2) + \kappa (h^2 / \pi^2)} \quad (16)$$

$$u_y = \frac{2P_0 \omega}{E_c F_c \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\varpi \alpha_n y} \cos(\alpha_n x)}{n^2 + 2q \alpha_n (h^2 / \pi^2) + \kappa (h^2 / \pi^2)} \quad (17)$$

Предельный переход при $h \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ в выражениях (11), (12) дает решение задачи о передаче нагрузки стрингером ортотропной полуплоскости. В частности, при $y = 0$

$$u_x = \frac{P_0}{E_c F_c \pi \sqrt{q^2 - \kappa}} (a_1 f(a_1 x) - a_2 f(a_2 x)), \quad (18)$$

$$u_y = \frac{P_0 \varpi}{E_c F_c \pi \sqrt{q^2 - \kappa}} (a_1 g(a_1 x) - a_2 g(a_2 x)), \quad (19)$$

$$\text{где } a_1 = q + \sqrt{q^2 - \kappa}, \quad a_2 = q - \sqrt{q^2 - \kappa},$$

$$f(ax) = \sin(ax) si(ax) - \cos(ax) ci(ax), \quad (20)$$

$$g(ax) = -\sin(ax) si(ax) - \cos(ax) ci(ax). \quad (21)$$

Здесь $si(z)$, $ci(z)$ - соответственно интегральные синус и косинус. Усилие в стрингере $N(x)$ и контактное усилие взаимодействия $\tau(x)$ между стрингером и пластиной определяются по формулам (10).

Полученные выше решения не удовлетворяют нулевым граничным условиям по касательным напряжениям σ_{12} для пластины при $x = 0$, $x = h$. Эта невязка устраняется при определении напряженно-деформированного состояния второго типа, которое сводится к интегрированию уравнения (7) с граничными условиями (8). Определение напряженно-деформированного состояния второго типа проведем для $h \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, то есть для полуплоскости. Тогда граничные условия для такой задачи будут иметь вид:

$$v = 0 \quad (y = 0, y = \infty), v_x = -u_y \quad (x = 0) \quad v_x = 0, \quad (x = \infty) \quad (22)$$

причем u_y находится из формулы (19) при $x = 0$.

Применяя к уравнению (7) и граничным условиям (22) синус-преобразование Фурье по координате y и возвращая к оригиналу, получим $v(x, y)$. Нормальное напряжение σ_{22} и составляющая касательного напряжения $\sigma_{12}^{(2)}$ находятся по формулам $\sigma_{22} = B_2 v_y, \quad \sigma_{12}^{(2)} = G v_x$

После определения напряженно-деформированного состояния второго типа касательное напряжение σ_{12} при $x = 0$ удовлетворяет заданным нулевым условиям, так как

$$v_x(0, y) = -\frac{P_0 \omega}{\lambda E_c F_c \pi \sqrt{q^2 - \kappa}} \left(a_1 \int_0^\infty \frac{e^{-\omega y s} ds}{s + a_1} - a_2 \int_0^\infty \frac{e^{-\omega y s} ds}{s + a_2} \right),$$

Значение $u_y(0, y)$ определяется по формуле (19).

При $k = 0$ ($\kappa = 0, a_1 = 2q, a_2 = 0$) получаем решение задачи, когда отсутствует дополнительная нагрузка на стрингер, пропорциональная его смещению.

На рис.1 представлено распределение касательного напряжения σ_{12} при $x = 0$ для различных значений коэффициента k ($1-k = 0, 2-k = 0,2, 3-k = 0,5, 4-k = 0,8$) На рис.2 представлено изменение усилий в стержне $N(x)$ ($1-k = 0,1 \quad 2-k = 0$).

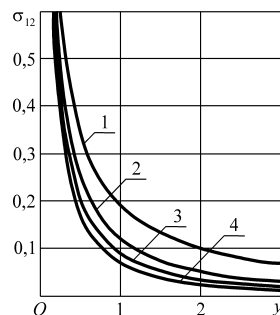


Рис.1. Распределение касательного напряжения при $x = 0$

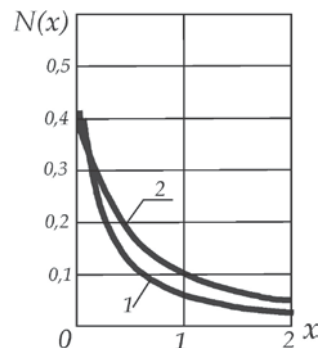


Рис. 2. Изменение усилий в стержне

Решена также задача для случая, когда пластина представляет собой кольцевой сектор из ортотропного материала, обладающего цилиндрической анизотропией.

Выводы

Асимптотический анализ является естественным математическим аппаратом, который дает возможность построить обоснованные приближенные уравнения и оценить области применимости различных гипотез. Это открывает новые перспективы при исследовании многих практически важных задач, возникающих в современной технике, которые до сих пор не нашли эффективного решения. Применение метода возмущений в данной работе при решении задачи о передаче нагрузки для тел конечных размеров позволило перейти от сложной смешанной краевой задачи механики к последовательному решению задач теории потенциала, которая сейчас является одной из наиболее изученных областей математической физики. Проведенный асимптотический анализ может быть использован для оценки НДС конструкций с усилениями, накладками, штампами и др.

Список использованной литературы

1. Маневич Л. И.. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов / Л. И.. Маневич, А. В Павленко. – Киев: Вища школа, 1991. – 131 с.
2. Маневич Л. И. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела / Л. И. Маневич, А. В. Павленко, С. Г. Коблик. – К., Донецк: Вища школа, 1982. – 152 с
3. Кагадий Т. С. Аналитический подход к решению некоторых контактных задач / Т. С. Кагадий, О. В Белова, И. В. Щербина // Вісник Херсонського національного університету. – 2016. – №3 (58). – С. 104-110.
4. Кагадий Т. С. Об эффективности использования асимптотических методов / Т. С. Кагадий, О. В Белова, И. В. Щербина // Всеукраїнська наукова конференція «Диференціальні рівняння та проблеми аеродинаміки й тепломасопереносу», 28-30 вересня 2016 р. – Дніпро, 2016. – С. 69-71.

5. Белова О. В. Эффективность применения асимптотического метода при решении некоторых задач механики / О. В. Белова, Т. С. Кагадий, И. В. Щербина / Вісник Запорізького Національного Університету, серія ф.-м. науки. – 2014. – № 12. – С. 11-17.

6. Kagadiy T. The analysis of the solution of the task about the mono axial stretching of the anisotropic plate with the curvilinear anisotropy loosened by the circular orifice / T. Kagadiy, O. Belova / Theoretical Foundations of Civil Engineering Polish-Ukrainian Transactions – 2015. – Vol. 23. – P. 9-14.